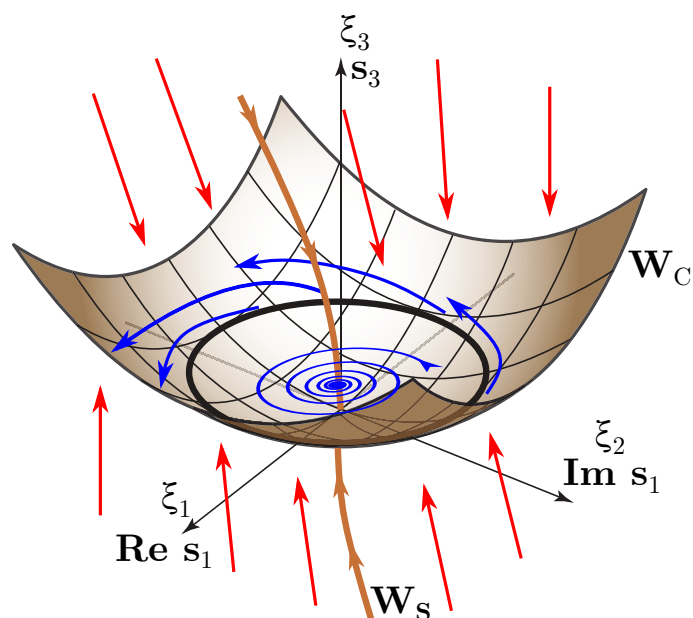


# Nemlineáris dinamikai rendszerek

Csernák Gábor

(Stépán Gábor, Szabó Zsolt és Dombóvári Zoltán anyagainak felhasználásával)



Lektorálta: -

Illusztrációk: Csernák Gábor és Takács Dénes

# Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	V
Jelölésjegyzék	VI
<b>1. A nemlinearitás jelentősége, vizsgálati módszerei</b>	<b>1</b>
1.1. Alapfogalmak . . . . .	1
1.2. Miért kell külön foglalkozni a nemlineáris jelenségekkel? . . . . .	6
1.2.1. Szuperpozíció . . . . .	7
1.2.2. Egzisztencia, unicitás . . . . .	10
1.3. Példák nemlineáris mechanikai komponensekre . . . . .	14
1.3.1. Nemlineáris rugók . . . . .	14
1.3.2. Nemlineáris tehetetlenség . . . . .	23
1.3.3. Nemlineáris csillapítás . . . . .	24
1.3.4. Érintkezéssel kapcsolatos nemlinearitások: ütközés, súrlódás . . . . .	27
1.4. A nemlineáris rendszerek vizsgálati módszerei . . . . .	30
<b>2. Egyensúlyi helyzetek stabilitása</b>	<b>33</b>
2.1. Autonóm és nem autonóm rendszerek . . . . .	33
2.2. Autonóm rendszerek egyensúlyi helyzetei . . . . .	35
2.2.1. Lineáris, autonóm differenciálegyenletek egyensúlyi helyzetei . . . . .	35
2.2.2. Nemlineáris, autonóm rendszerek egyensúlyi helyzetei . . . . .	36
2.3. Stabilitás . . . . .	39
2.3.1. A Ljapunov-értelemben vett stabilitás . . . . .	40
2.3.2. Stabilis polinomok . . . . .	42
2.3.3. Csillapított lineáris lengőrendszer vizsgálata . . . . .	43
2.4. Linearizálás az egyensúlyi helyzet körül . . . . .	49
2.4.1. Kétdimenziós lineáris dinamikai rendszer egyensúlyi helyzetének stabilitása . . . . .	50
2.5. Példák . . . . .	55
2.6. A centrum problémája és a központi sokaság tétel . . . . .	58
<b>3. Egydimenziós folytonos rendszerek bifurkációi</b>	<b>71</b>
3.1. A normál formák módszere . . . . .	72
3.2. Nyereg-csomó (saddle-node) bifurkáció . . . . .	73
3.3. Vasvilla (pitchfork) bifurkáció . . . . .	74
3.4. Histerézis bifurkáció . . . . .	79
3.5. Transzkritikus bifurkáció, stabilitás váltás . . . . .	81
3.6. Numerikus bifurkációkövetés . . . . .	83

