

A műszaki rezgéstán alapjai

Dr. Csernák Gábor - Dr. Stépán Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

2012

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638



A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban gépészmérnök hallgatóknak kíván segítséget nyújtani a rezgés tan alapvető összefüggéseinek és módszereinek ismertetésével. Az itt közölt tananyagot a BME Gépészmérnöki Karán oktatott Rezgés tan (korábban Lengés tan) tantárgy tematikája alapján állítottuk össze. A jegyzet írása során a gépészmérnöki gyakorlat számára legfontosabb témakörökre helyeztük a hangsúlyt. Terjedelmi korlátok miatt nem volt lehetőségünk a nap-pali képzésben megszokott mennyiségű szemléltető példa bemutatására, de bízunk abban, hogy mind a hallgatók, mind az esetleg érdeklődő szakemberek haszonnal forgatják majd ezt a kiadványt.

Ezúton mondunk köszönetet Takács Dénesnek, elsősorban az ábrák átgondolt, pontos és esztétikus megrajzolásáért, de azért is, mert a jegyzet írása során mindig számíthattunk hasznos, lényeglátó megjegyzéseire.

Köszönetet mondunk a BME Műszaki Mechanikai Tanszéken dolgozó kollégáinknak is, akik a tantárgy oktatása során folyamatosan segítették a tananyag alakulását, fejlődését.

Budapest, 2012. november 30.

Csernák Gábor, Stépán Gábor

Tartalomjegyzék

Előszó	III
Tartalomjegyzék	VI
1. Bevezetés	1
1.1. A Rezgés tan jelentősége	1
1.2. Ütközés	3
1.2.1. Ütközési modell, alapfeltevések	3
1.2.2. Centrikus ütközés	4
1.2.3. Álló tengely körül elforduló test ütközése	7
1.3. Mechanikai lengőrendszerek	8
1.3.1. A lengőrendszer alapvető elemei	9
1.3.2. A lengőrendszerek osztályozása	14
2. Egy szabadsági fokú lengőrendszerek	15
2.1. Csillapítatlan, szabad harmonikus rezgés	15
2.1.1. Alapfogalmak; a mozgásegyenlet és a mozgástörvény	15
2.1.2. A kezdeti feltételek figyelembevétele	18
2.1.3. A mozgás időbeli lefolyása	20
2.1.4. A nehézségi erő hatása I. – Függőleges irányú rezgés	21
2.2. Linearizálás	24
2.2.1. A nehézségi erő hatása II. – Ingák	24
2.2.2. Linearizálás és rugók	28
2.2.3. Nehézségi erő kettős szerepben	29
2.3. Viszkózus csillapítású szabad rezgés	31
2.3.1. A mozgásegyenlet	33
2.3.2. Gyenge csillapítás	34
2.3.3. Kritikus csillapítás	38
2.3.4. Erős csillapítás	38
2.3.5. Lengéscsillapítók és linearizálás	39
2.4. Coulomb-súrlódással (száraz súrlódással) csillapított szabad rezgések	40
2.4.1. Súrlódási modell	40
2.4.2. A mozgásegyenlet és a mozgástörvény	41
2.5. A másodfajú Lagrange-egyenlet	45
2.5.1. A kényszerek osztályozása	46
2.5.2. A másodfajú Lagrange-egyenlet levezetése	48
2.5.3. Az általános erő meghatározása	51

2.5.4.	A másodfajú Lagrange-egyenlet és a Newton-Euler-módszer	53
2.5.5.	Példák	54
2.6.	Gerjesztett lengőrendszerek	57
2.6.1.	Gerjesztés típusok	57
2.6.2.	Harmonikus gerjesztés analitikus vizsgálata – erőgerjesztés	59
2.6.3.	Útgerjesztés	64
2.6.4.	Kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés	68
2.6.5.	Rezgésszigetelés	70
3.	Több szabadsági fokú lengőrendszerek	75
3.1.	Mátrix együtthatós differenciálegyenlet	76
3.1.1.	A kinetikus energia és az általános tömegmátrix	76
3.1.2.	A potenciális energia és az általános merevségi mátrix	76
3.1.3.	A disszipatív potenciál és az általános csillapítási mátrix	77
3.1.4.	A mátrix együtthatós differenciálegyenlet felírása	77
3.2.	Csillapítatlan szabad rezgés	77
3.2.1.	Sajátkörfrekvenciák és lengésképek	77
3.2.2.	Példák a sajátkörfrekvenciák és lengésképek meghatározására	80
3.3.	Gerjesztett rezgések	87
3.3.1.	A stacionárius megoldás meghatározása	87
3.3.2.	Erő- vagy nyomatékgerjesztett rendszerek stacionárius megoldása	88
3.3.3.	A mátrix együtthatós differenciálegyenlet időfüggő kényszerek esetén	92
3.4.	Rudak hajlító lengései	95
	Tárgymutató	98
	Felhasznált és ajánlott irodalom	101

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A Rezgés tan jelentősége

A Rezgés tan tárgy keretében tanultakra több más tantárgy is épít. A rezgés tan – mint tudomány¹ – jelentősége azonban messze túlmutat a mechanikán. Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan területet, ahol alkalmazhatóak a rezgés tan eredményei:

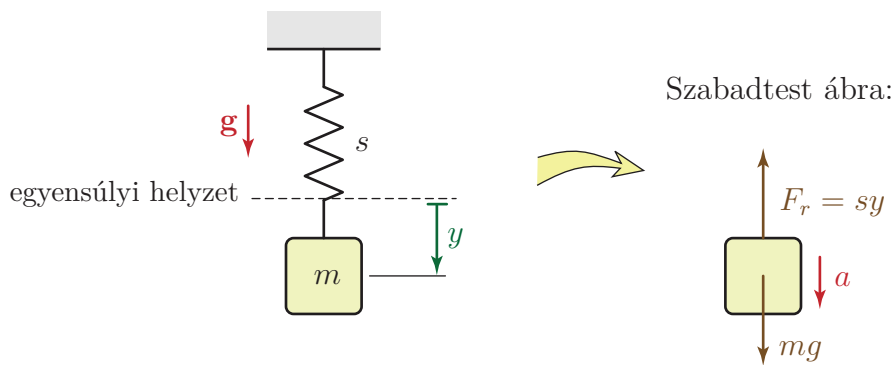
- Az elektromágneses rezgőköröket ugyanolyan jellegű differenciálegyenletek írják le, mint a mechanikai lengőrendszereket.
- A lineáris szabályozások (pl. PD szabályozás) működése is tárgyalható a rezgés tan megközelítési módját használva.
- A hangok forrása is rezgés.
- A molekulák, kristályok első közelítésben modellezhetők rugókkal összekapcsolt tömegpontokként – ez a modell többek között a fajhő számítására is használható.

Természetesen a rezgés tan a gépészmérnöki gyakorlatban is kiemelt fontosságú:

- A legkézenfekvőbb alkalmazási terület a rugalmas felfüggesztések, ezen belül is a járművek rezgéseinek dinamikai vizsgálata.
- Rezgés tan ismeretek a szilárdsági méretezéshez is szükségesek fáradásos igénybevételek esetén.
- A gépalapozások tervezése, precíziós műszerek, egyéb szerkezetek rezgés szigetelése is egyszerű rezgés tan modelleken alapul.
- A gépek karbantartása, ellenőrzése is történhet ún. rezgés felügyelet alapján – ennek egyszerű hétköznapi példája, hogy a meghibásodás gyakran felismerhető a gép hangjának megváltozásáról.

A Rezgés tan tananyag elsajátításához szilárdan megalapozott előismeretek szükségesek. Tekintsük át egy egyszerű példán keresztül, hogy a mechanika és a matematika mely eredményeire támaszkodunk a lengőrendszerek vizsgálata során.

¹Itt és a következőkben a tantárgy nevét nagy, a tudományterület nevét kis kezdőbetűvel írjuk.



1.1. ábra. Egy egyszerű lengőrendszer.

Az 1.1 ábrán egy rugóra függesztett hasáb látható. Ha kísérleteket végzünk egy ilyen mechanikai rendszerrel, a következőket állapíthatjuk meg: 1) Található egy egyensúlyi helyzet, melyben a rendszer mozdulatlan, a rugó pedig megnyúlik a hasáb súlya következtében. 2) Ez az egyensúlyi helyzet stabil, hiszen akár felfelé, akár lefelé térítjük ki a testet, a rá ható erők eredője mindig a kitéréssel ellentétes értelmű, az egyensúlyi helyzet felé mutat. 3) Ha kitérített helyzetéből elengedjük a lengőrendszert vagy megütjük a hasábot, akkor a kialakuló rezgés a stabil egyensúlyi helyzet körül szimmetrikusan történik.

A fenti megfigyelések rávilágítanak arra, hogy a vázolt lengőrendszer vizsgálatához a mechanika mindhárom – korábban tanult – részterületének ismerete szükséges:

- a stabil egyensúlyi helyzet meghatározásához a *Statika* keretében tanultakat,
- a rugalmas elem deformációja és az azt okozó erő közötti kapcsolat (rugómerevség) meghatározásához a *Szilárdságtan* keretében tanultakat alkalmazzuk,
- a mozgás leírásához pedig a *dinamika* alaptételét használjuk.

A rezgéstani feladatok megoldása során a cél nem csupán a mozgás jellemzőinek egy adott pillanatban való meghatározása (ezzel foglalkoztunk a Dinamika keretében), hanem a mozgás *folyamatának* leírása alkalmas függvényekkel. Ehhez a matematika számos területén is járatosnak kell lenni:

- A rezgéstanban a dinamika alaptételét *differenciálegyenlet* alakjában írjuk fel, ezt nevezük *mozgásegyenletnek*.
- A mozgásegyenlet megoldása a *mozgástörvény*. Ún. *harmonikus rezgések* esetén (ha lineáris a differenciálegyenlet), *exponenciális- és trigonometrikus függvényekkel* írható le a mozgás.
- A mozgásegyenlet felírása néha elég bonyolult feladat a dinamika alaptétele segítségével – gondoljunk például a Dinamika tárgy keretében vizsgált forgattyús mechanizmusra. Az ún. *másodfajú Lagrange-egyenlet* megkönnyíti az egyenlet felírását. Ennek alkalmazásához azonban szükséges a *kinematika* ismerete, a *kinetikus és potenciális energia* megfelelő kifejezése és a *tehetetlenségi nyomaték* számítása, valamint helyesen kell alkalmazni a *differenciálási szabályokat* (pl. összetett függvény deriválása).

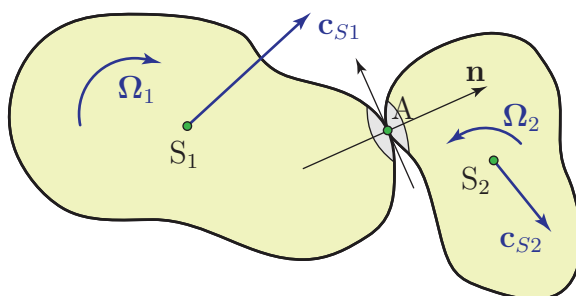
A fenti példában láthattuk, hogy mozgás (rezgés) csak akkor jön létre, ha kitérítjük a rendszert a stabil egyensúlyi helyzetéből és/vagy kezdeti sebességet adunk a hasábnak. Ez utóbbi gyakran ütközéssel érhető el.

1.2. Ütközés

1.2.1. Ütközési modell, alapfeltevések

Az ütközés során megváltozik az ütköző testek sebességállapota. A legegyszerűbb modell – amit ebben a fejezetben ismertetünk – nem foglalkozik az ütközés időtartama alatt lejátszódó folyamatokkal, csak egy számítási algoritmust ad, mellyel az ütközés előtti sebességállapot és az ütközést jellemző C_R ütközési tényező ismeretében kiszámítható az ütközésben résztvevő testek ütközés utáni sebességállapota. Csak két test síkbeli ütközésével foglalkozunk, kizárjuk azt az esetet, amikor három vagy több test egyszerre vesz részt az ütközésben.

A továbbiakban $[\Omega_1, \mathbf{c}_{S1}]_{S_1}$ és $[\Omega_2, \mathbf{c}_{S2}]_{S_2}$ a két test ütközés előtti, míg $[\omega_1, \mathbf{v}_{S1}]_{S_1}$ és $[\omega_2, \mathbf{v}_{S2}]_{S_2}$ a testek ütközés utáni sebességállapotát jellemző vektorkettőst jelöli, ahol S_1 és S_2 a két test súlypontja. Akkor jöhet létre ütközés, ha a két test érintkezik és a testek érintkezési pontjainak a sebessége eltérő.



1.2. ábra. Két test ütközése. Az ábrán a testek ütközés előtti sebességállapotát ábrázoltuk; \mathbf{n} a közös érintőre merőleges ütközési normálist jelöli.

A modell felállítása során az alábbi feltevésekből indulunk ki:

1. Az ütközés olyan rövid idő alatt játszódik le, hogy a testek közben nem mozdulnak el (három vagy több test együttes ütközését is ezért zárhatjuk ki).
2. Az ütközés során olyan nagy erők lépnek fel, hogy közben minden más erő elhanyagolható. Kivételt képezhetnek a test valamely pontját a helyálló környezethez rögzítő kényszerekben ébredő reakcióerők.
3. Az ütköző testek az érintkezési pont környékén (lokálisan) deformálódnak. Ettől a ponttól távolabb már elhanyagolhatónak tekintjük a deformációkat és ezért alkalmazhatjuk a sebességállapot számítására a merev testek kinematikája keretében tanult összefüggéseket.
4. Az ütközést a C_R *ütközési tényezővel* jellemezzük, amiből következtetni lehet az ütközés során bekövetkező mechanikai energiaveszteségre. Az ütközési tényező a testek anyagi tulajdonságaitól függően a következő értékeket veheti fel:

- rugalmas testek: $C_R = 1$, tökéletesen rugalmas ütközés,
- képlékeny testek: $C_R = 0$, tökéletesen rugalmatlan ütközés,
- részben rugalmasan, részben képlékenyen deformálódó testek: $0 < C_R < 1$.

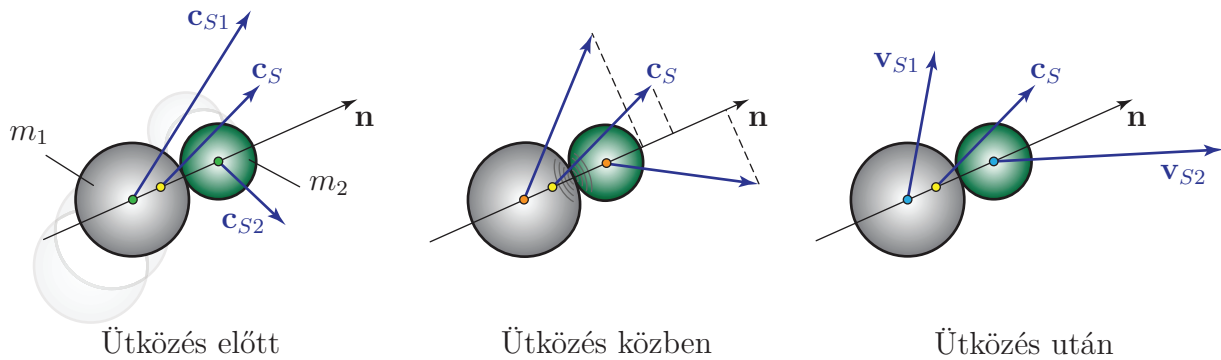
5. Az érintkezési pontban nincs súrlódás, a közös érintő síkkal párhuzamosan tehát nem adódik át erő, csak az érintő síkra merőleges \mathbf{n} ütközési normális irányában.

Az ütközés utáni sebességállapot számítási algoritmusai különböző ütközés típusok esetén más és más lehet. Fontos, hogy még egymással ütköző testek esetében is előfordulhat, hogy a két test szempontjából különböző típusú az ütközés! A legegyszerűbb ütközés típus a *centrikus ütközés*, az összes többi ütközési problémát is erre vezetjük vissza.

1.2.2. Centrikus ütközés

Egy test szempontjából centrikus az ütközés, ha a test egyik pontja sem rögzített és a súlypontja rajta van az ütközési normális hatásvonalán.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor mindkét test szempontjából centrikus az ütközés. Ilyen pl. két szabadon mozgó homogén golyó vagy korong ütközése, amit az 1.3 ábra szemléltet.



1.3. ábra. Két golyó ütközése. Csak az \mathbf{n} irányú sebességkomponensek változnak, a közös súlypont \mathbf{c}_S sebessége viszont állandó marad.

Mivel az ütközés erejéhez képest minden más erő elhanyagolható, az ütközés ereje pedig belső erő, két test centrikus ütközése során a teljes impulzus (lendület) megmarad:

$$m_1 \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2} = m_1 \mathbf{c}_{S1} + m_2 \mathbf{c}_{S2}. \quad (1.1)$$

A két testből álló rendszer *közös* súlypontjának helyvektora definíció szerint

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2}}{m_1 + m_2},$$

tehát a közös súlypont sebessége az ütközés előtt, illetve az ütközés után ennek idő szerinti differenciálásával kapható:

$$\mathbf{c}_S = \frac{m_1 \mathbf{c}_{S1} + m_2 \mathbf{c}_{S2}}{m_1 + m_2} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_S = \frac{m_1 \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2}}{m_1 + m_2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{c}_S(m_1 + m_2) = m_1 \mathbf{c}_{S1} + m_2 \mathbf{c}_{S2} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_S(m_1 + m_2) = m_1 \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2}. \quad (1.2)$$

Tehát (1.1) miatt a két test közös súlypontjának a sebessége nem változik az ütközés során: $\mathbf{c}_S = \mathbf{v}_S$.

Az ütköző testekre ható erő nem ismert. Feltéve, hogy ennek az erőnek a nagysága egy $F(t)$ függvény szerint változik és az ütközés a t_0 pillanattól a $t_0 + \tau$ pillanatig tart, az egyes testek impulzusának megváltozása – ami szintén párhuzamos az \mathbf{n} ütközési normálissal, az 5. feltevés miatt – az *erőimpulzussal* vagy más néven *erőlökéssel* fejezhető ki:

$$\Delta \mathbf{I}_1 \equiv m_1 \mathbf{v}_{S1} - m_1 \mathbf{c}_{S1} = -\mathbf{n} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F dt \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{I}_2 \equiv m_2 \mathbf{v}_{S2} - m_2 \mathbf{c}_{S2} = \mathbf{n} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F dt. \quad (1.3)$$

A fenti egyenlet felírása során feltételeztük, hogy az \mathbf{n} ütközési normális az 1-es test felől a 2-es test felé mutat. Természetesen fordított irányban is felvehető az ütközési normális; az \mathbf{n} vektor tulajdonképpen a sebességek számításához használt koordináta-tengelyt definiálja. Az ütközés erejének hatásvonala egybeesik az \mathbf{n} ütközési normális hatásvonalával, ezért a testek súlypontjainak \mathbf{n} irányú sebességkomponensei megváltoznak. Centrikus ütközés esetén a súlypontok rajta vannak \mathbf{n} hatásvonalán, tehát az ütközés során fellépő erő nyomatéka mindkét test súlypontjára nulla. Mivel a modellben elhanyagolhatónak tekintjük az ütközés ideje alatt ható más erőket, a testek perdülete megmarad, szögsebességük nem változik: $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_2$.

A kísérleti tapasztalatok szerint a a súlypontok sebességeinek \mathbf{n} irányú komponenseiből képzett

$$C_R = \frac{v_{Sin} - v_{Sn}}{v_{Sn} - c_{Sin}}, \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

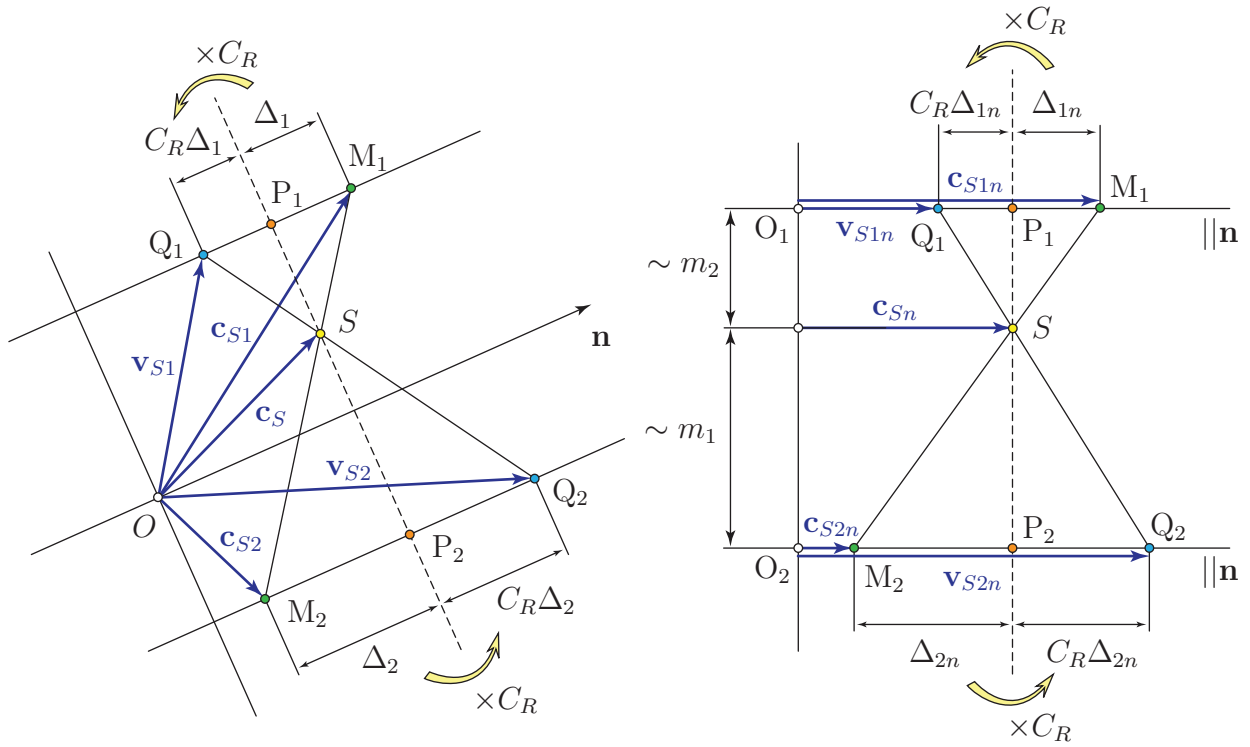
ütközési tényező egy adott anyagpárra mindig közelítőleg ugyanakkora értékű, bármelyik test sebességeit helyettesítjük is be. Itt v_{Sin} és c_{Sin} az S_i , $i = 1, 2$ súlypont sebességének \mathbf{n} irányú komponensét jelöli, míg $v_{Sn} = c_{Sn}$ a közös súlypont sebességének \mathbf{n} irányú komponense. Tehát az ütközési tényezőnek egy adott anyagpárra történő kísérleti meghatározása után az ilyen anyagokból készült testek ütközés utáni sebessége az alábbi képletekkel számítható:

$$\begin{aligned} v_{S1n} &= v_{Sn} + C_R(v_{Sn} - c_{S1n}) \quad \text{és} \\ v_{S2n} &= v_{Sn} + C_R(v_{Sn} - c_{S2n}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

A fenti képletek megjegyzése helyett javasolt egy egyszerűen áttekinthető grafikus szerkesztési eljárás alkalmazása, az ún. *Maxwell-ábra* rajzolása.

A szerkesztés lépései az 1.4 ábra alapján a következők:

- Felvesszük az \mathbf{n} ütközési normálist és egy O pontjából (mint origóból) felmérjük a súlypontok ütközés előtti sebességvektorait: \mathbf{c}_{S1} , \mathbf{c}_{S2} . A vektorok végpontjait M_1 -gyel és M_2 -vel jelöljük.
- (1.2) alapján kiszámítjuk a közös súlypont $\mathbf{c}_S \equiv \mathbf{v}_S$ sebességét és szintén berajzoljuk az ábrába. A vektor végpontja az S pont.
- \mathbf{c}_{S1} és \mathbf{c}_{S2} vektorok M_1 és M_2 végpontjain át párhuzamosokat húzunk \mathbf{n} -nel, az S ponton keresztül pedig merőlegest állítunk \mathbf{n} -re. A behúzott egyenesek metszéspontjait jelöljük P_1 -gyel és P_2 -vel.



1.4. ábra. Maxwell-ábra és egyszerűsített Maxwell-ábra szerkesztése.

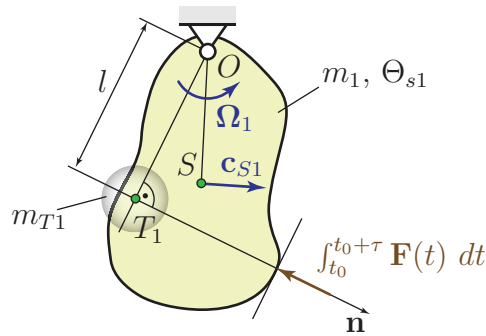
- Az ütközés során a sebességvektorok \mathbf{n} -re merőleges irányú komponensei nem változhatnak, tehát az ütközés utáni sebességvektorok végpontjai is rajta lesznek az \mathbf{n} -nel párhuzamos egyeneseken, a Q_1 és Q_2 pontokban. Mivel $P_1M_1 = v_{Sn} - c_{S1n}$ és $Q_1P_1 = v_{S1n} - v_{Sn}$, az ütközési tényező értelmezése alapján $Q_1P_1 = C_R P_1M_1$ és $Q_2P_2 = C_R P_2M_2$, tehát az ütközés utáni sebességvektorok végpontjai meghatározhatók.

A szerkesztés fizikai tartalma a következő módon szemléltethető: a testek az ütközés első szakaszában benyomódnak. Ez addig tart, amíg el nem éri a közös súlypont sebességét ($P_{1,2}$ pontok). Az ütközés második szakasza során a benyomódott testek részben visszanyerik eredeti alakjukat. A testek között az ütközés teljes időtartama alatt csak nyomóerő hathat. Ebből következik, hogy a sebességük továbbra is ugyanolyan értelemben változik (nő vagy csökken) mint az ütközés első szakaszában, de a nem tökéletesen rugalmas deformáció miatt már nem következik be ugyanakkora sebességváltozás, csak annak a $C_R \leq 1$ -szerese.

Mivel a sebességvektoroknak csak az \mathbf{n} irányú komponensei változnak, gyakran csak egy egyszerűsített Maxwell-ábrát rajzolnak. Ehhez az \mathbf{n} ütközési normálissal párhuzamosan két segédegyenest kell rajzolni, melyeken a két test megfelelő sebességkomponenseit tüntetjük fel. A szerkesztés lépései megegyeznek az általános eset lépéseivel. Ha a két segédegyenes \mathbf{n} -től mért távolsága arányos az m_1 és m_2 tömegekkel és a c_{S1n} , v_{S1n} sebességeket az m_2 -vel (!) arányos távolságban felvett egyenesre, a c_{S2n} , v_{S2n} sebességeket pedig az m_1 -gyel arányos távolságban felvett egyenesre rajzoljuk fel, akkor az ütközés előtti- és utáni sebességvektorok végpontjait összekötő egyenesek éppen a közös súlypont sebességét megadó vektor S végpontjában metsződnek.

1.2.3. Álló tengely körül elforduló test ütközése

Számos ütközési problémában az egyik – vagy mindkettő – test egy rögzített tengely körül képes elfordulni. Ebben az esetben nem alkalmazható közvetlenül az (1.5) képlet, hiszen az ütközés során a csuklóban is az ütközési erőnek megfelelő nagyságrendű erő alakulhat ki, ami nem hagyható figyelmen kívül. Ezt az esetet is szeretnénk visszavezetni centrikus ütközésre. Tegyük fel, hogy a vizsgált test az O csukló körül tud elfordulni, ütközés előtti szögsebessége Ω_1 – ez meghatározza sebességállapotát, hiszen $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$, az O ponton átmenő, Ω_1 -gyel párhuzamos tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka pedig Θ_{o1} . Célunk az ütközés utáni szögsebesség meghatározása.



1.5. ábra. Álló tengely körül elforduló test ütközése.

Ha az ütközésben résztvevő másik testről az 1.5 ábrának megfelelően $\mathbf{F}(t)$ erő adódik át az ütközés τ ideje alatt, akkor a perdülettétel miatt az O pontra számított perdület megváltozása az $\mathbf{F}(t)$ erő O ponton átmenő tengelyre számított nyomatékának az idő szerinti integrálja

$$\Delta \Pi_{o1} \equiv \Theta_{o1} \omega_1 - \Theta_{o1} \Omega_1 = -l \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt, \quad (1.6)$$

ahol l az $\mathbf{F}(t)$ erő hatásvonalának (azaz az \mathbf{n} ütközési normálisnak) az O csuklótól mért távolsága. A levezetés egyszerűsítése érdekében vegyünk fel egy T_1 -gyel jelölt, ún. *ütközési talppontot*, melyet az O pont \mathbf{n} -re történő merőleges vetítésével kapunk, tehát $OT_1 = l$. Az (1.6) egyenlet átírható a következő alakba:

$$\frac{\Theta_{o1}}{l^2} (l\omega_1) - \frac{\Theta_{o1}}{l^2} (l\Omega_1) = - \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt. \quad (1.7)$$

A zárójeles kifejezések a talppont ütközés előtti és utáni sebességét adják meg, hiszen $c_{T1} = l\Omega_1$ és $v_{T1} = l\omega_1$. Az

$$m_{T1} = \frac{\Theta_{o1}}{l^2}$$

mennyiséget *redukált tömegnek* nevezzük. Így az

$$m_{T1} v_{T1} - m_{T1} c_{T1} = - \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt$$

egyenletre jutunk, ami ugyanolyan alakú, mint a centrikus ütközésre kapott (1.3) egyenletek. Következésképpen, az álló tengely körül elforduló testet egy T_1 pontban lévő, m_{T1} tömegű pontszerű testtel helyettesíthetjük, ami már centrikusan ütközik. A fentiek alapján a feladat megoldásának algoritmusa a következő:

1. A T_1 talppont meghatározása: az O tengelytől merőlegest bocsátunk az \mathbf{n} ütközési normálisra.
2. Az $m_{T_1} = \Theta_{o1}/l^2$ redukált tömeg meghatározása, ahol l a talppont távolsága a tengelytől.
3. A talppont ütközés előtti sebességének meghatározása: $c_{T_1} = l\Omega_1$.
4. Ha a másik test is álló tengely körül tud elfordulni, akkor értelemszerűen meg kell határozni a megfelelő T_2 talppontját, m_{T_2} redukált tömegét és a c_{T_2} sebességet.
5. Most már visszavezettük a feladatot két m_{T_1} illetve m_{T_2} tömegű, \mathbf{c}_{T_1} illetve \mathbf{c}_{T_2} sebességű test centrikus ütközésére. A közös súlypont sebességét a

$$\mathbf{c}_S = \frac{m_{T_1}\mathbf{c}_{T_1} + m_{T_2}\mathbf{c}_{T_2}}{m_{T_1} + m_{T_2}}$$

képlet segítségével határozzuk meg.

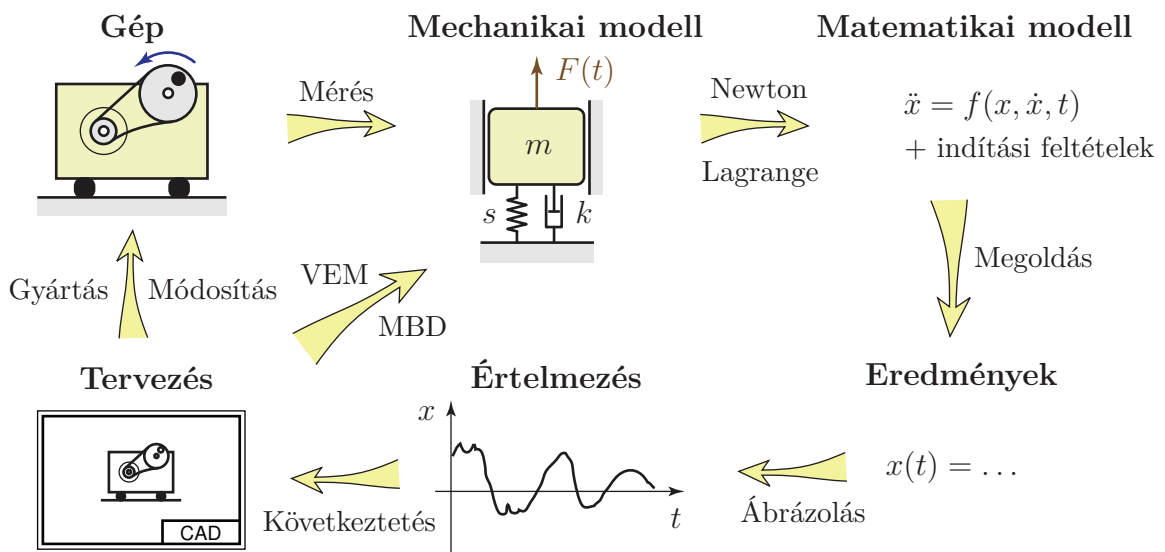
6. A centrikus ütközési feladat megoldása Maxwell-ábrával vagy az (1.5) képlettel. Eredményként megkapjuk a talppont ütközés utáni \mathbf{v}_{T_1} sebességét.
7. Az ütközés utáni szögsebesség számítása: $\omega_1 = v_{T_1}/l$.

A további ütközési típusokkal – például az excentrikus ütközéssel és a hirtelen rögzítéssel – ebben a jegyzetben nem foglalkozunk, ezek tárgyalása megtalálható a szakirodalomban [1, 11].

1.3. Mechanikai lengőrendszerek

A fizikai világ bonyolultsága miatt a jelenségek leírásához modelleket kell felállítanunk, melyek a vizsgálataink szempontjából lényeges tulajdonságokat ragadják meg. A mechanika korábban vizsgált fejezeteiben számos modellt ismertünk meg, pl. a rúd-, lemez-, anyagi pont- és merev test modellt. A rezgésstanban talán még absztraktabbak a modellek, mint a mechanika más területein, ezért általában a mozgásegyenlet felírása – azaz a modell paramétereinek a meghatározása – a legnehezebb a feladatok megoldása során. A mozgásegyenlet megoldása már számos – a gyakorlatban fontos – modell esetében egyszerű végképletekkel megadható. A fentiek alapján a rezgéstani feladatok mérnöki megoldása az alábbi lépésekben történik:

1. Az adott gép, szerkezet mechanikai modelljének felállítása.
2. Matematikai modell felállítása, azaz a mozgásegyenlet felírása differenciálegyenlet alakjában a Newton-Euler módszer vagy a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével (lásd 2.5 fejezet).
3. A mozgásegyenlet megoldása a kezdeti (indítási) feltételeknek megfelelően.
4. A megoldás értelmezése, ábrázolása.
5. Következtetések levonása, a vizsgált gép (vagy a terv) módosítása.



1.6. ábra. Rezgéstani feladatok mérnöki megoldásának folyamata. VEM: végelem módszer, MBD: multi-body dynamics (töbttest-dinamikai) programcsomag.

1.3.1. A lengőrendszer alapvető elemei

A modellezés során jelentős egyszerűsítést jelent, ha a vizsgált szerkezet szétválasztható merev, tehetetlen testekre és rugalmas, de elhanyagolható tömegű részekre. E tárgy keretében általában alkalmazható ez az egyszerűsítés. Ennek értelmében a modellek egyes elemeit csak a lengőrendszerben betöltött szerepüknek megfelelő paraméterekkel jellemezzük, pl. a rugalmas elemeket tömeg nélkülinek, a tehetetlen elemeket pedig tökéletesen merevnek tekintjük. A valóságban természetesen egy adott alkatrész több szerepet is betölthet: figyelembe vehetjük a tömegét, rugalmasságát és belső csillapítását is, de ezeket a tulajdonságait külön-külön elemekkel vesszük figyelembe a modellben.

Tehetetlen elemek

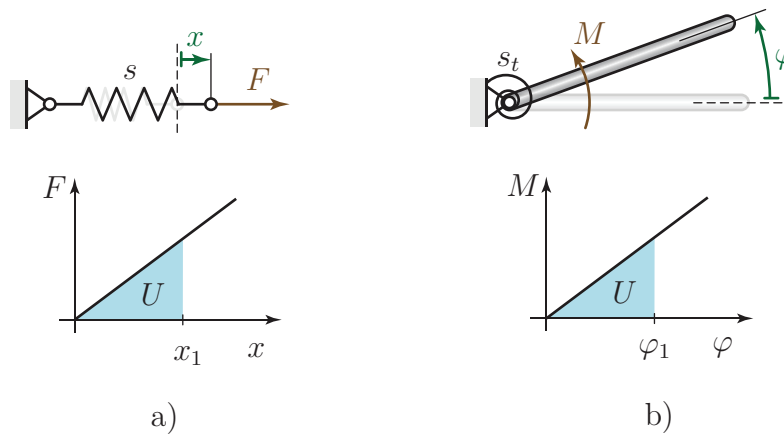
- Haladó mozgás esetén a tehetetlen elem mértékadó paramétere a tömeg: m ,
- forgó mozgás esetén pedig a tehetetlenségi nyomaték: Θ_s .

Rugalmas elemek

A rugalmas elemeket merevségükkel jellemezzük, ami a deformáció és a ható erő (vagy nyomaték) közötti kapcsolatot adja meg. A rugalmas elemek az alábbi módon csoportosíthatók.

1. Rugók

- 1.a) **Csavarrugók.** Egy egyik végén rögzített csavarrugót F erővel terhelve, a rugó egyensúlyi x megnyúlása (vagy összenyomódása) és a ható erő között közel lineáris kapcsolatot találunk.



1.7. ábra. Csavarrugók (a) és torziós rugók (b) ábrázolása és karakterisztikája.

Az $F(x)$ függvény meredeksége kis deformációk esetén² állandó érték, melyet *rugómerevségnek* nevezünk:

$$s \equiv \frac{F}{x} = \text{állandó}. \quad (1.8)$$

A rugómerevség azt adja meg, hogy egységnyi hosszváltozás előidézéséhez mekkora erő szükséges. Mértékegysége N/m. Gyakorlati szempontból fontos a rugómerevség reciproka, az ún. *rugóállandó* is:

$$c \equiv \frac{1}{s}.$$

A rugóállandó – melynek mértékegysége m/N – azt adja meg, hogy egységnyi erő mekkora deformációt okoz.

A fentiek alapján $F = sx$ és $F = x/c$ a rugó megnyújtásához szükséges erő, de a rugó által kifejtett erő (rugóerő) a kitéréssel ellentétes, azaz $F_r = -sx$. Szabadtest ábrákon a könnyebb érthetőség kedvéért a negatív előjel kiírása helyett megfelelő irányban felvett, $F_r = sx$ rugóerőt tüntetünk fel.

A csavarrugóban felhalmozott *potenciális energia* (*rugalmas energia, alakváltozási energia*) x_1 megnyújtás vagy összenyomás hatására

$$U = \int_0^{x_1} sx \, dx = \frac{1}{2}sx_1^2 = \frac{x_1^2}{2c}. \quad (1.9)$$

1.b) **Torziós (spirál-) rugók.** A spirálrugókat az s_t *torziós rugómerevséggel* jellemezzük, melynek mértékegysége Nm/rad és az egységnyi szögelfordulás előidézéséhez szükséges nyomatékot adja meg. Bevezethető a $c_t = 1/s_t$ *torziós rugóállandó* is, rad/Nm mértékegységgel. A rugó által kifejtett nyomaték φ szögelfordulás esetén $M_r = -s_t\varphi$.

A torziós rugóban felhalmozott potenciális (rugalmas, alakváltozási) energia

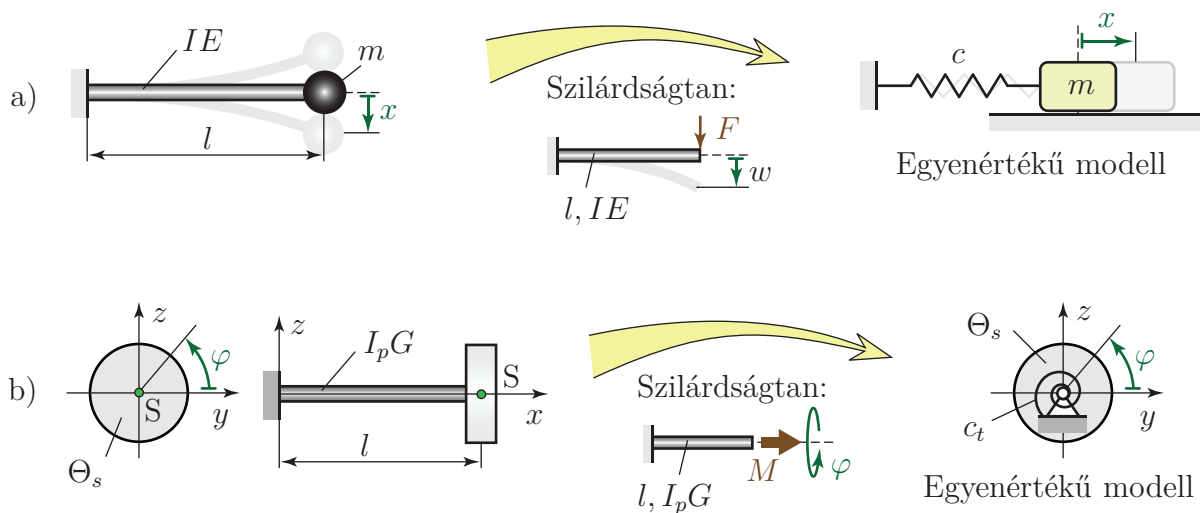
$$U = \int_0^{\varphi_1} s_t\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}s_t\varphi_1^2 = \frac{\varphi_1^2}{2c_t}. \quad (1.10)$$

²Csak kis deformációk esetén tehetjük fel, hogy az anyag lineárisan rugalmas [12].

A tengelyek, rudak, lemezek – vagy bármilyen alkatrész – rugalmasságukból eredően szintén viselkedhetnek rugóként. Ennek a jegyzetnek a keretében csak a rugalmas rudakkal foglalkozunk.

2. Rugalmas tengelyek, rudak, mint rugók

2.a) **Hajlító lengést végző rúd.** A rúd befogásától, alakjától és a terhelés helyétől függően végtelen sokféle eset lehetséges, de ezek lényegében azonos módon kezelhetők. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egyik végén befogott egyenes, prizmatikus (teljes hosszában azonos keresztmetszetű) homogén rúd másik végére m tömegű pontszerű testet rögzítünk az 1.8/a ábrának megfelelően. A rúd hossza



1.8. ábra. Rugalmas rudakat tartalmazó lengőrendszerek egyenértékű modelljei.

l , hajlítómerevsége IE . A hajlító lengések vizsgálata során a rúd tömegét első közelítésben elhanyagoljuk. Kis kitérések esetén az m tömegű test jó közelítéssel a rúd egyensúlyi helyzetére merőlegesen mozog.