3.7.	Bifurkációk több dimenzióban . . . . .	85
<b>4.</b>	<b>Síkbeli nemlineáris rendszerek fázistere</b>	<b>89</b>
4.1.	Homo- és heteroklinikus pályák . . . . .	93
4.2.	Strukturális stabilitás . . . . .	94
4.3.	Poincaré-indexek . . . . .	95
4.4.	Határciklusok . . . . .	105
4.5.	Hopf-bifurkáció . . . . .	112
4.5.1.	Legegyszerűbb alak . . . . .	112
4.5.2.	Általánosabb eset . . . . .	113
<b>5.</b>	<b>3D példák</b>	<b>127</b>
5.1.	Analysis of the Lorenz System . . . . .	127
5.1.1.	Bevezetés . . . . .	127
5.1.2.	Az origóban lévő egyensúlyi helyzet stabilitása . . . . .	128
5.1.3.	A nemtriviális egyensúlyi pontok stabilitása . . . . .	128
5.1.4.	Hopf Bifurcation Analysis . . . . .	129
<b>6.</b>	<b>Mechanikai rendszerek jellemzése és egyensúlyi helyzetei</b>	<b>137</b>
6.1.	A fázisgörbék differenciálegyenlete 1DoF mechanikai rendszerek esetében . . . . .	137
6.1.1.	Liénard-féle trajektória szerkesztés . . . . .	139
6.2.	Mechanikai rendszerek csoportosítása . . . . .	142
6.2.1.	Osztályozás a kényszerek szerint . . . . .	142
6.2.2.	Konzervatív és Hamilton-rendszerek . . . . .	146
6.3.	Mechanikai rendszerek egyensúlya . . . . .	149
6.3.1.	Egyensúly és virtuális teljesítmény . . . . .	149
6.4.	Mechanikai példa . . . . .	153
6.4.1.	Villa (pitchfork) bifurkáció . . . . .	153
6.5.	Ljapunov-féle direkt módszer . . . . .	156
<b>7.</b>	<b>1 DoF konzervatív rendszerek rezgései</b>	<b>167</b>
7.1.	Periodikus megoldások a fázistérképen . . . . .	168
7.1.1.	1 DoF konzervatív rendszerek mozgásegyenletének első integrálja . . . . .	168
7.1.2.	Periodikus megoldás létezésének feltétele . . . . .	169
7.2.	Fázistérbeli ábrázolás . . . . .	170
7.2.1.	Az egyensúlyi helyzetek jellege . . . . .	170
7.2.2.	A fázisgörbék az egyensúlyi pontok közelében . . . . .	172
7.3.	Egy szabadsági fokú konzervatív rendszer periódusidejének becslése . . . . .	174
7.3.1.	Számítás integrálás segítségével . . . . .	174
7.3.2.	Linearizálási módszerek . . . . .	176
7.4.	Poincaré-Lindstedt-féle kis paraméterek módszere . . . . .	180
7.4.1.	Alkalmazás konzervatív rendszerben . . . . .	181
7.4.2.	A Poincaré-Lindstedt-módszer alkalmazása határciklus megtalálására . . . . .	186
<b>8.</b>	<b>Gerjesztett nemlineáris rendszerek</b>	<b>191</b>
8.1.	Lineáris eset: harmonikus erőgerjesztés . . . . .	191
8.2.	Nemlineáris eset: Duffing-oszcillátor . . . . .	197
8.2.1.	Első megközelítés: Poincaré-Lindstedt-féle módszer . . . . .	198

---

8.2.2.	Vizsgálat a rezonancia közelében . . . . .	201
8.2.3.	Vizsgálat a két időskálás módszerrel . . . . .	209
8.2.4.	Stabilitásvizsgálat a két időskálás módszerrel . . . . .	212
<b>9.</b>	<b>Periodikus együtthatójú lineáris rendszerek</b>	<b>217</b>
9.1.	Paraméteres gerjesztés . . . . .	217
9.2.	A periodikus együtthatójú lineáris egyenletek általános tulajdonságai . . . .	220
9.3.	Hill-egyenlet . . . . .	226
9.4.	A Mathieu-egyenlet . . . . .	230
9.4.1.	A stabilitási határok számításának előkészítése . . . . .	230
9.4.2.	$\delta_0 = 0$ esete . . . . .	231
9.4.3.	$\delta_0 = \frac{1}{4}$ . . . . .	233
9.4.4.	Alkalmazás a Duffing-oszcillátor esetében . . . . .	237
<b>10.</b>	<b>Követő módszer</b>	<b>241</b>
10.1.	Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása . . . . .	241
10.2.	Bifurkációs pontok és periodikus megoldások keresése . . . . .	244
10.2.1.	Az egyensúlyi helyzetek bifurkációi . . . . .	244
10.2.2.	Periodikus megoldások követése . . . . .	244
10.2.3.	Nem autonóm rendszerek periodikus megoldásai . . . . .	245
	<b>Felhasznált és ajánlott irodalom</b>	<b>247</b>