A lengőrendszerhez található egy *egyenértékű modell*, melyben a rudat megfelelő merevségű csavarrugóval helyettesítjük. Az egyenértékű modell rugójának paraméterét a rugóállandó definíciója alapján határozhatjuk meg. A rugóállandó az egységnyi erőhöz tartozó elmozdulást adja meg, tehát meg kell határoznunk, hogy a rúd végére ható egységnyi erő hatására mekkora elmozdulás következik be. Ezt pl. a szilárdságtan munkatételei (Betti- és Castigliano-tétel), a rugalmas szál differenciálegyenlete vagy az ún. járulékképletek segítségével számíthatjuk ki. A vizsgált példában a lehajlás [12]:

$$w = \frac{Fl^3}{3IE},$$

tehát egységnyi erővel

$$c = \frac{l^3}{3IE} \quad \text{amiből} \quad s = \frac{3IE}{l^3}. \quad (1.11)$$

- 2.b) **Csavaró (torziós) lengést végző rúd.** Ez az eset is az előzőhöz hasonlóan tárgyalható, de most a rúd végének egységnyi nyomaték hatására történő elfordulása adja meg a torziós rugóállandót és annak a reciproka a torziós rugómerevség. Pl. az 1.8/b ábrán látható, l hosszúságú, $I_p G$ csavarómerevségű, egyik végén befogott rúd esetén a rúd szabad végének elfordulási szöge M csavarónyomaték hatására [12]:

$$\varphi = \frac{Ml}{I_p G},$$

amiből egységnyi nyomatékat véve adódik a torziós rugóállandó- és merevség:

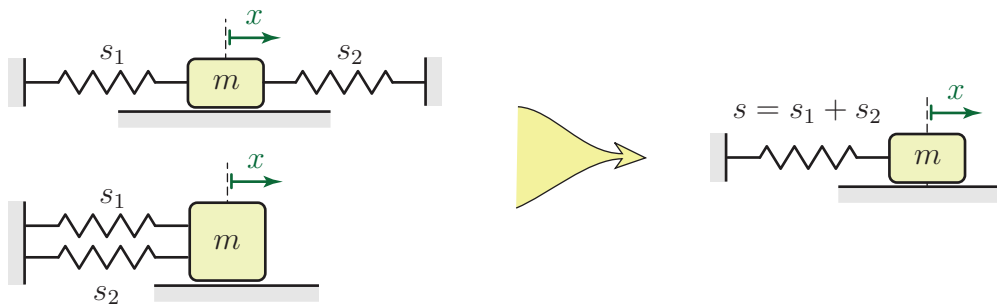
$$c_t = \frac{l}{I_p G} \quad \text{és} \quad s_t = \frac{I_p G}{l}. \quad (1.12)$$

Természetesen számos egyéb elrendezés is elképzelhető, minden esetben az egységnyi erő vagy nyomaték hatására bekövetkező elmozdulás vagy elfordulás számértéke adja meg a rugóállandót. Számos speciális eset tárgyalása megtalálható a szakirodalomban [12]. Itt jegyezzük meg, hogy több szabadsági fokú lengőrendszerek esetében több különböző helyen ható, egységnyi erőhatás következtében bekövetkező elmozdulás kiszámítására lehet szükség. Az így kapott elmozdulások az ún. *rugóállandó mátrix* elemeinek a számértékét adják meg, amiről a 3.4 fejezetben lesz szó.

Rugókapcsolások

Előfordul, hogy egy lengőrendszerben több rugó össze van kapcsolva, de az egyes rugók megnyúlása, valamint a bennük ébredő erő érdektelen, csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan hat a rugókból álló rendszer a rendszer más elemeire. Ebből a szempontból az összekapcsolt rugók egyenértékűen helyettesíthetők egyetlen rugóval, melynek eredő rugómerevsége meghatározható. Az alábbiakban két speciális rugókapcsolást vizsgálunk meg.

- a) **Rugók párhuzamos kapcsolása.** Ebben az esetben a rugók deformációja megegyezik, ilyen eseteket mutat az 1.9 ábra.



1.9. ábra. Rugók párhuzamos kapcsolása és az egyenértékű modell.

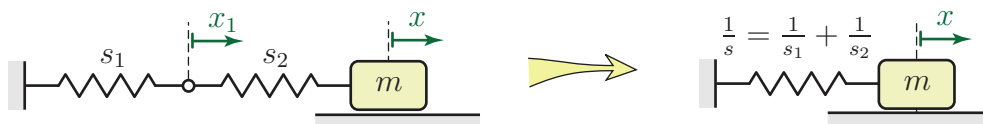
Az ábra példáiban a hasáb x kitérése esetén mindkét rugónak ugyanekkora a deformációja. Tehát a hasábra ható eredő erő $F = s_1 x + s_2 x$. Ha a két rugót egyetlen, s merevségű rugóval helyettesítjük, az erő értéke nem változhat, így $F \equiv s x = (s_1 + s_2) x$.

Következésképpen, párhuzamos kapcsolás esetén az eredő rugómerevség az egyes merevségek összege:

$$s = s_1 + s_2. \quad (1.13)$$

Ez az összefüggés tetszőleges n számú rugó esetére is általánosítható $s = \sum_{i=1}^n s_i$ alakban.

- b) **Rugók soros kapcsolása.** Soros kapcsolás esetén a rugókban ébredő erő egyezik meg egymással.



1.10. ábra. Rugók soros kapcsolása és az egyenértékű modell.

Tegyük fel, hogy az 1.10 ábra szerint a hasáb elmozdulása x , míg az s_1 rugó megnyúlása x_1 . Ekkor az s_2 rugó megnyúlása $x_2 = x - x_1$. Ha a két rugóban ugyanakkora erő ébred, akkor

$$F \equiv s_1 x_1 = s_2 (x - x_1),$$

amiből x_1 kifejezhető:

$$x_1 = \frac{s_2}{s_1 + s_2} x. \quad (1.14)$$

Ha helyettesítjük a sorosan kapcsolt rugókat egyetlen s merevségű rugóval, annak ugyanakkora $F = s_1 x_1$ erő hatására x deformációt kell szenvednie, ezért $F = sx$ miatt

$$sx = s_1 x_1.$$

x_1 fenti kifejezését behelyettesítve és x -szel egyszerűsítve kapjuk a soros kapcsolás esetén érvényes eredő rugómerevség kifejezését:

$$s = \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}. \quad (1.15)$$

Ezt a kifejezést átírhatjuk a rugóállandó segítségével:

$$c \equiv \frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \equiv c_1 + c_2. \quad (1.16)$$

Általánosan is igaz, hogy tetszőleges n számú sorosan kapcsolt rugó eredő rugóállandója az egyes rugóállandók összege: $c = \sum_{i=1}^n c_i$.

Természetesen e két eset kombinációja is előfordulhat, illetve lehetséges olyan kapcsolás is, ami se nem soros, se nem párhuzamos. Ezekben az esetekben általában található valamilyen geometriai összefüggés a rugók megnyúlásai között. Ezt kihasználva abból a követelményből vezethető le az eredő rugómerevség, hogy az eredeti és a helyettesítő rendszerben ugyanakkora legyen a rugókban felhalmozott potenciális energia. Például n rugóból álló rendszerrel $U_{\text{eredeti}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i x_i^2$ és $U_{\text{helyettesítő}} = \frac{1}{2} s x^2$. Ha az (1.14) képlethez hasonlóan kifejezhetők az x_i megnyúlások az x koordinátával, akkor az s rugómerevség az $U_{\text{eredeti}} = U_{\text{helyettesítő}}$ egyenletből számítható. Ezt a technikát – kissé módosítva – a másodfajú Lagrange-egyenlet használata során fogjuk alkalmazni.

1.3.2. A lengőrendszerek osztályozása

A lengőrendszereket – pontosabban a modelleket – több szempont szerint osztályozhatjuk. Egy lengőrendszer lehet

több szabadsági fokú	\longleftrightarrow	egy szabadsági fokú
csillapított	\longleftrightarrow	csillapítatlan
gerjesztett	\longleftrightarrow	szabad
nemlineáris	\longleftrightarrow	lineáris.

Ebben a jegyzetben csak lineáris lengőrendszereket fogunk vizsgálni. A következő fejezetben a rezgés tan legalapvetőbb fogalmait és módszereit mutatjuk be az egy szabadsági fokú lengőrendszerek kapcsán. A jegyzet 3. fejezetében ezeket a fogalmakat és módszereket általánosítjuk a több szabadsági fokú rendszerek esetére. Mivel az egy szabadsági fokú, lineáris, csillapítatlan szabad rezgések modellje a legegyszerűbb, ezzel a modellel kezdjük a lengőrendszerek vizsgálatát.

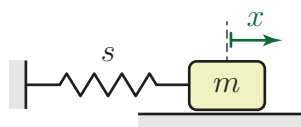
2. fejezet

Egy szabadsági fokú lengőrendszerek

2.1. Csillapítatlan, szabad harmonikus rezgés

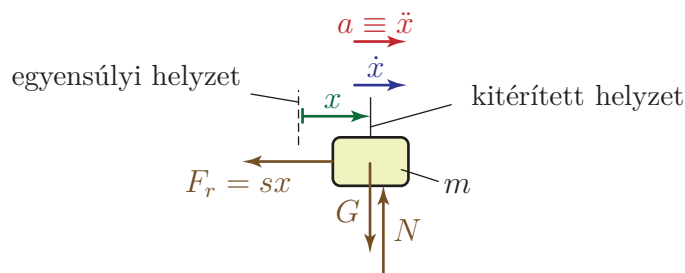
2.1.1. Alapfogalmak; a mozgásegyenlet és a mozgástörvény

Minden egy szabadsági fokú (1 DoF), csillapítatlan, szabad lengőrendszerhez található egy egyenértékű egyszerű lengőrendszer a következő alakban:



2.1. ábra. 1 DoF, szabad, csillapítatlan lengőrendszer alapmodellje.

Ezt az egyszerű modellt az 1 DoF, csillapítatlan, szabad lengőrendszerek alapmodelljének nevezzük. Itt az s merevség és az m tömeg a lengőrendszer paraméterei. Célunk a mozgás időbeli lefolyásának – az $x(t)$ mozgástörvénynek – a meghatározása, tehát nem csak egy pillanatot vizsgálunk, hanem a rezgés folyamatát. Ehhez egy matematikai modellt – differenciálegyenletet – állítunk fel a dinamika alaptétele segítségével. Az első lépésben szabad test ábrát rajzolunk az *egyensúlyi helyzetéből kitérített* rendszerre.



2.2. ábra. Az alapmodell szabadtest ábrája.

Az ábra alapján felírható a dinamika alaptétele:

$$\begin{aligned} ma &= -F_r \\ 0 &= N - mg \end{aligned}$$

Mivel csak x irányú gyorsulás lehetséges, elég csak az első egyenletet vizsgálni:

$$ma = -sx.$$

Ebből az egyenletből már látszik, hogy miért az egyensúlyi helyzetből kitérített helyzetben kell megrajzolni a szabadtest ábrát: egyensúlyban az egyenlet mindkét oldala nulla lenne. Ez még nem differenciálegyenlet, de $a \equiv \ddot{x}$ figyelembevételével megkapjuk a mozgásegyenletet:

$$m\ddot{x} + sx = 0, \quad (2.1)$$

ami egy közönséges, másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet. Az egyenlet másodrendű volta azzal kapcsolatos, hogy a dinamika alaptételében a gyorsulás arányos az erővel, ezért a kitérés második deriváltja jelenik meg az egyenletben. Mivel a lengőrendszer szabad (nincs gerjesztés), a mozgásegyenlet homogén, azaz nincsenek benne olyan tagok, melyek x -et vagy annak valamely deriváltját ne tartalmazzák. Végül, az egyenlet lineáris, mert a rugóerő lineárisan függ a kitéréstől.

A differenciálegyenlet megoldásához célszerű az egyenletet ún. *sztenderd alakra* hozni. Ezt úgy tehetjük meg, hogy elosztjuk az egyenlet minden tagját a gyorsulás együtthatójával, azaz m -mel:

$$\ddot{x} + \frac{s}{m}x = 0. \quad (2.2)$$

Ez azért előnyös, mert így mindössze egyetlen paraméter marad az egyenletben. Mivel ez egy lineáris differenciálegyenlet, a megoldást kereshetjük

$$x(t) = Be^{\lambda t} \quad (2.3)$$

alakban, tehát

$$\ddot{x}(t) = B\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Visszahelyettesítve a (2.2) egyenletbe:

$$B\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{s}{m}Be^{\lambda t} = 0,$$

tehát

$$\left(\lambda^2 + \frac{s}{m}\right)Be^{\lambda t} = 0. \quad (2.4)$$

Ennek az összefüggésnek minden időpillanatban teljesülnie kell. Az exponenciális függvény csak $t \rightarrow -\infty$ -ben tart nullához, a B együtthatóról pedig feltételezzük, hogy nem nulla, ugyanis $B = 0$ annak felelne meg, hogy nem jön létre rezgés. Következésképpen, a zárójelben szereplő kifejezésnek kell nullának lennie, így kapjuk az ún. *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 + \frac{s}{m} = 0. \quad (2.5)$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

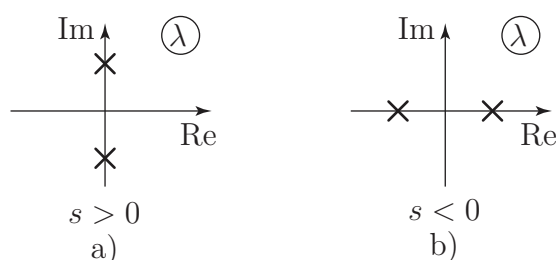
$$\lambda^2 = -\frac{s}{m} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{s}{m}}.$$

Vezessük be az

$$\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}} \quad (2.6)$$

jelölést! α a *csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája*, melynek mértékegysége rad/s. A mozgásegyenlet megoldása szempontjából két élesen elkülönülő esetet különböztethetünk meg:

- $s > 0$, azaz $m > 0$ miatt $\alpha > 0$, λ képzetes. Ekkor létrejöhet rezgés, mi elsősorban ezzel az esettel fogunk foglalkozni.
- $s < 0$, tehát α képzetes, λ valós szám. Ebben az esetben nem alakul ki rezgés¹.



2.3. ábra. A karakterisztikus egyenlet gyökeinek elhelyezkedése a komplex síkon pozitív (a) és negatív (b) merevség esetén.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $s > 0$! A mozgásegyenlet általános megoldása két (2.3) alakú alapgazdóság lineáris kombinációja, a karakterisztikus egyenlet két gyökével az exponenciális függvény kitevőjében:

$$x(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \equiv B_1 e^{i\alpha t} + B_2 e^{-i\alpha t}. \quad (2.7)$$

Az Euler-féle összefüggés alapján átírható a megoldás trigonometrikus alakba:

$$x(t) = B_1 (\cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)) + B_2 (\cos(\alpha t) - i \sin(\alpha t)).$$

Az egyenlet átrendezésével bevezethető c_1 és c_2 együtthatók segítségével két azonos argumentumú trigonometrikus függvény összegeként írható fel a megoldás:

$$x(t) = \underbrace{(B_1 + B_2)}_{=c_1} \cos(\alpha t) + i \underbrace{(B_1 - B_2)}_{=c_2} \sin(\alpha t). \quad (2.8)$$

A fenti, kitérést megadó függvénynek valós értékűnek kell lennie. A c_1 és c_2 együtthatók – melyek a kezdeti feltételek (kezdeti kitérés és sebesség) alapján határozhatók meg – akkor valósak, ha a B_1 és B_2 együtthatók egymás komplex konjugáltjai: $B_1 = \overline{B_2}$. Ebben az esetben a mozgástörvény függvényalakja

$$x(t) = c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \sin(\alpha t). \quad (2.9)$$

A (2.9) képlettel megadható mozgást *harmonikus rezgésnek* nevezzük.

¹Negatív merevség a valóságban is előfordulhat, lásd pl. a 2.2.3 fejezet példáját.

Az általános megoldás más alakban is felírható:

$$x(t) = A \sin(\alpha t + \varepsilon). \quad (2.10)$$

Itt A a rezgés *amplitúdója*, ε pedig a *fázisszög*. Az állítás bizonyításához bontsuk fel a (2.10) kifejezést a trigonometria egyik *addíciós tétele* alapján:

$$A \sin(\alpha t + \varepsilon) = A \sin(\varepsilon) \cos(\alpha t) + A \cos(\varepsilon) \sin(\alpha t). \quad (2.11)$$

Ennek a kifejezésnek minden pillanatban meg kell egyeznie a (2.9) mozgástörvénnyel. A \sin és \cos függvények lineáris függetlensége miatt ez csak úgy lehetséges, ha a (2.9) és (2.11) kifejezésekben a megfelelő együtthatók megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} \cos(\alpha t) \text{ együtthatói: } \quad c_1 &= A \sin(\varepsilon), \\ \sin(\alpha t) \text{ együtthatói: } \quad c_2 &= A \cos(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A fenti két egyenletből a fordított irányú kapcsolat is kiolvasható:

$$\begin{aligned} A &\equiv \sqrt{A^2 \sin^2(\varepsilon) + A^2 \cos^2(\varepsilon)} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{illetve} \\ \tan(\varepsilon) &\equiv \frac{A \sin(\varepsilon)}{A \cos(\varepsilon)} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{miatt} \\ \varepsilon &= \arctan \frac{c_1}{c_2}, \quad \varepsilon \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.2. A kezdeti feltételek figyelembevétele

A (2.2) egyenlet megoldásáról tudjuk, hogy felírható

$$x(t) = c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \sin(\alpha t)$$

alakban. Ez a képlet bármilyen lineáris, egy szabadsági fokú rendszer csillapítatlan szabad rezgésére érvényes. c_1 és c_2 bármilyen valós szám lehet – ezért nevezik ezt általános megoldásnak. Az együtthatók meghatározásához további információkat kell tudnunk a mozgásról. Ezek lehetnek ún. *peremfeltételek* – pl. $x(t_0) = x_0$ és $x(t_1) = x_1$ –, mint a rugalmas szál differenciálegyenlete esetében [12], de ekkor meglehetősen nehézkesen oldható meg a feladat. A dinamikában és a rezgésstanban peremfeltételek helyett inkább *kezdeti feltételeket* szoktak megadni:

$$x(t=0) \equiv x(0) = x_0, \quad (2.14)$$

$$v(t=0) \equiv \dot{x}(0) = v_0. \quad (2.15)$$

A kezdeti feltételek egyenleteiből látszik, hogy melyik pillanatban kell vizsgálnunk a kitérés és sebesség értékét: $t=0$ -ban. A kezdeti kitérés (2.9) alapján

$$x(0) \equiv c_1 \cos(\alpha 0) + c_2 \sin(\alpha 0) = c_1. \quad (2.16)$$

A sebesség kifejezését (2.9) idő szerinti differenciálásával kaphatjuk meg:

$$\dot{x}(t) \equiv -c_1 \alpha \sin(\alpha t) + c_2 \alpha \cos(\alpha t), \quad \text{amiből}$$

$$\dot{x}(0) \equiv -c_1\alpha \sin(\alpha 0) + c_2\alpha \cos(\alpha 0) = c_2\alpha. \quad (2.17)$$

(2.14) és (2.16), valamint (2.15) és (2.17) összehasonlításából:

$$c_1 = x_0 \quad \text{és} \quad c_2 = \frac{v_0}{\alpha}. \quad (2.18)$$

Következésképpen, az adott kezdeti feltételekhez tartozó megoldás

$$x(t) = x_0 \cos(\alpha t) + \frac{v_0}{\alpha} \sin(\alpha t).$$

A c_1 , c_2 együtthatók számítása során két különböző jellegű információt használtunk fel. Egyrészt, ismertek a kezdeti feltételek – ezeket a lengőrendszertől független, azon kívüli hatások határozzák meg, például ütközés másik testtel, vagy a modellezett gép üzemeltetéséből adódó egyéb információk. Másrészt, ismert a lengőrendszer mozgástörvényének általános alakja. Ezt a kétféle információt kell összevetni a számítás során.

Hasonlóan lehet számolni az A amplitúdó és az ε fázisszög értékét is a kezdeti feltételekből. A kezdeti kitérés (2.10) alapján

$$x(0) \equiv A \sin(\alpha 0 + \varepsilon) = A \sin(\varepsilon),$$

a kezdeti sebesség pedig (2.10) differenciálásával adódik, ami $t = 0$ -ban:

$$\dot{x}(0) = A\alpha \cos(\alpha 0 + \varepsilon) = A\alpha \cos(\varepsilon).$$

Ezekből az egyenletekből (2.14) és (2.15) alapján

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin(\varepsilon) \quad \text{és} \\ \frac{v_0}{\alpha} &= A \cos(\varepsilon). \end{aligned}$$

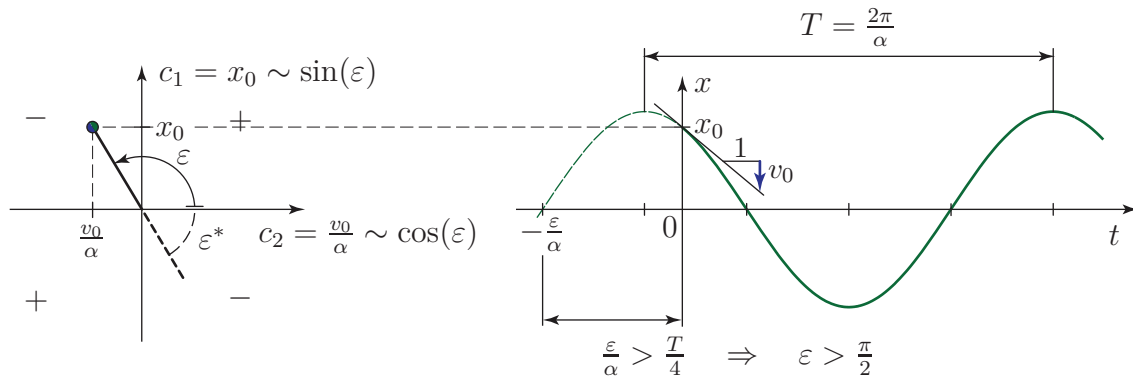
A (2.12) egyenlet kapcsán mondottak szerint adódik A és ε :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}}, \\ \tan \varepsilon &= \frac{\alpha x_0}{v_0}, \end{aligned}$$

összhangban a (2.13) és (2.18) képletekkel.

Amint a 2.4 ábra is mutatja, c_1 és c_2 – azaz $\sin(\varepsilon)$ és $\cos(\varepsilon)$ – előjelétől függően határozható meg, hogy az ε fázisszög melyik síknegyedben található. A számológépek általában a $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti tartományban adják meg az arctan függvény értékkészletét, ez azonban hamis eredményre vezet, ha $\cos(\varepsilon) < 0$ és $\sin(\varepsilon) > 0$ (2. síknegyed) vagy ha $\cos(\varepsilon) < 0$ és $\sin(\varepsilon) < 0$ (3. síknegyed). Ezekben az esetekben a számológép által kiadott értékhez hozzá kell adni π -t.

A $c_{1,2}$ együtthatók a fenti probléma miatt gyakran egyszerűbben kiszámíthatóak a kezdeti feltételekből, mint az A amplitúdó és az ε fázisszög. A mozgástörvény (2.10) alakja azonban szemléletesebb, hiszen $-1 \leq \sin(\alpha t + \varepsilon) \leq 1$ miatt az A amplitúdó a maximális kitérést adja meg.



2.4. ábra. A fázisszög számítása c_1 és c_2 ismeretében. A \pm jelek a $\tan(\varepsilon)$ előjelét mutatják az egyes síknegyedekben.

2.1.3. A mozgás időbeli lefolyása

A (2.9) és (2.10) mozgástörvényben szereplő $\sin(\alpha t)$ és $\cos(\alpha t)$ függvények 2π -periodikusak, tehát pl. $\sin(\alpha t) = \sin(\alpha t + 2\pi)$, minden t pillanatban. A csillapítatlan szabad lengés T periódusidejét ehhez hasonlóan, a

$$\sin(\alpha t) = \sin(\alpha(t + T)) \quad (2.19)$$

összefüggés alapján definiáljuk. Tehát $\sin(\alpha t + 2\pi) \equiv \sin\left(\alpha\left(t + \frac{2\pi}{\alpha}\right)\right)$ miatt

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (2.20)$$

A periódusidő mértékegysége s. A csillapítatlan szabad rezgés *sajátfrekvenciája* a periódusidő reciproka²: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\alpha}{2\pi}$, mértékegysége Hz = 1/s. A frekvencia az 1 s alatt bekövetkező rezgések számát adja meg, a körfrekvencia pedig ennek az értéknek a 2π -ed része.

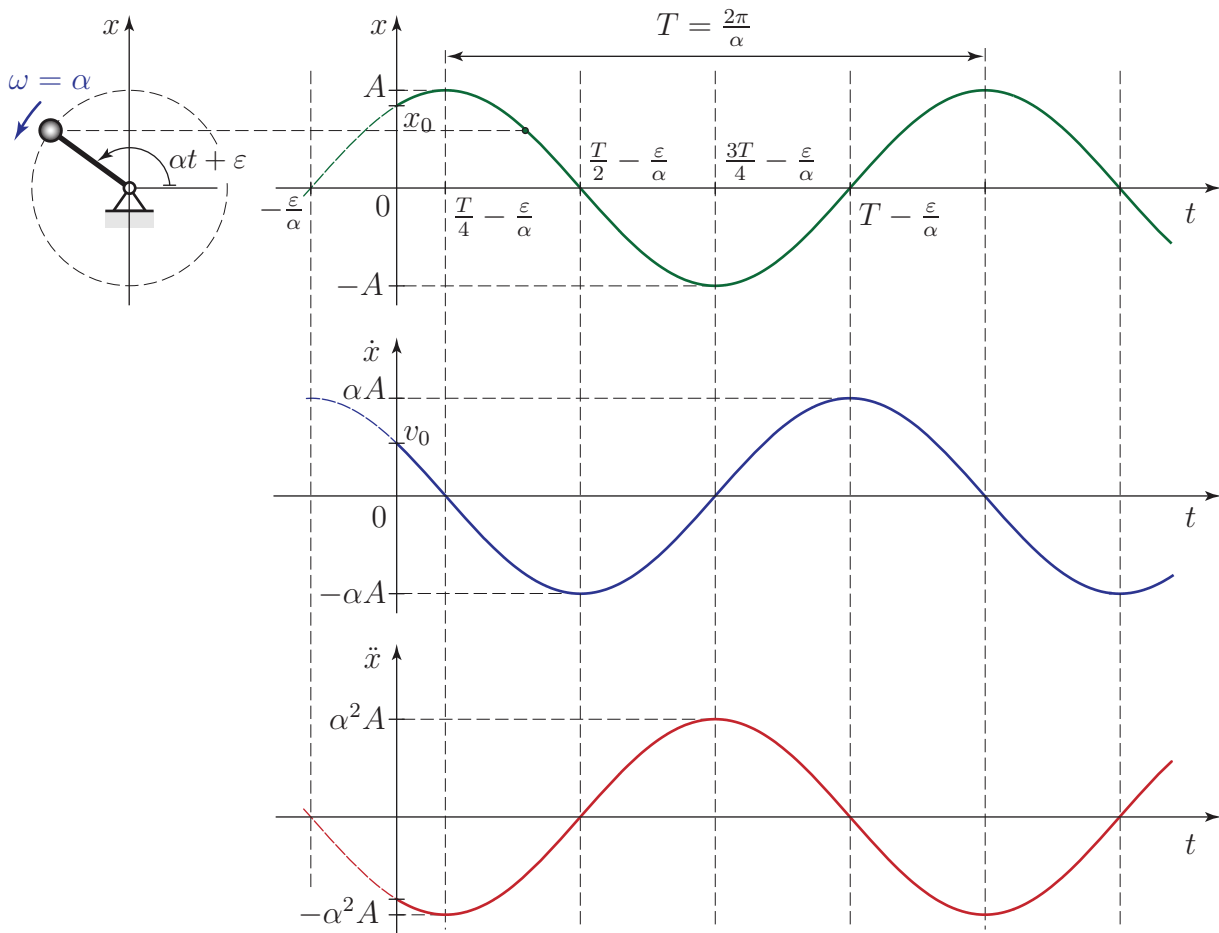
Érdekes analógia figyelhető meg a harmonikus rezgés és az egyenletes körmozgás között: egy ω szögsebességgel keringő pont vetülete csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást végez $\alpha = \omega$ körfrekvenciával. 1 s alatt a keringő pont ω számértékének megfelelő szögelfordulást végez radiánban mérve, innen ered a körfrekvencia elnevezése és mértékegysége (rad/s). Megjegyezzük, hogy a radián nem valódi mértékegység, csak egy arányosságot fejez ki a köríven mért ívhossz és a sugár között. Szemléletes geometriai tartalma miatt mégis mértékegységként használjuk.

Az

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\alpha t + \varepsilon) && \text{mozgástörvény, a} \\ v(t) &= A\alpha \cos(\alpha t + \varepsilon) && \text{sebesség és az} \\ a(t) &= -A\alpha^2 \sin(\alpha t + \varepsilon) && \text{gyorsulás} \end{aligned}$$

grafikonja – azaz a foronómiai görbék – láthatók a 2.5 ábrán. Amint a képletekből is látható, a rezgés maximális sebessége $v_{max} = A\alpha$, maximális gyorsulása pedig $a_{max} = A\alpha^2$. A grafikonok két azonos irányú kitéréshez tartozó maximumhelye között éppen T periódusidő

² ν görög betű, ejtsd: nú. A frekvenciát f -fel is szokták jelölni.



2.5. ábra. Csillapítatlan szabad rezgés foronómiai görbéi.

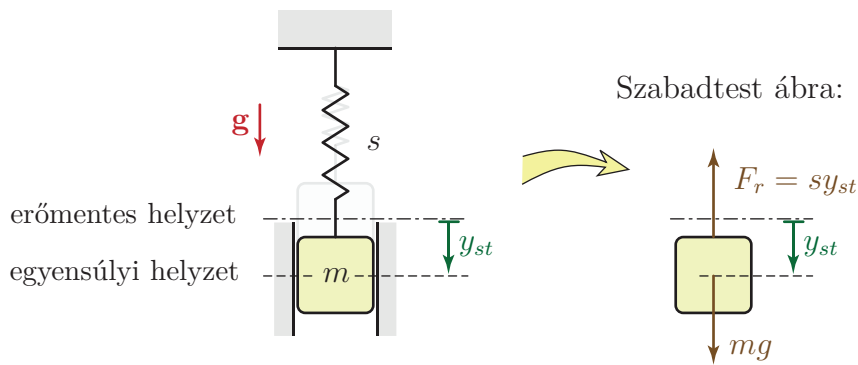
telik el, a tengelymetszetek között pedig – ebben az esetben – $T/2$ időtartam. A gyakorlatban nem célszerű a periódusidőt a tengelymetszetek között eltelt időtartamok alapján számítani. Egyrészt nehezebb detektálni a nulla kitérés időpontját mint a szélső helyzetét (pl. mert ekkor maximális a sebesség), másrészt pedig a tengelymetszetek között eltelt időtartamok nem is egyeznek meg $T/2$ -vel, ha el van tolva a nulla szint – azaz nem az $x = 0$ helyzet körül jön létre a rezgés. Ez az eltolódás például a nehézségi erő hatására is bekövetkezhet.

2.1.4. A nehézségi erő hatása I. – Függőleges irányú rezgés

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a lengőrendszerre állandó nagyságú erő vagy nyomaték hat a rezgés irányában. Vizsgáljuk meg ennek a feladatnak az alapmodelljét, azaz azt az esetet, amelyben a rugóból és hasábból álló lengőrendszer nehézségi erőterben, függőlegesen helyezkedik el, a 2.6 ábrának megfelelően.

A nehézségi erő hatására kialakul egy új *statikus egyensúlyi helyzet*, melyben nem terheletlen a rugó, ezért y_{st} -vel megnyúlik. Ennek az ún. *statikus kitérésnek* az értékét abból határozhatjuk meg, hogy ekkora kitérésnél a rugóerő és a nehézségi erő egyensúlyt tart: $F_r - mg = 0$, azaz a 2.6 ábra alapján $sy_{st} = mg$, tehát

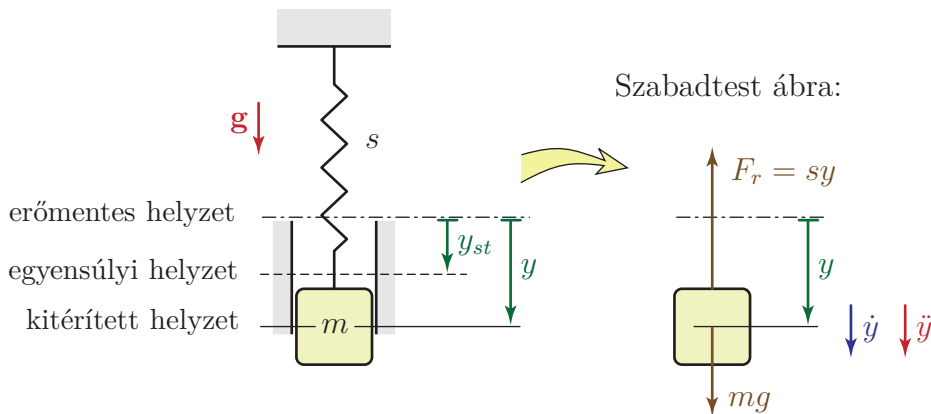
$$y_{st} = \frac{mg}{s}. \quad (2.21)$$



2.6. ábra. Nehézségi erő hatása alatt álló lengőrendszer statikus egyensúlyi helyzete.

A 2.1.1 fejezetben, a vízszintes síkon mozgó lengőrendszer tárgyalása során egyértelmű volt, hogy a rugó nyújtatlan helyzetétől – ami egyúttal megegyezett az egyensúlyi helyzettel – mérjük a hasáb kitérését. Most azonban e két helyzet nem esik egybe. Célszerű olyan koordinátákkal leírni a rendszer mozgását, melyeket a lehető legegyszerűbb alkalmazni. Hogy eldöntsük, hogy e két kézenfekvő koordináta közül melyiket érdemes használni, írjuk fel a mozgásegyenletet mind a rugó erőmentes (nyújtatlan, feszítetlen) helyzetétől, mind a statikus egyensúlyi helyzettől mért koordinátával!

a) **Mozgásegyenlet a rugó terheletlen állapotától mért y koordinátával**



2.7. ábra. Szerkezeti- és szabadtest ábra az erőmentes helyzettől mért y koordinátával.

A 2.7 szabadtest ábra és $F_r = sy$ felhasználásával

$$\begin{aligned}
 m\ddot{y} &= mg - sy, \quad \text{amiből} \\
 \ddot{y} + \underbrace{\frac{s}{m}}_{=\alpha^2} y &= g.
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Ez egy inhomogén differenciálegyenlet, hiszen van benne olyan tag, mely nem tartalmazza az y változót vagy annak deriváltjait. A megoldás a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege [14].

A *homogén* egyenletet már vizsgáltuk a 2.1.1 fejezetben és levezettük, hogy annak az általános megoldása

$$y(t) = c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \sin(\alpha t). \quad (2.23)$$

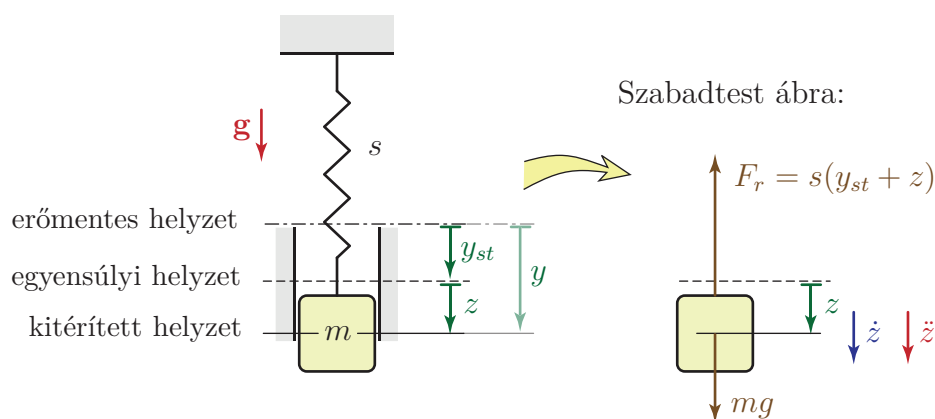
A *partikuláris* megoldást általában érdemes olyan alakban keresni mint amilyen az inhomogenitást okozó tag – jelen esetben tehát $y_p = \text{konstans}$ alakban. Ha $y \equiv y_p$ -t helyettesítünk a (2.22) egyenletbe, akkor $y_p = \text{konstans}$ miatt $\ddot{y}_p = 0$, ezért azt kapjuk, hogy a partikuláris megoldás megegyezik a (2.21) statikus kitéréssel:

$$\frac{s}{m} y_p = g \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{mg}{s} \equiv y_{st}.$$

Tehát a *mozgásegyenlet* általános megoldása

$$y(t) = c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \sin(\alpha t) + y_{st} \equiv A \sin(\alpha t + \varepsilon) + y_{st}. \quad (2.24)$$

b) Mozgásegyenlet a statikus egyensúlyi helyzettől mért z koordinátával



2.8. ábra. Szerkezeti- és szabadtest ábra az egyensúlyi helyzettől mért z koordinátával.

Ha az új z koordinátát a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük, akkor a 2.8 ábra alapján $y = y_{st} + z$. Mivel $y_{st} = \text{konstans}$, ezért $\ddot{y} = \ddot{z}$, tehát

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= mg - sy, \\ m\ddot{z} &= mg - s(y_{st} + z), \\ m\ddot{z} + sz &= mg - sy_{st}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.21) miatt a (2.25) egyenlet jobb oldala zérus, ezért a mozgásegyenlet homogén alakra egyszerűsödik:

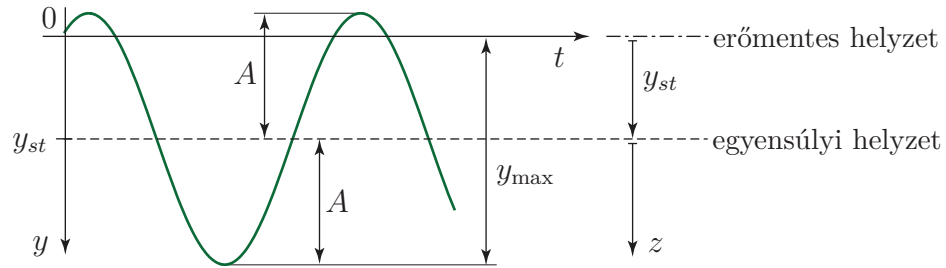
$$m\ddot{z} + sz = 0,$$

tehát sztenderd alakban

$$\ddot{z} + \alpha^2 z = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása pedig már ismert: $z(t) = A \sin(\alpha t + \varepsilon)$.

A fentiekből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ha a nehézségi erő a mozgásegyenlet állandó nagyságú tagjában szerepel, akkor a lengőrendszer α és T paramétereit, valamint A amplitúdóját – az egyensúlyi helyzettől mérhető legnagyobb kitérést – nem befolyásolja. A rendszer a statikus egyensúlyi helyzet körül végzi a lengéseket (2.9 ábra), ezért a rugó maximális deformációja A amplitúdójú rezgés mellett $y_{\max} = A + y_{st}$ lesz, a (2.24) megoldással összhangban. A maximális rugóerő ebben az esetben egy dinamikus és egy statikus erő összegeként fejezhető ki: $F_{r\max} = sA + sy_{st}$.



2.9. ábra. Nehézségi erő hatása alatt álló rendszer egyensúlyi helyzet körül végzett lengései.

Fontos eredmény, hogy homogén differenciálegyenletet kapunk, ha a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátát. Ez azzal van összefüggésben, hogy nyugalomban lehet a rendszer a $z = 0$ egyensúlyi helyzetben, azaz $\ddot{z} = 0$, $\dot{z} = 0$ és $z = 0$ egyszerre teljesülhet. Ebben az esetben a mozgásegyenletben csak konstans tagok maradhatnak, viszont ezek az egyensúlyi helyzetben ható erőknek felelnek meg, amiknek definíció szerint nulla az eredője.

2.2. Linearizálás

2.2.1. A nehézségi erő hatása II. – Ingák

A 2.1.4 fejezetben láttuk, hogy egy egyenes mentén rezgő hasázból és rugóból álló lengőrendszer legfontosabb tulajdonságait nem befolyásolja a nehézségi erő. Az ott tárgyalt esetben a nehézségi erő a mozgásegyenlet konstans értékű tagjába került be és így ki lehetett transzformálni az egyenletből. Egy adott testre ható nehézségi erő ugyan mindig állandó nagyságú, de vannak olyan mechanikai rendszerek, amelyek esetében a nehézségi erő rögzített pontra számított *nyomatéka* függ a kitéréstől. Az ilyen lengőrendszereket nevezzük *ingáknak*.

A *matematikai inga* egy fonálra függesztett pontszerű testből áll, mely a függőleges síkban mozoghat (2.32 ábra). A *fizikai ingát* egy vízszintes tengelyű csukló körül a függőleges síkban elfordulni képes merev test, pl. rúd alkotja. Írjuk fel a 2.10 ábrán látható, homogén, l hosszúságú, m tömegű rúdból álló fizikai inga mozgásegyenletét!

A szabadtest ábrából látható, hogy a K kényszererő O csuklópontra számított nyomatéka nulla. Mivel az inga síkmozgást végez, az O álló pontra felírt $\Theta_O \varepsilon + \omega \times \Pi_O = \mathbf{M}_O$ perdülettel a

$$\Theta_o \varepsilon = -mg \frac{l}{2} \sin(\varphi)$$

alakra egyszerűsödik, ahol ε a szöggyorsulás³. Az O csuklóponton átmenő, a rajz síkjára

³A pontra számított mennyiségek indexébe nagy betűt (pl. O), az adott ponton átmenő tengelyre felírt mennyiségek indexébe pedig kis betűt (pl. o) betűt írunk.



2.10. ábra. Egyszerű fizikai inga és szabadtest ábrája.

merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték $\Theta_o = \frac{1}{3}ml^2$, ezért $\varepsilon \equiv \ddot{\varphi}$ figyelembevételével a mozgásegyenlet

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + mg\frac{l}{2}\sin(\varphi) = 0. \quad (2.26)$$

Ez egy nemlineáris közönséges differenciálegyenlet, mert a φ szögkitérés szinuszával arányos a visszatérítő nyomaték. Ennek az egyenletnek nincs zárt alakú megoldása. Közelítő módszerek vagy számítógépes szimuláció segítségével lehet következtetni a megoldás jellegére.

Nemlineáris egyenletek szokásos közelítő megoldási módszere a *linearizálás az egyensúlyi helyzet(ek) körül*. Ez az eljárás csak akkor vezet elfogadható eredményre, ha az egyensúlyi helyzettől mért kitérések kicsik maradnak a rezgés során.

Első lépésben meg kell határozni a lehetséges egyensúlyi helyzeteket. Míg lineáris rendszereknek csak egy egyensúlyi helyzetük lehet, nemlineáris rendszerekre nincs ilyen megkötés. Egyensúlyi helyzetben a szögkitérés állandó, tehát ilyen, időben állandó megoldásokat kell keresnünk. A feltételezett konstans megoldást visszahelyettesítjük a (2.26) egyenletbe. $\varphi(t) \equiv \varphi_{st} = \text{állandó}$ miatt $\dot{\varphi} = 0$ és $\ddot{\varphi} = 0$, ezért φ_{st} lehetséges értékei meghatározhatók:

$$0 + mg\frac{l}{2}\sin(\varphi_{st}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{st} = \begin{cases} 0, & (2\pi, 4\pi, \dots), \\ \pi, & (3\pi, 5\pi, \dots). \end{cases}$$

Látható, hogy végtelen sok megoldást kapunk, de ezek közül elegendő csak az alsó egyensúlyi helyzetnek megfelelő $\varphi_{st}^{(1)} = 0$ és a függőleges felső helyzetet megadó $\varphi_{st}^{(2)} = \pi$ értékeket vizsgálnunk, hiszen fizikailag a többi megoldás is ezeknek a helyzeteknek felel meg.

Linearizálás az alsó egyensúlyi helyzet ($\varphi_{st}^{(1)} = 0$) körül

A linearizálás során arra törekszünk, hogy a mozgásegyenletben csak elsőfokú tagok maradjanak. A 2.1.4 fejezetben láttuk, hogy az állandó (nulladfokú) tagok eltűnnek az egyenletből, ha az egyensúlyi helyzettől vesszük fel a koordinátát. Ennek megfelelően, vezessünk be most is egy új, (radiánban mért!) x koordinátát a $\varphi(t) = \varphi_{st}^{(1)} + x(t)$ összefüggéssel. Feltevésünk szerint $x(t)$ végig kicsi marad a mozgás során, tehát az inga nem távolodik el nagyon az egyensúlyi helyzettől. Fejtsük Taylor-sorba a mozgásegyenletben szereplő $\sin(\varphi)$ kifejezést a $\varphi_{st}^{(1)} = 0$ egyensúlyi helyzet körül:

$$\sin(\varphi) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \approx x = \varphi. \quad (2.27)$$

Elhanyagoljuk

A linearizálás azt jelenti, hogy a másod- vagy magasabb fokú tagokat elhanyagoljuk. Mivel $\ddot{\varphi} = \ddot{x}$, a mozgásegyenlet linearizált alakja a következő:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{x} + mg\frac{l}{2}x = 0. \quad (2.28)$$

Ez az egyenlet az alapmodell (2.2) differenciálegyenletére vezet:

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2l}x = 0, \quad (2.29)$$

ahol ismét bevezethető az

$$\alpha^2 = \frac{3g}{2l} \quad (2.30)$$

jelölés. A (2.29) egyenlet megoldása ismert (2.9) és az inga periódusideje is kiszámítható a (2.20) képlet alapján, tehát

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}. \quad (2.31)$$

A linearizálás miatt ez csak egy közelítés, valójában az inga periódusideje nem független a kitéréstől.

2.1. példa: Tetszőleges merev testre a linearizált mozgásegyenlet

$$\Theta_o\ddot{\varphi} + mgl_{OS}\varphi = 0$$

alakban írható fel, ahol l_{OS} az O felfüggesztési pont és az S súlypont távolsága. Innen a sajátkörfrekvencia és a periódusidő számítható $T = 2\pi/\alpha$ és

$$\alpha^2 = mg\frac{l_{OS}}{\Theta_o} \quad (2.32)$$

alapján. A fenti képletek bonyolult alakú alkatrészek tehetetlenségi nyomatékának a meghatározására is alkalmasak (lásd 2.11 ábra): az alkatrész tömege és súlypontjának helye, valamint – a testet az O pontban felfüggesztve – a lengés periódusideje is könnyen mérhető. A (2.32) képlet szerint

$$\Theta_o = mg\frac{l_{OS}}{\alpha^2} = mg\frac{T^2l_{OS}}{4\pi^2}$$

a test O ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka.

Linearizálás a felső egyensúlyi helyzet ($\varphi_{st}^{(2)} = \pi$) körül

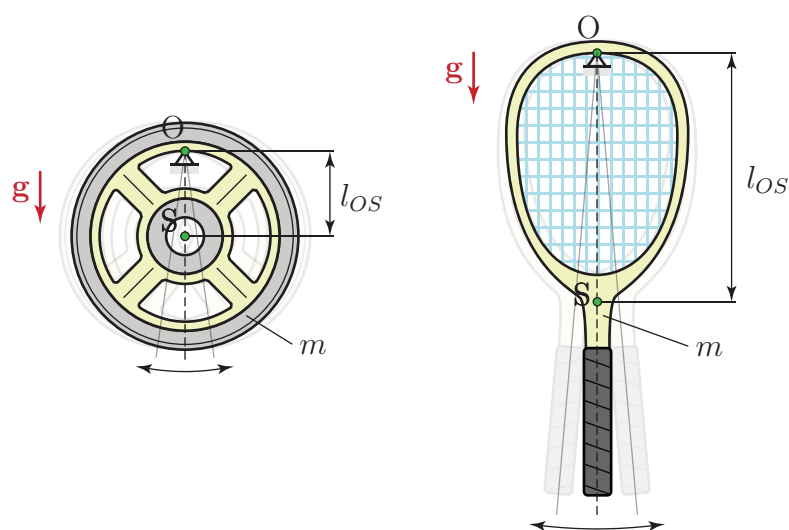
A megoldást ismét $\varphi(t) = \varphi_{st}^{(2)} + y(t)$ alakban írjuk fel, ahol $y(t)$ kicsi, a felső egyensúlyi helyzettől mért koordináta. A $\sin(\varphi)$ függvény Taylor-sora a $\varphi_{st}^{(2)} = \pi$ helyzet körül

$$\sin(\varphi) = \sin(\pi + y) = -\sin(y) = -y + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots \approx -y.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Elhanyagoljuk}}$

Ezt visszahelyettesítjük a mozgásegyenletbe $\ddot{\varphi} = \ddot{y}$ figyelembevételével:

$$\ddot{y} - \frac{3g}{2l}y = 0.$$



2.11. ábra. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása a periódusidő mérése alapján

Az eredményül kapott egyenlet most is hasonlít az alapmodell (2.2) differenciálegyenletére, de olyan, mintha negatív merevségű rugót alkalmaztunk volna. A negatív merevség a felső egyensúlyi helyzetet instabillá teszi: ha a lengőrendszer kicsit is eltávolodott az instabil egyensúlyi helyzettől, akkor a nehézségi erő nyomatékának hatására tovább nő a kitérés és a felfelé fordított inga eldől, nem jön létre rezgés. Az egyensúlyi helyzet stabilitását az ún. *Routh-Hurwitz-kritériumok* [6, 14] alapján lehet ellenőrizni: a csillapítatlan lengőrendszer mozgásegyenletében x és \ddot{x} együtthatója azonos előjelű kell legyen, azaz $s > 0$ – vagyis $\alpha^2 > 0$ – szükséges a rezgés létrejöttéhez. Az inga alsó egyensúlyi helyzete tehát stabil, a felső pedig instabil.

A megoldást $y(t) = Ae^{\lambda t}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve a mozgásegyenletbe, $\ddot{y}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$ felhasználásával a

$$\left(\lambda^2 - \frac{3g}{2l}\right) Ae^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \frac{3g}{2l} = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei valósak:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

A mozgástörvényt az ezekkel a gyökökkel felírt alapmegoldások lineáris kombinációja adja, tehát

$$\varphi(t) = \varphi_{st}^{(2)} + y(t) \approx \pi + c_1 e^{\sqrt{\frac{3g}{2l}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{3g}{2l}}t}. \quad (2.33)$$

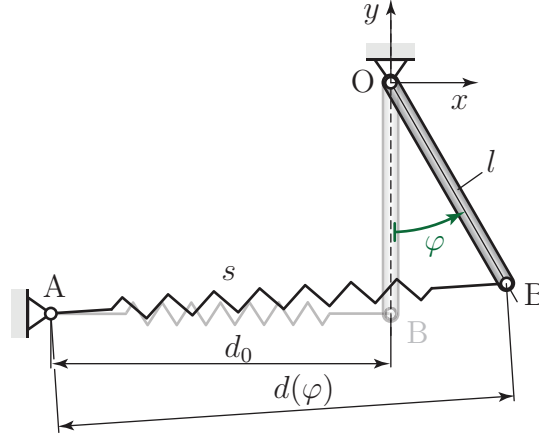
Mivel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\frac{3g}{2l}}t} = \infty,$$

az inga eldőlése során exponenciális ütemben kezd távolodni a felső – *instabil* – egyensúlyi helyzettől. Természetesen csak a felső egyensúlyi helyzet közelében ad megfelelő közelítést a (2.33) képlet, így az egyensúlyi helyzettől való távolodás üteme is csak legfeljebb $y = 0,1-0,2$ rad kitérés eléréséig tekinthető exponenciálisnak.

2.2.2. Linearizálás és rugók

Ha egy tengely körül elfordulni képes merev testhez – például rúdhoz – a 2.12 ábra szerint kapcsolunk egy csavarrugót, akkor a mozgás leírásához ismét szükség van a mozgásegyenlet linearizálására.



2.12. ábra. Eredetileg d_0 hosszúságú rugó megnyúlása.

Vegyük fel a koordináta-rendszer origóját a rúd O felfüggesztési pontjában. Ha a rugó az egyensúlyi helyzetben d_0 hosszúságú, akkor a rögzített A végpontjának a helyvektora $\mathbf{r}_A = [-d_0 \quad -l \quad 0]^T$. A rúd φ -vel kitérített helyzetében a rugó másik végpontja az $\mathbf{r}_B = [l \sin(\varphi) \quad -l \cos(\varphi) \quad 0]^T$ pontba kerül. Ebből a rugó φ kitéréshez tartozó $d(\varphi)$ hossza

$$d(\varphi) = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| \equiv \sqrt{(l \sin(\varphi) + d_0)^2 + (l - l \cos(\varphi))^2}, \quad (2.34)$$

megnyúlása pedig

$$\Delta d \equiv d(\varphi) - d_0 = \sqrt{(l \sin(\varphi) + d_0)^2 + (l - l \cos(\varphi))^2} - d_0. \quad (2.35)$$

Ezt a kifejezést $\varphi = 0$ körül Taylor-sorba fejtve a következőt kapjuk:

$$\Delta d \approx l\varphi - \frac{1}{6}l\varphi^3 + \frac{1}{8}\frac{l^2}{d_0}\varphi^4 + \dots \quad (2.36)$$

Mivel csak a negyedfokú tagban jelenik meg a rugó eredeti d_0 hossza, ezt a paramétert nem vesszük figyelembe a modelljeinkben, csak feltesszük, hogy a rugó elég hosszú ahhoz, hogy a negyed- és magasabb fokú tagok elhanyagolhatóak maradjanak kis kitérések mellett. Ez a közelítés teszi lehetővé azt is, hogy egy több rugóból álló rugókapcsolást egyetlen rugóval helyettesítsünk, hiszen nehézkes lenne külön minden egyes rugó hosszát számításba venni.

Mivel a mozgásegyenletek analitikus megoldásához szükség van a linearizálásra, a rugó megnyúlását a következő linearizált alakban fejezzük ki: $\Delta d = l\varphi$. Így a rugóerő nagysága közelítőleg

$$F_r = sl\varphi. \quad (2.37)$$

A rugóerő az \mathbf{r}_{BA} vektorral párhuzamos, tehát kifejezhető $\mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_{BA}$ alakban, ahol \mathbf{e}_{BA} a BA egyenessel párhuzamos egységvektor. A rugóerő O pontra kifejtett nyomatéka

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_r, \quad (2.38)$$

és az erőkar is kifejezhető

$$k_r = |\mathbf{r}_B \times \mathbf{e}_{BA}|, \quad (2.39)$$

a rugó és a rúd által bezárt szög pedig

$$\sin(\beta) = |\mathbf{e}_B \times \mathbf{e}_{BA}| \quad (2.40)$$

alakban, ahol $\mathbf{e}_B = \mathbf{r}_B/|\mathbf{r}_B| \equiv \mathbf{r}_B/l$. Természetesen mind a k_r erőkar, mind a β szög függ a φ szögkitéréstől. A részleteket mellőzve, az erőkar kifejezését $\varphi = 0$ körül sorba fejtve

$$k_r = l - \frac{1}{2}l\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{d_0}\varphi^3 + \frac{1}{24}l\left(1 - 15\frac{l^2}{d_0^2}\right)\varphi^4 + \dots \quad (2.41)$$

Az elsónél magasabb fokú tagok elhanyagolásával azt kapjuk, hogy a rugóerő erőkarja

$$k_r \approx l,$$

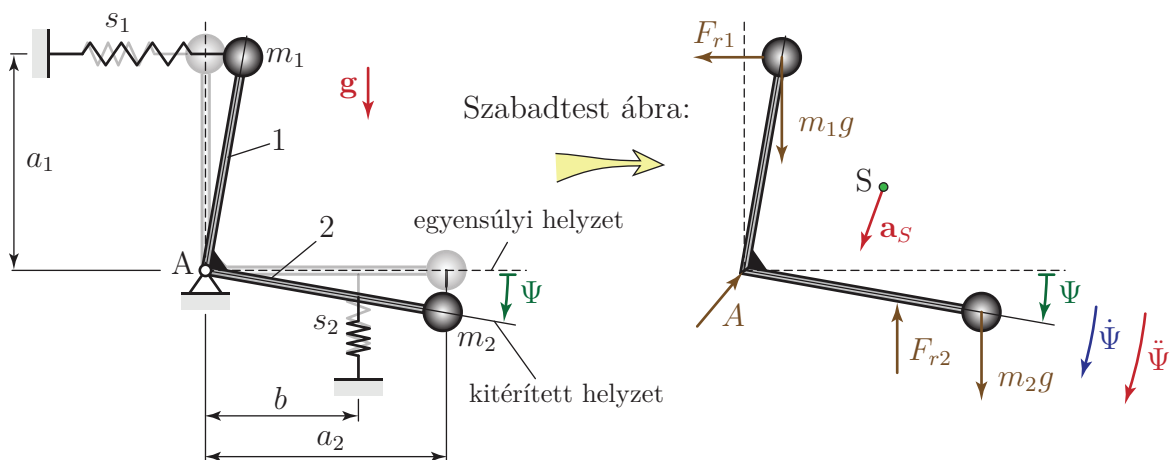
így a (2.37) egyenletet felhasználva kifejezhető a rugóerő által az O ponton átmenő tengelyre kifejtett nyomaték nagysága lineáris közelítésben:

$$M_o = F_r k_r \approx sl^2\varphi. \quad (2.42)$$

2.2.3. Nehézségi erő kettős szerepben

Míg az ingák esetében a nehézségi erő nyomatéka határozza meg a lengőrendszer saját-körfrekvenciáját (2.2.1 fejezet), a 2.1.4 fejezetben vizsgált feladatban a nehézségi erő nem befolyásolta a lengőrendszer legfontosabb paramétereit. Hogy világosan elkülöníthető legyen, mikor milyen szerepet játszik a nehézségi erő, vizsgáljunk meg egy összetettebb feladatot.

A 2.13 ábrán vázolt, két egymásra merőleges, elhanyagolható tömegű, összehegesztett rúdból álló szerkezetre m_1 és m_2 tömegű pontszerű testek vannak rögzítve. A szerkezet egy s_1 és egy s_2 merevségű rugóval kapcsolódik a környezethez és a függőleges síkban kis kitérésű lengéseket végez. A rugók merőlegesek a hozzájuk kapcsolt rudakra a rudak függőleges illetve vízszintes helyzetében. Írjuk fel a linearizált mozgásegyenletet!



2.13. ábra. Lengőrendszer; egyensúlyban az 1-es rúd függőleges.

Statikus egyensúlyi helyzetben az m_2 tömegű testre ható nehézségi erő nyomatékával a rugók $M_{1st} = F_{1st}a_1$ és $M_{2st} = F_{2st}b$ nyomatékai tartanak egyensúlyt. Mivel statikailag határozatlan a szerkezet (a csukló mellett két alátámasztásnak felel meg a két rugó), a két statikus rugóerő viszonyának meghatározásához további információkra lenne szükség. A pontos számítást általános esetben a 2.2.2 fejezet alapján lehetne elvégezni, ha ismert lenne a rugók nyújtatlan hossza és hogy milyen szöghelyzetben nyújtatlanok a rugók. Feladatokban az egyszerűbb számítás kedvéért gyakran felteszik, hogy az egyensúlyi helyzetben csak az egyik rugó van előfeszítve (az „tartja” a szerkezetet), a másik erőmentes.

Az egyensúlyi helyzettől mért szögkitérést jelöljük Ψ -vel! Ez a koordinátaválasztás azért előnyös, mert – ahogy a 2.1.4 fejezetben láttuk – ekkor eltűnnek a konstans tagok a linearizált mozgásegyenletből. A 2.13 szabadtest ábra alapján felírható a rendszer mozgásegyenlete:

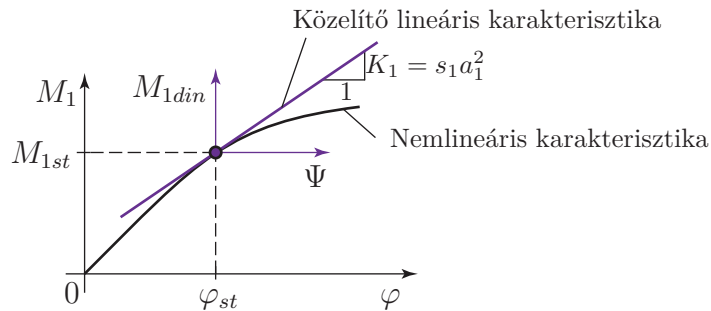
$$\Theta_a \ddot{\Psi} = m_1 g a_1 \sin(\Psi) + m_2 g a_2 \cos(\Psi) - M_1(\Psi) - M_2(\Psi),$$

ahol $M_{1,2}(\Psi)$ a rugók szögkitéréstől függő nyomatékát jelöli; a pontos kifejezések a (2.35) képlethez hasonlóan bonyolultak, így ezeket nem írjuk ki.

Linearizáljuk ezt az egyenletet a $\Psi = 0$ egyensúlyi helyzet közelében! Bármilyen is a rugóerők aránya az egyensúlyi helyzetben, az előfeszített rugók által kifejtett nyomaték két tagra bontható: a statikus egyensúlyi helyzetben kifejtett $M_{ist} = \text{konstans}$, $i = 1, 2$ nyomatékból és egy Ψ -től függő – lineáris közelítésben Ψ -vel arányos – M_{idin} dinamikus tagból. Az előző fejezetből ismert, hogy pl. az s_1 merevségű rugó egyensúlyi helyzethez képest mért megnyúlása lineáris közelítésben $a_1\Psi$, az erőkar pedig közelítőleg a_1 . A rugóerő – a nyomatékhoz hasonlóan – statikus és dinamikus összetevőkre bontható, azaz $F_{r1} = F_{1st} + F_{1din} \approx F_{1st} + s_1 a_1 \Psi$, a nyomaték pedig $M_1 = M_{1st} + M_{1din} \approx F_{r1} a_1 \approx M_{1st} + s_1 a_1^2 \Psi$ alakban írható fel. Tehát a nyomaték *megváltozása* kis Ψ kitérések esetén közelíthető a (2.42) képlet és a 2.14 ábra alapján, azaz

$$\begin{aligned} M_1(\Psi) &\approx M_{1st} + s_1 a_1^2 \Psi \quad \text{és} \\ M_2(\Psi) &\approx M_{2st} + s_2 b^2 \Psi, \end{aligned}$$

ahol M_{1st} és M_{2st} a rugók által az egyensúlyi helyzetben kifejtett nyomaték.



2.14. ábra. Az 1-es rugó által kifejtett nyomaték linearizálása az egyensúlyi helyzet közelében.

Felhasználva, hogy $\Psi = 0$ közelében

$$\begin{aligned} \sin(\Psi) &\approx \Psi \quad \text{és} \\ \cos(\Psi) &\approx 1, \end{aligned}$$

a nehézségi erővel kapcsolatos tagok is linearizálhatók és a linearizált mozgásegyenlet a következő alakban írható fel:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} = m_1 g a_1 \Psi + m_2 g a_2 - (M_{1st} + s_1 a_1^2 \Psi) - (M_{2st} + s_2 b^2 \Psi).$$

Az egyenletet rendezve:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} + (s_1 a_1^2 + s_2 b^2 - m_1 g a_1) \Psi = \underbrace{m_2 g a_2 - M_{1st} - M_{2st}}_{=0}. \quad (2.43)$$

Az egyenlet jobb oldalán látható kifejezés az egyensúlyi helyzetben ható nyomatékok eredője, ami definíció szerint zérus. Ebből a feltételből lehet meghatározni a statikus rugóerőt. Például ha az s_1 rugó erőmentes ($M_{1st} = 0$, $F_{1st} = 0$) az egyensúlyi helyzetben, akkor (2.43) jobb oldala szerint az s_2 rugó által kifejtett $M_{2st} = F_{2st} b$ nyomaték

$$m_2 g a_2 - M_{2st} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{2st} = m_2 g a_2,$$

így

$$F_{2st} = \frac{m_2 g a_2}{b}.$$

Tehát ismét azt látjuk, hogy a mozgásegyenlet homogén, ha a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátát:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} + (s_1 a_1^2 + s_2 b^2 - m_1 g a_1) \Psi = 0.$$

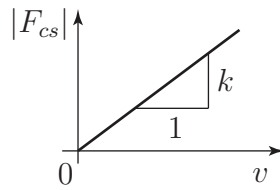
A függőleges helyzet körül mozgó rúdra helyezett m_1 tömegű testre ható nehézségi erő nyomatéka lineáris közelítésben egyenesen arányos a szögkitéréssel: $m_1 g a_1 \sin(\Psi) \approx m_1 g a_1 \Psi$ és olyan értelmű, hogy növelné a szerkezet kitérését. Ezért a lengőrendszer merevségét csökkenti ez a tag. Egy lefelé álló rúd végére helyezett test esetében természetesen növekedne a merevség, amint a 2.2.1 fejezetben láttuk. A vízszintes helyzet körül mozgó rúdon lévő m_2 tömegű testre ható $m_2 g a_2 \cos(\Psi)$ nyomaték viszont kis kitérések esetén jó közelítéssel állandó marad, ugyanúgy, mint a 2.1.4 fejezet feladatában – ezért esik ki ez a tag a linearizált mozgásegyenletből.

2.3. Viszkózus csillapítású szabad rezgés

A közegellenállás és a lengőrendszert alkotó anyagok belső csillapítása következtében a szabad lengések során a mechanikai energia csökken, hő termelődik. Így a valóságban nem maradhat fenn az az állandó amplitúdójú rezgés, amit a csillapítatlan esetben láttunk. A gépészmérnöki gyakorlatban a sebességgel arányos, ún. viszkózus csillapítás a legjelentősebb – jó közelítéssel ilyen a csillapítás jellege folyadékok lamináris áramlása, egymáson csúszó kent felületek, lengéscsillapítók és a belső csillapítás esetében is.

Modellünkben a csillapító erő lineárisan függ a sebességtől és azzal ellentétes irányú: $F_{cs} = -kv$, lásd 2.15 ábra. A szabadtest ábrák rajzolása során – a rugóerő ábrázolásához hasonlóan –, a negatív előjel kiírása helyett $F_{cs} = kv$ nagyságú erőt veszünk fel a sebességgel ellentétes irányban.

Itt k a *csillapítási tényező*, mértékegysége Ns/m. Feltesszük, hogy a csillapítási tényező azonos értékű pozitív és negatív sebességek esetén. Megjegyezzük, hogy ez a gyakorlatban

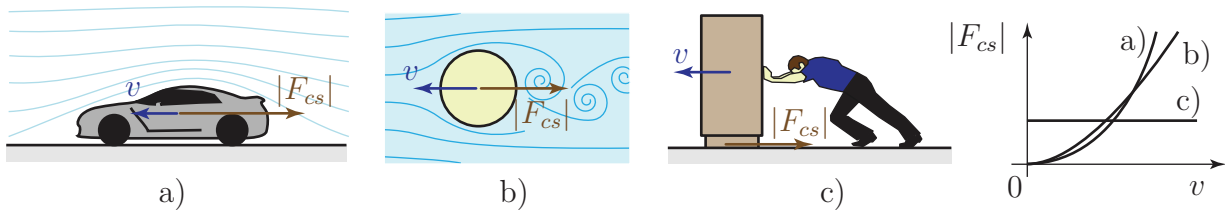


2.15. ábra. A viszkózus csillapító erő karakterisztikája.

nem mindig van így, például gépkocsik lengéscsillapítói gyakran kisebb ellenállást fejtenek ki az összenyomással szemben, mint a húzás ellenében.

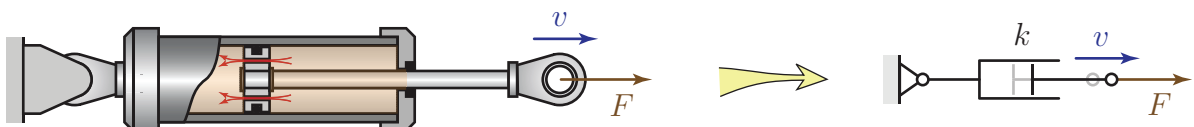
A viszkózus csillapítás mellett más csillapítási karakterisztikájú modelleket is alkalmaznak az alábbi – a 2.16 ábrán szemléltetett – esetekben.

- Áramló gázok: $F_{cs} = -kv^2 \operatorname{sgn}(v)$
- Turbulens áramlás: $F_{cs} = -k|v|^{1,75} \operatorname{sgn}(v)$
- Száraz (Coulomb-) súrlódás: $F_{cs} = -kv^0 \operatorname{sgn}(v)$.



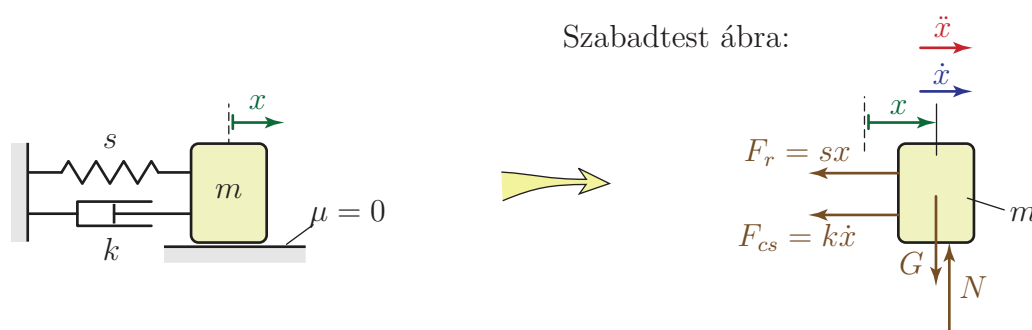
2.16. ábra. Példák különböző karakterisztikájú csillapító erőkre. (a) áramló gázok, (b) turbulens áramlás, (c) száraz súrlódás.

A csillapításnak egyszerre több oka is lehet; eredhet pl. a rugó anyagának belső csillapításából, a közegellenállásból és kent felületen csúszó testekre ható erőből egyszerre. A rendszer tehetetlen és rugalmas elemeihez hasonlóan, a csillapítást is a lengőrendszer külön elemeként kezeljük, mely elhanyagolható tömegű és zérus merevségű. A csillapító elemet a 2.17 ábrán szemléltetett „ikonnal” jelöljük, ami a lengéscsillapítók működésére utal. Ennek



2.17. ábra. Lengéscsillapító vázlatja és a csillapító elem jelölése.

megfelelően, az 1 DoF, viszkózus csillapítású, gerjesztetlen lengőrendszer alapmodellje a 2.18 ábrán látható.



2.18. ábra. 1 DoF, viszkózus csillapítású, szabad lengőrendszer alapmodellje

2.3.1. A mozgásegyenlet

Az alapmodell mozgásegyenlete a 2.18 szabadtest ábra alapján írható fel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_r - F_{cs}, \\ m\ddot{x} &= -sx - k\dot{x}, \\ m\ddot{x} + k\dot{x} + sx &= 0. \end{aligned}$$

A csillapítatlan esethez hasonlóan, most is leoszthatjuk az egyenlet együtthatóit a gyorsulás együtthatójával. Így – bevezetve \dot{x} együtthatójára a $k/m = 2D\alpha$ jelölést – kapjuk a mozgásegyenlet sztenderd alakját:

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2x = 0. \quad (2.44)$$

Itt

$$D = \frac{k}{2m\alpha}$$

a dimenziótlan *Lehr-féle* vagy *relatív csillapítási tényező*, α pedig a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája.

Mivel a fenti egyenlet lineáris, kereshetjük a megoldását

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

alakban, amiből

$$\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Visszahelyettesítve a (2.44) egyenletbe:

$$\begin{aligned} A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2D\alpha A\lambda e^{\lambda t} + \alpha^2 A e^{\lambda t} &= 0, \quad \text{tehát} \\ \underbrace{Ae^{\lambda t}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2)}_{=0} &= 0. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek minden t pillanatban teljesülnie kell. $A = 0$ az $x \equiv 0$ állandó megoldásnak felelne meg – a nyugvó rendszernek –, $e^{\lambda t}$ pedig csak $\lambda t \rightarrow (-\infty)$ -ben lehetne nulla. Tehát csak akkor kaphatunk rezgést leíró megoldást, ha $Ae^{\lambda t} \neq 0$, amiből az következik, hogy a zárójelben szereplő kifejezés nulla. Ennek megfelelően, a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1}. \quad (2.45)$$

A gyökök értékétől függően három eset lehetséges, melyeket az alábbiakban tárgyalunk.

2.3.2. Gyenge csillapítás

Gyenge csillapításnak nevezzük azt az esetet, amikor $0 < D < 1$ ⁴. Ekkor $-1 < D^2 - 1 < 0$, ezért a $\lambda_{1,2}$ gyökök komplex konjugáltak:

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm i\alpha\sqrt{1 - D^2} \equiv -D\alpha \pm i\gamma,$$

ahol

$$\gamma = \alpha\sqrt{1 - D^2}$$

a *csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája*, mértékegysége rad/s. Mint látni fogjuk, ez a mennyiség jellemzi a csillapított lengőrendszer rezgésének ütemét. $D < 1$ miatt $\gamma < \alpha$, tehát a csillapítás csökkenti a rezgés frekvenciáját és növeli a lengésidőt.

Az általános megoldást a két alapmegoldás lineáris kombinációjaként írhatjuk fel:

$$x(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} = B_1 e^{(-D\alpha + i\gamma)t} + B_2 e^{(-D\alpha - i\gamma)t} = e^{-D\alpha t} (B_1 e^{i\gamma t} + B_2 e^{-i\gamma t}).$$

A zárójelben szereplő kifejezés az $\alpha \leftrightarrow \gamma$ cserétől eltekintve ugyanolyan alakú, mint a csillapítatlan rezgések kapcsán kapott (2.7) egyenlet, tehát ugyanúgy átalakítható:

$$x(t) = e^{-D\alpha t} (c_1 \cos(\gamma t) + c_2 \sin(\gamma t)) = A e^{-D\alpha t} \sin(\gamma t + \varepsilon). \quad (2.46)$$

A (2.19) egyenlet kapcsán leírtak alapján most is bevezethető a csillapított rezgések periódusideje:

$$T \equiv \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\gamma}. \quad (2.47)$$

Ebből a kifejezésből látszik, hogy nem a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája határozza meg a rezgések ütemét; α most csupán egy fizikai tartalom nélküli paraméter a megoldásban.

A (2.46) megoldásban szereplő $c_{1,2}$ paramétereket a kezdeti feltételek alapján lehet meghatározni. Legyenek a kezdeti feltételek

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \quad \text{és} \\ \dot{x}(0) &= v_0! \end{aligned}$$

A (2.46) egyenletbe $t = 0$ -át helyettesítve kifejezhető $x(0)$:

$$x(0) = e^{-D\alpha \cdot 0} (c_1 \cos(\gamma \cdot 0) + c_2 \sin(\gamma \cdot 0)) \equiv c_1.$$

Következésképpen,

$$c_1 = x_0. \quad (2.48)$$

⁴Vannak olyan valóságos szerkezetek is, amiket negatív csillapítású modellel lehet jól leírni. A Routh-Hurwitz-kritériumok [6, 14] alapján azonban belátható, hogy az ilyen rendszerek egyensúlyi helyzete instabil.

A mozgástörvény differenciálásával kifejezhető a sebesség:

$$\dot{x}(t) = -D\alpha e^{-D\alpha t} (c_1 \cos(\gamma t) + c_2 \sin(\gamma t)) + e^{-D\alpha t} (-c_1 \gamma \sin(\gamma t) + c_2 \gamma \cos(\gamma t)). \quad (2.49)$$

$t = 0$ behelyettesítésével

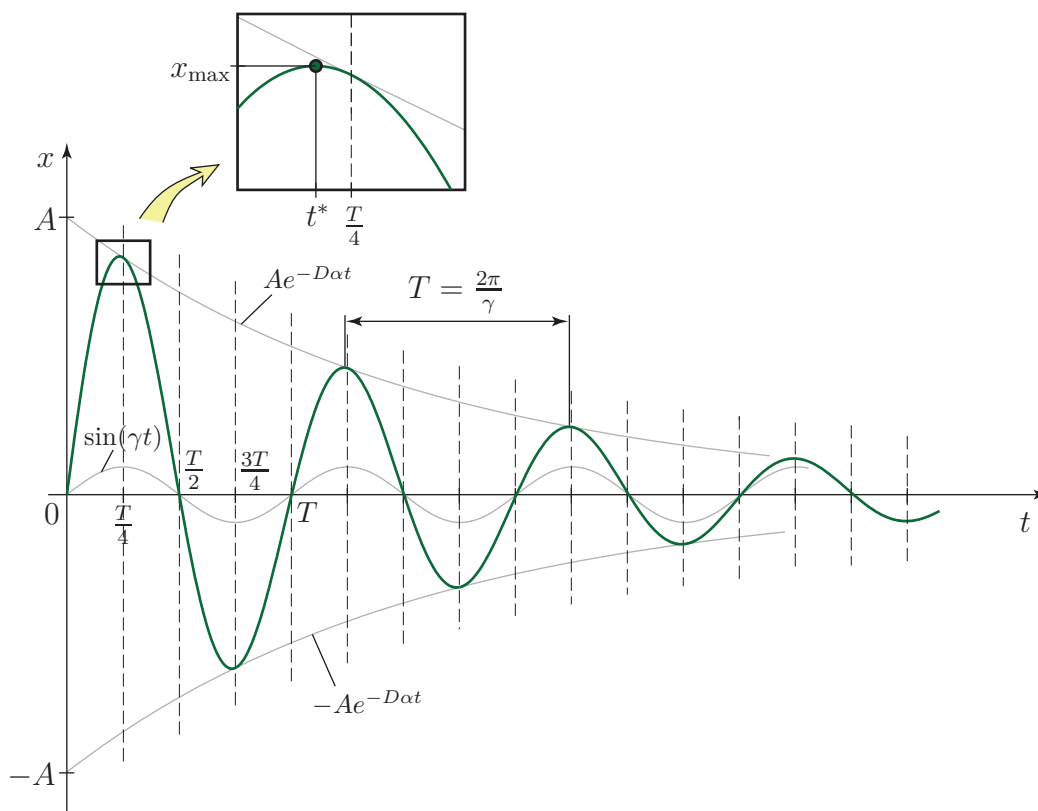
$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= -D\alpha e^{-D\alpha 0} (c_1 \cos(\gamma 0) + c_2 \sin(\gamma 0)) + e^{-D\alpha 0} (-c_1 \gamma \sin(\gamma 0) + c_2 \gamma \cos(\gamma 0)) \\ &\equiv -D\alpha c_1 + c_2 \gamma. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $c_1 = x_0$ és $\dot{x}(0) = v_0$:

$$-D\alpha x_0 + c_2 \gamma = v_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{v_0 + D\alpha x_0}{\gamma}. \quad (2.50)$$

A mozgás időbeli lefolyása

A 2.19 ábrán látható a (2.46) mozgástörvény grafikonja $x_0 = 0$ és $v_0 > 0$ kezdeti feltételek mellett. A megoldás grafikonjához két exponenciális burkológörbét lehet illeszteni, tehát az



2.19. ábra. Gyenge csillapítású (alulcsillapított) lengőrendszer mozgástörvénye.

egymás utáni maximális kitérések nagysága exponenciálisan csökken. A csillapított szabad rendszer mozgása szigorúan véve nem periodikus, hiszen pontosan ugyanabba az állapotba sohasem tér vissza a lengőrendszer. Mégis jellemezhető a mozgás a két azonos irányú maximális kitérés között eltelt $T = 2\pi/\gamma$ periódusidővel. A maximális kitérések azonban nem a szinuszfüggvény $t = T/4, t = 5T/4, \dots$ maximumhelyeinél következnek be – csak a csillapítatlan esetben lenne így. $t = T/4$ körül a szinuszfüggvény érintője kis meredekségű, az

exponenciális függvény viszont gyorsan csökken. Mivel e két függvény össze van szorozva a (2.46) megoldásban, az első maximális kitérés kicsivel a $t = T/4$ pillanat *előtt* következik be a 2.19 ábrán mutatott esetben.

Általánosan a maximális kitérések t^* -gal jelölt időpontjai abból a feltételből határozhatók meg, hogy ezekben a pillanatokban a mozgástörvénynek szélsőértéke van, tehát deriváltja nulla. Ez annak felel meg, hogy a maximális kitérés pillanatában a sebesség nulla, a rezgő test megáll egy pillanatra:

$$\dot{x}(t^*) = -D\alpha e^{-D\alpha t^*} (c_1 \cos(\gamma t^*) + c_2 \sin(\gamma t^*)) + e^{-D\alpha t^*} (-c_1 \gamma \sin(\gamma t^*) + c_2 \gamma \cos(\gamma t^*)) = 0. \quad (2.51)$$

Mivel $e^{-D\alpha t^*} \neq 0$,

$$(c_2 \gamma - D\alpha c_1) \cos(\gamma t^*) - (c_1 \gamma + c_2 D\alpha) \sin(\gamma t^*) = 0.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\tan(\gamma t^*) = \frac{c_2 \gamma - D\alpha c_1}{c_1 \gamma + c_2 D\alpha},$$

és behelyettesítve a $c_{1,2}$ együtthatók (2.48) és (2.50) kifejezését

$$\tan(\gamma t^*) = \frac{v_0 \gamma}{x_0 \gamma^2 + D\alpha v_0 + D^2 \alpha^2 x_0}. \quad (2.52)$$

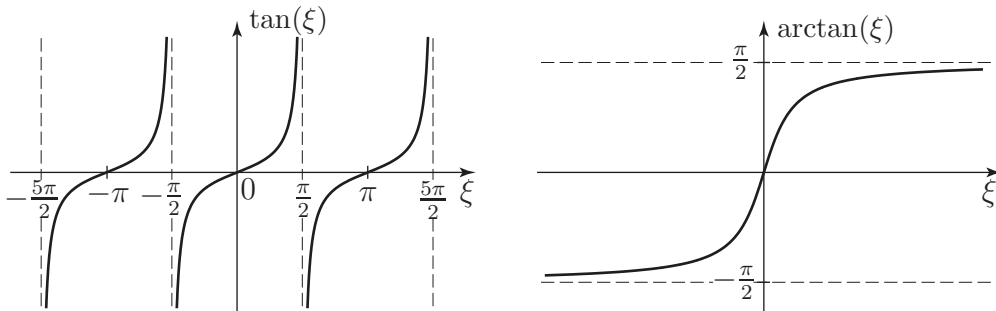
Például a 2.19 ábrának megfelelő $x_0 = 0$ kezdeti feltétel esetén

$$t^* = \frac{1}{\gamma} \arctan\left(\frac{\gamma}{D\alpha}\right). \quad (2.53)$$

A csillapítatlan $D = 0$ esetben, bevezetve a ξ segédváltozót

$$\lim_{D \rightarrow 0} t^* = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} \arctan(\xi) = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{T}{4},$$

ugyanis a tangens függvény bal oldali határértéke $\pi/2$ -nél $\lim_{\xi \rightarrow \pi/2-0} \tan(\xi) = \infty$, a 2.20 ábrának megfelelően.



2.20. ábra. A tangens és arkusz tangens függvények grafikonjai.

Mivel a tangens függvény π -periodikus, azaz

$$\tan(\gamma t^*) = \tan\left(\gamma\left(t^* + j\frac{\pi}{\gamma}\right)\right),$$

a (2.52) és (2.53) kifejezések az összes $j = 0, \dots, \infty$ (azaz végtelen sok) lokális minimum és maximum időpontját megadják, melyek $\pi/\gamma = T/2$ egész számú többszöröseiben térnek el egymástól. A legnagyobb abszolút értékű kitérést általában a legkisebb pozitív t^* érték (2.46)-ba helyettesítésével számíthatjuk ki, de az is előfordulhat, hogy a kezdeti x_0 kitérés nagyobb, mint a szélsőérték kereséssel kapott érték⁵.

A rendszer paramétereinek meghatározása méréssel

Míg a rugómerevséget szilárdságtani megfontolások alapján meg lehet határozni (lásd 1.3.1 fejezet és [12]), a csillapítási tényező értékét csak nagyon pontatlanul lehet elméleti úton megbecsülni. Ezért kitüntetett szerepe van a rezgésben a *méréseknek*.

Egy viszkózus csillapítású gerjesztetlen lengőrendszer periódusideje a két azonos irányú maximális kitérés között mérhető idő. A gyakorlatban pontosabb értéket kapunk, ha több, pl. n periódus együttes idejét átlagoljuk:

$$T_{\text{mért}} = \frac{t(A_{n+1}) - t(A_1)}{n},$$

ahol A_i az i -edik azonos irányú maximális kitérést jelöli a 2.21 ábrának megfelelően. A $t(A_i)$ időpontok tehát a (2.52) képlettel megadott időpontok közül vagy csak a pozitív, vagy csak a negatív kitéréshez tartozó időpontoknak felelnek meg. A csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája a mért periódusidőből: $\gamma_{\text{mért}} = 2\pi/T_{\text{mért}}$.

A relatív csillapítási tényező meghatározásához azt használhatjuk ki, hogy bármely két, egymás után T periódusidővel bekövetkező kitérés hányadosa állandó, hiszen $\sin(\gamma t + \varepsilon) = \sin(\gamma(t + T) + \varepsilon)$ miatt

$$\frac{x(t)}{x(t + T)} = \frac{Ae^{-D\alpha t} \sin(\gamma t + \varepsilon)}{Ae^{-D\alpha(t+T)} \sin(\gamma(t + T) + \varepsilon)} = e^{D\alpha T}. \quad (2.54)$$

A (2.54) képlet a maximális kitérésekre is igaz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{D\alpha T},$$

tehát bevezethető egy új mennyiség a lengőrendszer jellemzésére, a *logaritmikus dekrementum*:

$$\Lambda \equiv \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = D\alpha T.$$

A logaritmikus dekrementum mérése során pontosabb értéket kapunk, ha több (n) periódust is figyelembe veszünk:

$$\frac{A_1}{A_{n+1}} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{nD\alpha T},$$

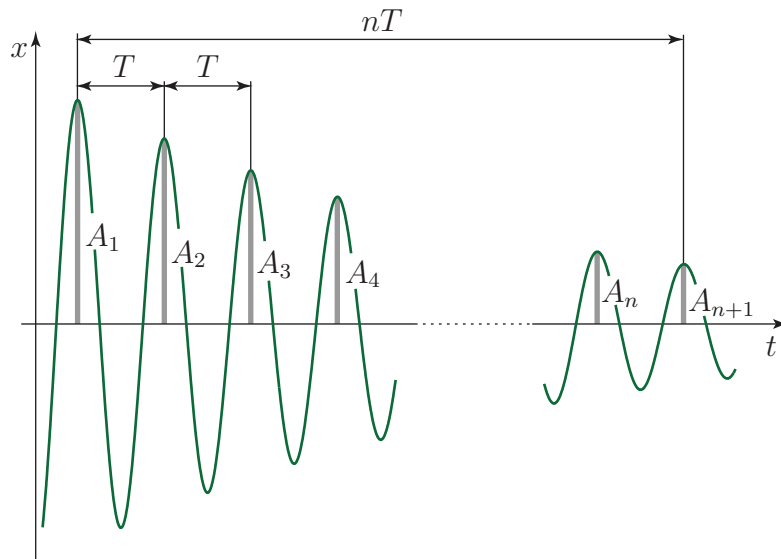
ezért

$$\Lambda_{\text{mért}} = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A_{n+1}}.$$

A logaritmikus dekrementum ismeretében kiszámítható a relatív csillapítási tényező:

$$\Lambda = D\alpha T = D\alpha \frac{2\pi}{\gamma} = D\alpha \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{1-D^2}} = \frac{2D\pi}{\sqrt{1-D^2}}, \quad \text{amiből}$$

⁵A szélsőérték vagy ott található ahol a derivált nulla, vagy pedig az értelmezési tartomány végpontjaiban.



2.21. ábra. A periódusidő meghatározása mérésrel.

$$D_{\text{mért}} = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}.$$

Ha kicsi a csillapítás, akkor $\Lambda \ll 2\pi$, tehát $D_{\text{mért}} \approx \Lambda/2\pi$.

A relatív csillapítási tényező fémrugók belső csillapítása esetén $D \approx 0,001$, gumirugók esetén a $D \approx 0,01 \dots 0,1$ értékekkel számolhatunk, míg a lengéscsillapítók relatív csillapítási tényezője általában $D \approx 0,5 \dots 1$.

2.3.3. Kritikus csillapítás

Kritikus csillapításról akkor beszélünk, ha $D = 1$. Ebben az esetben a karakterisztikus egyenlet gyökei megegyeznek: $\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1} \equiv -\alpha$, ezért a mozgástörvény alakja:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\alpha t}. \quad (2.55)$$

Ez azt jelenti, hogy nem jön létre rezgés, ez az ún. *aperiodikus határeset*. Ilyenkor a periódusidő helyett a T_c *időállandót* használják a mozgás jellemzésére. Az időállandó az az időtartam, ami alatt e -ed részére csökken a kitérés. Nagy t értékek esetén a $te^{-\alpha t}$ függvény jó közelítéssel $e^{-\alpha t}$ -nek megfelelően viselkedik, tehát az időállandó: $T_c = 1/\alpha$.

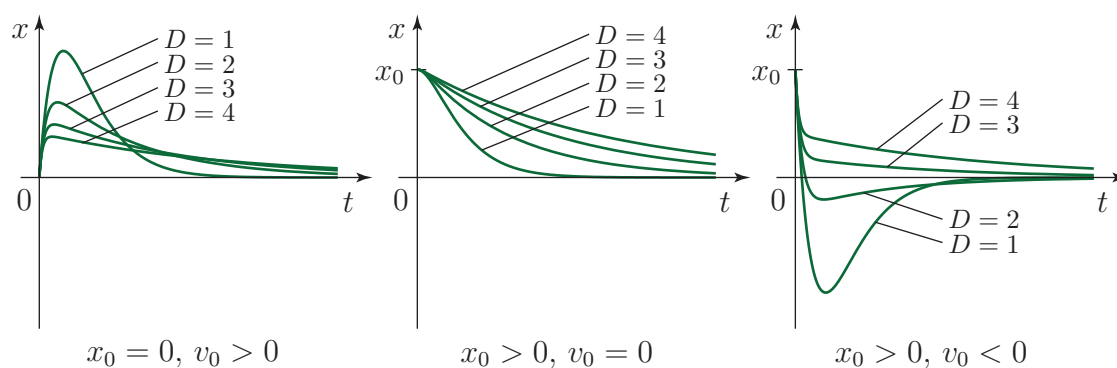
A kezdeti feltételeket figyelembe véve a mozgástörvény együtthatói a korábban bemutatott módon számíthatók ki:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_0, \\ c_2 &= v_0 + \alpha x_0. \end{aligned}$$

2.3.4. Erős csillapítás

Erős csillapításról akkor beszélünk, ha $D > 1$. Ebben az esetben a karakterisztikus egyenlet gyökei valós, negatív számok:

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1} \equiv \alpha(-D \pm \sqrt{D^2 - 1}),$$



2.22. ábra. A mozgástörvény grafikonja kritikus csillapítású és túlcsillapított lengőrendszerek esetén.

ahol $-1 < -D + \sqrt{D^2 - 1} < 0$ és $-D - \sqrt{D^2 - 1} < -D < -1$ miatt

$$\lambda_2 < -\alpha < \lambda_1 < 0. \quad (2.56)$$

Az általános megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.57)$$

tehát a kitérés exponenciálisan csökken. Az ilyen rendszereket *túlcsillapított*nak nevezik. Vegyük észre, hogy (2.56) miatt $e^{\lambda_1 t}$ lassabban, $e^{\lambda_2 t}$ pedig gyorsabban cseng le, mint $e^{-\alpha t}$. Elég nagy t -re csak a lassabban csillapodó tag marad számottevő, tehát a túlcsillapított rendszer időállandója

$$T_c = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\alpha(D - \sqrt{D^2 - 1})} > \frac{1}{\alpha}.$$

Ezek szerint a csillapítás növelése növeli az időállandót, ami azt jelenti, hogy egyre lassabb a csillapodás. Tehát a *kritikus csillapítás mellett a leggyorsabb a mozgás lecsengése* (2.22 ábra). Fontos megemlíteni, hogy a modell szerint a viszkózus csillapítású szabad rendszer rezgése (gyenge csillapítás mellett) vagy mozgása (ha kritikusan- vagy túlcsillapított a rendszer) *sohasem áll le teljesen*, csak exponenciális ütemben tart a kitérés a nullához.

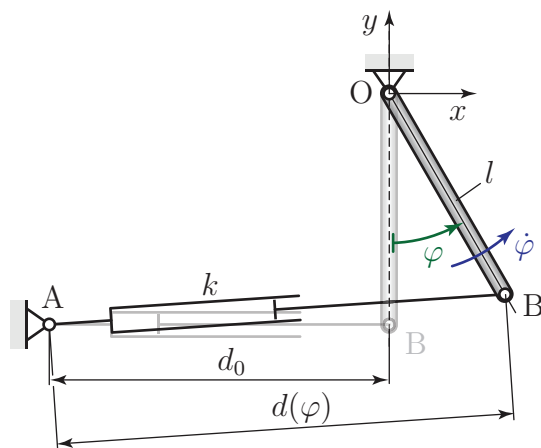
A kezdeti feltételekkel kifejezhetők az általános megoldás együtthatói:

$$c_1 = \frac{v_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$c_2 = \frac{v_0 - x_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

2.3.5. Lengéscsillapítók és linearizálás

A 2.2.2 fejezetben tárgyalt linearizálási probléma a lengéscsillapítók kapcsán is felmerül. Egy elfordulni képes rúdhoz a 2.23 ábra alapján kapcsoljunk lengéscsillapítót, mely a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzetben merőleges a rúdra. Ekkor a csillapító erő értékét az alábbi módon fejezhetjük ki: ha az egyensúlyi helyzetben d_0 távolságra van a lengéscsillapító rögzített pontja a rúdtól, akkor egy φ szöggel kitérített helyzetben a (2.34) képlettel számítható a lengéscsillapító $d(\varphi)$ hossza, ugyanúgy, mint a rugók esetében. A csillapító erő szempontjából viszont a $d(\varphi)$ távolság változási sebessége számít. Kis kitérések mellett a (2.36) képlet alapján



2.23. ábra. Lengéscsillapító deformációsebességének számítása.

közelíthetjük a $d(\varphi)$ távolságot, aminek az idő szerinti deriválásával az alábbi eredményt kapjuk:

$$\dot{d} = l\dot{\varphi} - \frac{l}{2}\varphi^2\dot{\varphi} + \frac{l^2}{2d_0}\varphi^3\dot{\varphi} + \dots$$

Így a csillapító erő nagysága kis kitérések esetén, lineáris közelítésben

$$F_{cs} = k\dot{d} \approx kl\dot{\varphi}.$$

Az erőkart a (2.41) formulával közelíthetjük, tehát kis kitérések esetén számolhatunk a rúd l hosszával. A csillapító elem által az O pontra kifejtett nyomaték így közelítőleg

$$M_{cs} = kl^2\dot{\varphi} \quad (2.58)$$

nagyságú és a $\dot{\varphi}$ szögsebességgel ellentétes irányú. A d_0 eredeti hossz tehát ebben is kiesik a linearizált kifejezésből.

2.4. Coulomb-súrlódással (száraz súrlódással) csillapított szabad rezgések

2.4.1. Súrlódási modell

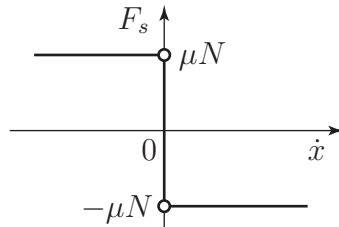
A *Coulomb-féle súrlódási modellben* a súrlódási erő a felületeket összenyomó N erővel arányos és az \dot{x} relatív sebességgel ellentétes irányú:

$$F_s = -\mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}).$$

Az egyszerűség kedvéért azonosnak tekintjük és egyaránt μ -vel jelöljük a csúszási és a tapadási súrlódási tényezőt. A sgn függvényt a 2.24 ábrával összhangban, a szokásos matematikai definíciótól eltérően értelmezzük:

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{ha } \dot{x} < 0 \\ -1 \text{ és } 1 \text{ közötti,} & \text{ha } \dot{x} = 0 \end{cases} .$$

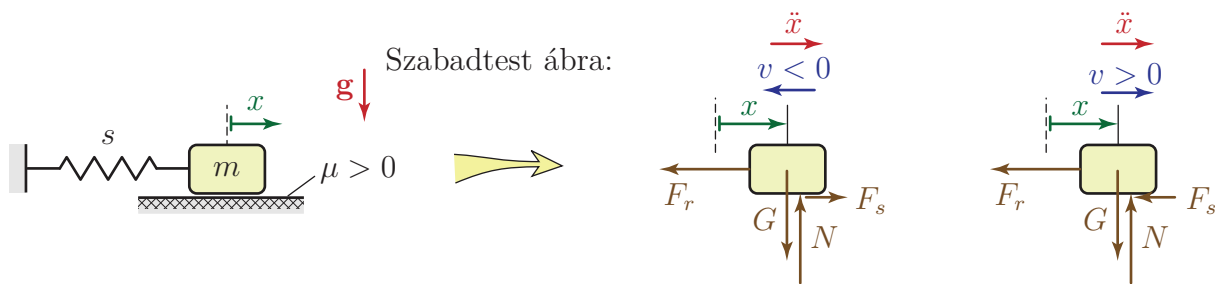
A legutolsó eset fizikailag a tapadási súrlódásnak felel meg. Letapadáskor – zérus sebesség mellett – a tapadási súrlódási erő a μN és $-\mu N$ határok között akkora értéket vesz fel, hogy egyensúlyt tartson a vizsgált testre ható többi erővel. Ez is mutatja, hogy a tapadási súrlódási erő kényszererő, értékét nem csak a sebesség határozza meg, hanem egyéb körülmények is. A sgn függvény az origóban többértékű, és nem teljesíti az ún. *Lipschitz-feltételt* sem.



2.24. ábra. A Coulomb-féle súrlódási erő karakterisztikája.

A Lipschitz-feltétel teljesülése annak bizonyításához lenne szükséges, hogy a mozgásegyenlet megoldása létezik és egyértelmű [14].

Ebben a fejezetben a 2.25 ábrán látható egyszerű Coulomb-súrlódásos lengőrendszer modellt fogjuk vizsgálni.



2.25. ábra. A száraz súrlódású lengőrendszerek alapmodellje és szabadtest ábrái negatív és pozitív sebesség esetén.

2.4.2. A mozgásegyenlet és a mozgástörvény pozitív és negatív sebesség esetén

Az előző fejezetben vázolt matematikai problémák kezelése érdekében tárgyaljuk külön a pozitív és negatív sebességű mozgást!

Negatív sebességű mozgás

Először tekintsük azt az esetet, amikor $x(0) \equiv x_0 > 0$ és $\dot{x}(0) \equiv v_0 = 0$. Ekkor a mozgás első szakaszában negatív (pontosabban: nem pozitív) lesz a sebesség. A 2.25 szabadtest ábra alapján a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -F_r + F_s,$$

tehát $F_r = sx$, $F_s = \mu N$ és $N = mg$ figyelembevételével

$$m\ddot{x} = -sx + \mu N.$$

A gyorsulás együtthatójával osztva a mozgásegyenletet,

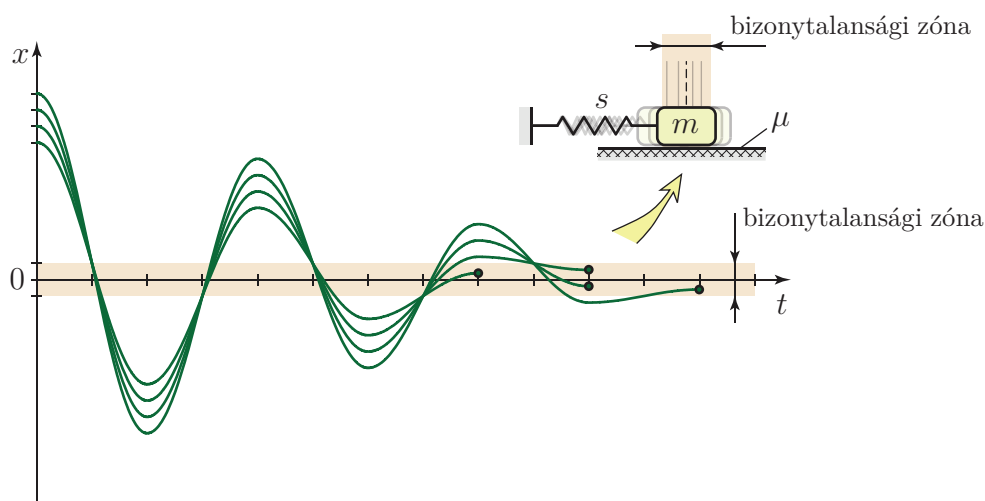
$$\ddot{x} + \frac{s}{m}x = \mu g. \quad (2.59)$$

A szokásos jelölésekkel az egyenlet sztenderd alakja

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = f_0 \alpha^2, \quad (2.60)$$

ahol bevezettük az $f_0 \equiv \mu N/s = \mu mg/s$ *statikus kitérését*. A statikus kitérés azt az egyensúlyi elmozdulást adja meg, amelyet egy állandó μN nagyságú aktív erő okozna.

Mivel μmg a tapadási súrlódási erő maximális értéke, ebben a feladatban a statikus kitérés annak a zónának a határát is megadja, amin belül a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tud tartani a rugóerővel. Egyensúly akkor lehetséges, ha $-f_0 \leq x \leq f_0$. Ezt az intervallumot *bizonytalansági zónának* nevezik, mert ezen belül bárhol letapadhat és végleg megállhat a test – hogy pontosan hol és mikor, azt csak a kezdeti feltételek ismeretében lehet kiszámítani (2.26 ábra). A gyakorlatban viszont ritkán ismertek a pontos kezdeti feltételek. Viszkózus csillapítású lineáris rendszereknek csak egy egyensúlyi helyzetük van, ott tehát nem jelenik meg ez a bizonytalanság.



2.26. ábra. Száraz súrlódású lengőrendszer rezgése a kezdeti feltételektől függően más és más kitérésnél áll meg.

(2.60) egy inhomogén differenciálegyenlet, ezért a negatív sebességű mozgásra érvényes megoldást

$$x^-(t) = x_h^-(t) + x_p^-$$

alakban keressük. Mivel a differenciálegyenlet jobb oldalán konstans áll, az inhomogén egyenlet x_p^- *partikuláris megoldását* is kereshetjük $x_p^- = \text{állandó}$ alakban, tehát $\ddot{x}_p^- = 0$. Behelyettesítve a (2.60) egyenletbe:

$$\alpha^2 x_p^- = f_0 \alpha^2,$$

amiből $x_p^- = f_0$. Nem meglepő módon a statikus kitérését kaptuk, ami az egyik egyensúlyi megoldás.

A homogén egyenlet megegyezik a (2.2) egyenlettel, tehát az *általános megoldás* alakja

$$x^-(t) = c_1 \cos(\alpha t) + c_2 \sin(\alpha t) + f_0, \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \quad (2.61)$$

A rezgés periódusideje $T = 2\pi/\alpha$ (lásd 2.1.4 fejezet), viszont a fenti megoldás csak addig érvényes, amíg a sebesség nem vált előjelet. Mivel kitérített helyzetből, zérus sebességgel indítjuk a rendszert, az első fél periódus alatt marad negatív (nem pozitív) a sebesség.

A kezdeti feltételek figyelembevételéhez szükség van a sebesség kifejezésére is:

$$\dot{x}^-(t) = -c_1 \alpha \sin(\alpha t) + c_2 \alpha \cos(\alpha t), \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \quad (2.62)$$

Az indulás pillanatában (2.61) és (2.62) alapján

$$x^-(0) = c_1 + f_0 \quad \text{és} \quad \dot{x}^-(0) = c_2 \alpha,$$

továbbá a kezdeti feltételek szerint $x(0) \equiv x^-(0) = x_0$ és $\dot{x}(0) \equiv \dot{x}^-(0) = 0$. Az egyenletrendszert megoldva⁶ $c_1 = x_0 - f_0$ és $c_2 = 0$, tehát

$$x^-(t) = (x_0 - f_0) \cos(\alpha t) + f_0, \quad t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \quad (2.63)$$

A rezgés amplitúdója $A_1 = x_0 - f_0$ és a lengés az $x = f_0$ helyzet körül történik. Így ebben a szakaszban a maximális kitérés x_0 .

Pozitív sebességű mozgás

Fél periódus után a hasáb sebessége előjelet vált és további $T/2$ ideig pozitív (nem negatív) marad. A mozgás vizsgálata az eddigiekhez hasonlóan végezhető el, az $f_0 \leftrightarrow -f_0$ cserével. A mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = -f_0 \alpha^2, \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right], \quad (2.64)$$

aminek a megoldása

$$x^+(t) = b_1 \cos(\alpha t) + b_2 \sin(\alpha t) - f_0, \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \quad (2.65)$$

alakú. A sebesség kifejezése

$$\dot{x}^+(t) = -b_1 \alpha \sin(\alpha t) + b_2 \alpha \cos(\alpha t), \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]. \quad (2.66)$$

A b_1, b_2 együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a megoldás illeszkedjen az előzőhöz, tehát a $t = T/2$ pillanatban mind a kitérésre mind a sebességre megegyező értékeket kell szolgáltatnia az $x^-(t)$ és $x^+(t)$ megoldásoknak – lásd (2.63) és (2.65). Figyelembe véve, hogy $T/2 = \pi/\alpha$,

$$\begin{aligned} x^-\left(\frac{T}{2}\right) &= (x_0 - f_0) \cos\left(\alpha \frac{\pi}{\alpha}\right) + f_0 \equiv 2f_0 - x_0 \quad \text{és} \\ x^+\left(\frac{T}{2}\right) &= b_1 \cos\left(\alpha \frac{\pi}{\alpha}\right) + b_2 \sin\left(\alpha \frac{\pi}{\alpha}\right) - f_0 \equiv -b_1 - f_0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

⁶Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kezdeti feltételeket nem a homogén, hanem az inhomogén egyenlet megoldásának, azaz az $x^-(t) = x_h^-(t) + x_p^-$ összegnek kell kielégítenie.

Mivel a két kitérés egyenlő,

$$2f_0 - x_0 = -b_1 - f_0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = x_0 - 3f_0.$$

A sebesség előjelet vált $t = T/2$ -ben, tehát $\dot{x}^-(T/2) = \dot{x}^+(T/2) = 0$, és így

$$\dot{x}^+\left(\frac{T}{2}\right) = -b_1\alpha \sin\left(\alpha\frac{\pi}{\alpha}\right) + b_2\alpha \cos\left(\alpha\frac{\pi}{\alpha}\right) \equiv -b_2\alpha$$

miatt $b_2 = 0$. Ezzel a nemnegatív sebességű szakaszon érvényes megoldás

$$x^+(t) = (x_0 - 3f_0) \cos(\alpha t) - f_0, \quad t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]. \quad (2.68)$$

Mivel a súrlódás a mechanikai energia csökkenésével jár, ennek a fél periódusnak is az elején, $t = T/2$ -ben maximális a kitérés nagysága. (2.67) alapján $x_{\max} = |x(T/2)| = x_0 - 2f_0$. A lengés az $x = -f_0$ helyzet körül történik.

A mozgás lefolyása, megállási feltétel

Egy $T = 2\pi/\alpha$ hosszúságú pozitív sebességű periódus után a sebesség ismét előjelet vált az $x^+(T) = (x_0 - 3f_0) \cos(2\pi) - f_0 \equiv x_0 - 4f_0$ kitérésnél. A további fél periódusokra vonatkozó megoldásokat szintén a bemutatott módon lehetne kiszámítani, x_0 helyett ezt az új kitérést használva az együtthatók meghatározására.

A fentiek alapján megállapítható, hogy az amplitúdó – azaz a $\cos(\alpha t)$ együtthatója – és az origótól mért maximális kitérés nagysága fél periódusonként $2f_0$ -al csökken. A rezgés lecsengése tehát *lineáris*, amint a 2.27 ábrán is látható. Negatív sebesség mellett $x = f_0$, pozitív sebesség mellett pedig $x = -f_0$ körül történik a lengés.

A száraz súrlódású lengőrendszer mozgása – a viszkózan csillapított rendszerekkel ellentétben – véges idő alatt véget ér. Addig tart a mozgás, amíg az amplitúdó $2f_0$ -nál nagyobb, mert csak ebben az esetben „ér át” a megoldás a bizonytalansági zóna másik oldalára. Mivel a sebesség mindig fél periódusonként vált előjelet, csak valamely $t = nT/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ időpontban következhet be a végleges megállás, azaz az n -edik fél lengés végén. Ha $|x_0| \leq f_0$, akkor a rendszer nyugalomban marad ($n = 0$). Egyébként a megállás feltétele

$$A_n \equiv \underbrace{(x_0 - f_0)}_{=A_1} - (n - 1) 2f_0 \leq 2f_0,$$

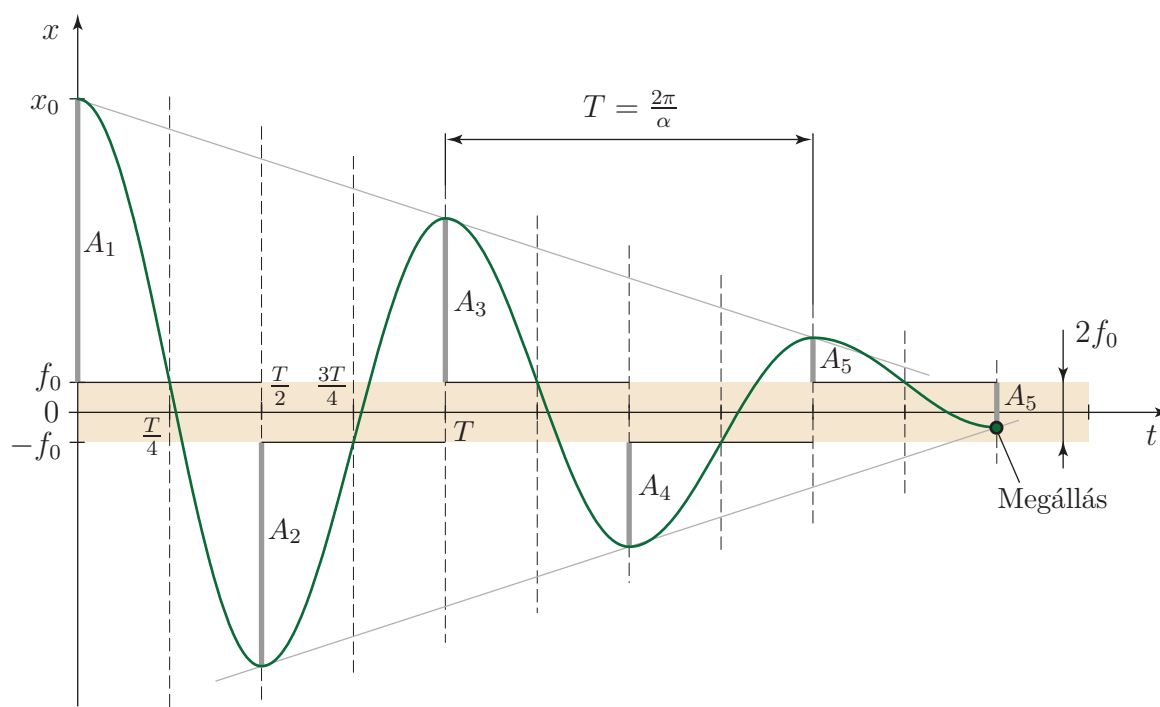
ahol A_n az n -edik fél lengés amplitúdója. A fenti egyenlőtlenségből

$$n \geq \frac{A_1}{2f_0} = \frac{x_0 - f_0}{2f_0},$$

tehát $n = \text{ceil}(A_1/(2f_0))$, ahol ceil a felfelé kerekítő függvényt jelöli. n ismeretében a megállás időpontja $t = nT/2$ és a megállás az

$$x_a = (A_n - f_0) \cos(n\pi)$$

kitérésnél következik be. Itt felhasználtuk, hogy $\cos(\alpha nT/2) = \cos(\alpha n\pi/\alpha) = \cos(n\pi)$. Páratlan n a negatív, páros n pedig a pozitív sebességű mozgásokhoz tartozik.



2.27. ábra. Száraz súrlódású lengőrendszer rezgésének lineáris ütemű csillapodása. A bizonytalansági zóna határára berajzolt vonalak azt mutatják, hogy a mozgás egyes szakaszaiban melyik pozíció körül történik a rezgés. A megállás helye $x_a = f_0 - A_5$.

2.5. A másodfajú Lagrange-egyenlet

Az eddig tárgyalt modellek mozgásegyenletét az ún. *Newton-Euler módszerrel*⁷ írtuk fel, azaz szabadtest ábra felrajzolása után alkalmaztuk a dinamika alaptételét. Összetett mechanikai rendszerek mozgásegyenletének felírása azonban hosszadalmas lehet ezen a módon, hiszen minden egyes test szabadtest ábráját fel kell rajzolni és a kinematikai összefüggéseket, kényszereket figyelembe véve általában egy sok egyenletből álló egyenletrendszerre jutunk – a Dinamika tárgy tananyagában számos ilyen feladat szerepelt.

A mozgásegyenlet ún. *analitikus módszerekkel* is felírható. Az analitikus módszerek alkalmazásához általában energia- vagy teljesítmény jellegű mennyiségeket kell megfelelően felírni – ebben a lépésben használjuk fel a kinematikai összefüggéseket –, majd differenciálások elvégzése után kapjuk meg a mozgásegyenlete(ke)t. Ilyen módszer például a *teljesítmény tétel* alkalmazása. A *másodfajú Lagrange-egyenlet*⁸ – mely bizonyos szempontból a teljesítmény tétel továbbfejlesztésének tekinthető – mind gyakorlati, mind elméleti szempontból a legfontosabb analitikus módszerek közé tartozik. Noha csak anyagi pontrendszerre vezetjük le, a másodfajú Lagrange-egyenlet merev test-rendszerekre is érvényes.

A levezetéshez alábbi jelöléseket vezetjük be:

- N az anyagi pontok száma,
- m_i , $i = 1, \dots, N$ az i -edik anyagi pont tömege,

⁷Isaac Newton, 1643-1727; Leonhard Euler, 1707-1783

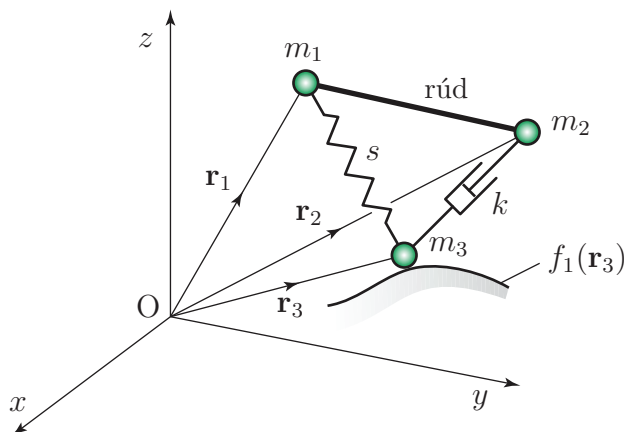
⁸Joseph Louis Lagrange, 1736-1813

- \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$ az i -edik anyagi pont helyvektora,
- \mathbf{K}_i , $i = 1, \dots, N$ az i -edik anyagi pontra ható ideális kényszererők eredője, melyek az ún. geometriai kényszereket biztosítják,
- n a rendszer szabadsági foka.

A másodfajú Lagrange-egyenlet használata elsősorban összetett mechanikai rendszerek mozgásegyenleteinek felírása során előnyös, mert a végeredményül kapott egyenletrendszerben nem jelennek meg a testek egymáshoz vagy a környezethez képest végzett mozgását korlátozó kényszerfeltételek egyenletei. Ezért a *kényszer* fogalma kiemelt fontosságú a módszer alkalmazása szempontjából.

2.5.1. A kényszerek osztályozása

A *geometriai kényszerek* a koordináták segítségével leírható összefüggések, melyek valamilyen megszorítást jelentenek a rendszer mozgására vonatkozóan. Például a 2.28 ábrán mutatott



2.28. ábra. Kölcsönható anyagi pontrendszer kényszerekkel.

esetben egy $f_1(\mathbf{r}_3) = 0$ alakú összefüggéssel fejezhető ki az, hogy az m_3 tömegű test csak egy felületen mozoghat és az $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0$ függvény adja meg azt, hogy az m_1 , m_2 testek távolsága a köztük levő l hosszúságú merev rúd miatt állandó marad.

Tehát általában N anyagi pont és g geometriai kényszer esetén g darab

$$f_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad p = 1, \dots, g \quad (2.69)$$

alakú összefüggést írhatunk fel, melyekben nem szerepelhet a sebesség kifejezése, csak a koordináták és az idő. Vannak ún. *kinematikai kényszerek* is, melyek matematikai kifejezéséhez mindenképpen szükség van a sebességekre is – pl. ilyenek a térbeli gördülési problémák. A másodfajú Lagrange-egyenlet nem alkalmas a kinematikai kényszerek kezelésére; az ilyen problémák megoldására pl. az elsőfajú Lagrange-egyenlet, a Routh-Voss-egyenlet vagy az Appell-Gibbs-egyenlet használható [4, 6]. Ebben a jegyzetben csak geometriai kényszerekkel foglalkozunk.

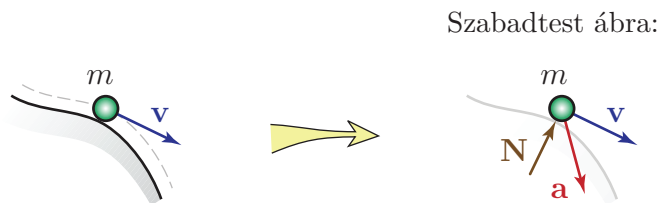
A geometriai kényszerek csökkentik a rendszer szabadsági fokát, tehát N darab anyagi pont és g geometriai kényszer esetében a szabadsági fok $n = 3N - g$. A szabadsági fok

definíciójából következően elég annyi másodrendű differenciálegyenlet a mozgás leírásához, ahány szabadsági fokú a rendszer. A másodfajú Lagrange-egyenlet alkalmazásával pontosan n darab egyenletet kapunk.

A kényszereket más szempont alapján is csoportosíthatjuk. *Ideálisnak* nevezzük azokat a kényszereket, melyek ún. *virtuális teljesítménye* zérus. Ez azt jelenti, hogy a kényszerek időtől való függését figyelmen kívül hagyva, azokat időben „befagyasztva” számoljuk ki a teljesítményt [4, 6]. Ha a kényszererők összegzett teljesítménye nulla, akkor a virtuális teljesítményük is nulla:

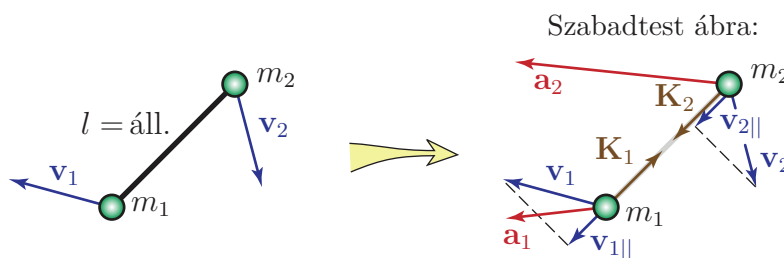
$$P = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \mathbf{v}_i = 0.$$

Itt \mathbf{v}_i az i -edik anyagi pontra ható \mathbf{K}_i kényszererő támadási pontjának, azaz magának az anyagi pontnak a sebessége. A két vektor skalárisan van összeszorozva, ezért például felületen történő mozgás esetén a normálerő ideális kényszererő: $\mathbf{N}\mathbf{v} = 0$, mert \mathbf{N} merőleges az anyagi pont \mathbf{v} sebességére (2.29 ábra).



2.29. ábra. A normálerő ideális kényszererő, mert merőleges az anyagi pont sebességére.

Ha két tömegpontot elhanyagolható tömegű rúd (vagy kötél) köt össze, akkor a rúd végpontjainak rúdirányú sebességkomponensei megegyeznek, míg a rúdról a testekre ható erők rúdirányúak és ellentétes értelműek, ezért a merev rúd is ideális kényszer (2.30 ábra): $\mathbf{K}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_{1\parallel} + \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_{2\parallel} = 0$.

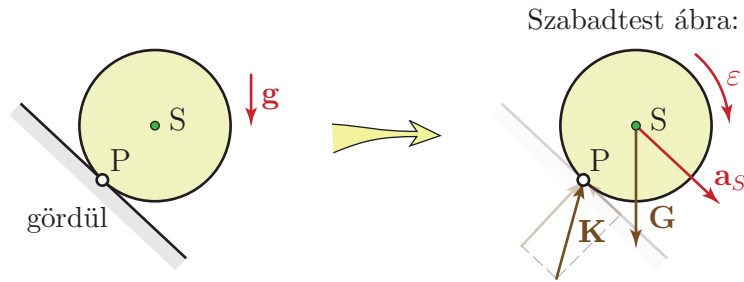


2.30. ábra. Az elhanyagolható tömegű merev rúd, mint ideális kényszer.

Gördülés során a test talajjal érintkező pontjának a sebessége zérus, tehát a talajról átadódó kényszererő teljesítménye – ezen belül a tapadási súrlódási erő teljesítménye is – nulla (2.31 ábra): $\mathbf{v}_P = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{v}_P = 0$.

A csúszási súrlódási erő teljesítménye viszont negatív, hiszen az erő a sebességgel ellentétes irányú. Tehát a csúszási súrlódás nem ideális kényszer.

Az *időtől függő kényszerek* teljesítménye nem nulla, *virtuális teljesítményük* viszont már általában nulla. Gondoljunk például egy sima felületre helyezett hasábra, melyhez rugót



2.31. ábra. A talajról a gördülő korongra átadódó kényszererő ideális.

rögzítünk. A rugó másik végének előírt függvény (pl. $\sin(\omega t)$) szerinti mozgatása – ez az ún. útgerjesztés, lásd 2.6.3 fejezet és 2.40 ábra – időtől függő kényszerként vehető figyelembe. Nyilvánvaló, hogy a rendszerrel energiát lehet közölni ezen a módon, a teljesítmény nem nulla.

Teniszezéskor a teniszütőnek vágódó labdát az ütő lassú, hátrafelé történő mozgatásával lehet lelassítani. Ennek ütemét a teniszező határozza meg, ez is egy időfüggő kényszer. Ebben az esetben az érintkezési pont sebessége ellentétes a labdára ható kényszererővel, tehát a kényszererő teljesítménye negatív.

A kiegyensúlyozatlan forgórészek tipikus esetben (jó közelítéssel) állandó szögsebességgel forognak, mozgásuk időbeli lefolyása tehát – legalább részben – elő van írva, ez is időfüggő kényszer. Mint látni fogjuk a 2.6.4 fejezetben, kiegyensúlyozatlan forgórészekkel is gerjeszthető egy lengőrendszer, a kényszererő illetve -nyomaték teljesítménye ebben az esetben sem nulla.

A felsorolt példákban az időfüggés figyelmen kívül hagyása annak felel meg, hogy a rugó végét rögzítjük, a teniszütőt nem mozgatjuk, és a kiegyensúlyozatlan forgórészt megállítjuk. Nyilvánvalóan nulla az ily módon „befagyasztott” kényszerekhez tartozó *virtuális* teljesítmény, tehát ezek is ideális kényszerek.

2.5.2. A másodfajú Lagrange-egyenlet levezetése

A Lagrange-módszer alkalmazásának első lépésében intuitív módon választunk n darab *általános koordinátát* az n szabadsági foknak megfelelően:

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Mindig több lehetőség van a koordináták megválasztására, ezek közül azt célszerű választani, amivel a legegyszerűbb számolni – ezt azonban sokszor nem lehet előre megállapítani. Mindenképpen szükséges, hogy a választott n koordináta *független* legyen – így egyértelműen le lehet írni velük a rendszer mozgását. Ebből következően mindegyik anyagi pont helyvektora kifejezhető az általános koordinátákkal:

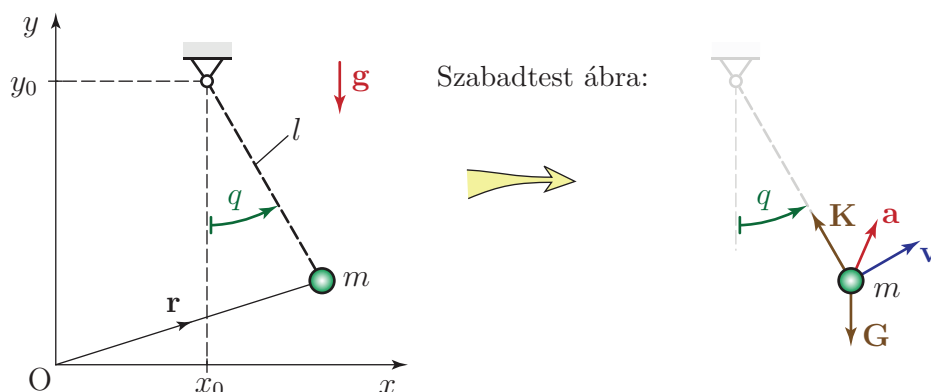
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, N,$$

illetve rövidebb jelöléssel

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.70)$$

Például a 2.32 ábrán látható matematikai inga egy szabadsági fokú ($n = 1$), a tömegpont x és y koordinátája nem független egymástól. Általános koordinátának elvileg választhatnánk az x vagy az y koordinátát is, de sokkal célszerűbb a $q \equiv \varphi$ választás. Az ábra jelöléseit használva kifejezhető a helyvektor; ennek során tulajdonképpen a geometriai kényszereket vesszük figyelembe:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_0 + l \sin(q) \\ y_0 - l \cos(q) \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$



2.32. ábra. Matematikai inga a választott $q \equiv \varphi$ általános koordinátával és a tömegpont szabadtest ábrája.

A 2.2.1 fejezetben, az ingák tárgyalása során is természetes volt a szögkitérés használata koordinátaként. Általában könnyen áttekinthető, hogy milyen kézenfekvő lehetőségek vannak az általános koordináták megválasztására. Az „általános” jelző arra utal, hogy a Lagrange-egyenlet szempontjából nem teszünk különbséget elmozdulás- és elfordulás koordináták között.

Időfüggő kényszerek esetén

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet ekkor is érvényes, de levezetéséhez be kellene vezetni az ún. *virtuális sebesség* fogalmát. Az egyszerűség kedvéért a levezetést időtől független geometriai kényszerek esetére mutatjuk meg.

Az általános koordináták időben változnak (ez nincs előre megadva, így ez nem időfüggő kényszer!), tehát a (2.70) összefüggést az összetett függvény deriválási szabálya alapján deriválhatjuk idő szerint:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (2.72)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát deriválva \dot{q}_j szerint:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.73)$$

Ezeket az összefüggéseket fel fogjuk használni a másodfajú Lagrange-egyenlet levezetése során.

A dinamika alaptétele alapján

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{K}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

ahol \mathbf{F}_i az i -edik tömegpontra ható aktív erőket és a nem ideális kényszererőket, \mathbf{K}_i pedig az ideális kényszererőket jelöli. $\dot{\mathbf{r}}_i$ -tal szorozva és összegezve

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \dot{\mathbf{r}}_i = 0,$$

hiszen az ideális kényszerekre definíció szerint $\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \dot{\mathbf{r}}_i = 0$. (2.72) behelyettesítésével

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = 0,$$

ahol $(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i)$ nem függ a j indextől (az általános koordináták indexétől), tehát a j -re és i -re történő összegzés sorrendje felcserélhető:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0. \quad (2.74)$$

Ennek az egyenletnek a mechanikai rendszer mozgása során – miközben változnak az általános koordináták – végig teljesülnie kell. Mivel a q_j általános koordináták függetlenek, a \dot{q}_j általános sebességek is egymástól függetlenül változnak. Ebből következik, hogy a j indexre számított (2.74) összeg minden egyes tagja zérus, tehát a zárójelben szereplő kifejezés is minden j indexre nulla:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.75)$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet felírásához alakítsuk át ezt a kifejezést. Az egyszerűség kedvéért a $j = 1, \dots, n$ feltételt nem írjuk ki a levezetés minden lépésében. (2.75) második tagja definíció szerint az *általános erő* j -edik komponense:

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.76)$$

ami úgy értelmezendő, hogy az \mathbf{F}_i és $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$ vektorok skaláris szorzatait kell kiszámítani és összegezni. Az általános erő komponensei attól függően erő vagy nyomaték dimenziójúak, hogy a megfelelő általános koordináta elmozdulás vagy elfordulás jellegű-e. Az „általános” jelző csak arra utal, hogy az (aktív) erőket és nyomatékokat ugyanúgy kezeljük a másodfajú Lagrange-egyenletben.

(2.75) első tagjának átalakításához felhasználjuk, hogy egy N testből álló anyagi pontrendszer kinetikus energiája

$$E_K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad \text{és} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.78)$$

A teljes idő szerinti deriváltat véve

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

A zárójelben szereplő második tag átírásához a (2.73) összefüggést használjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (2.79)$$

és az első tagra is alkalmazva a (2.73) képletet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.80)$$

(2.77) felhasználásával

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.81)$$

ami (2.75) első tagja. Így (2.75), (2.76) és (2.81) figyelembevételével felírható a *másodfajú Lagrange-egyenlet*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.82)$$

Ez az n darab egyenlet kinematikai kényszereket nem tartalmazó, n szabadsági fokú mechanikai rendszerek mozgásegyenleteit adja meg, akár időtől függő geometriai kényszerek mellett is.

2.5.3. Az általános erő meghatározása

Az általános erő j -edik komponense definíció szerint

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.83)$$

tehát kiszámításához szükség van az $\mathbf{r}_i(q_j)$ függvényre. Például a 2.32 ábrán látható matematikai inga esetében $n = N = 1$ és a (2.71) képlet adja meg az $\mathbf{r}(q)$ függvényt, amiből

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \begin{bmatrix} l \cos(q) \\ l \sin(q) \end{bmatrix}.$$

A fonálon lógó pontszerű testre ható nehézségi erő az egyetlen aktív erő, tehát

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad \text{és így az általános erő}$$

$$Q = [0 \ -mg] \cdot \begin{bmatrix} l \cos(q) \\ l \sin(q) \end{bmatrix} \equiv -mgl \sin(q),$$

ami a nehézségi erő felfüggesztési pontra számított nyomatéka.

Gyakran ennél egyszerűbben is meghatározhatók az általános erő komponensei, ha a sebességet könnyen ki tudjuk fejezni a \dot{q}_j általános sebességekkel. A (2.83) egyenletet \dot{q}_j -tal szorozva és j -re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = P, \quad (2.84)$$

hiszen (2.72) és Q_j definíciója segítségével az egyenlet bal oldala átírható:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{=\dot{\mathbf{r}}_i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i \equiv P.$$

Tehát ha a mechanikai rendszerre ható erők teljesítményét ki tudjuk fejezni (2.84) alakban, akkor a j -edik általános sebesség együtthatójaként megkapjuk az általános erő j -edik komponensét.

A matematikai inga példájában a sebesség függőleges komponense $v_y = l\dot{\varphi} \sin(\varphi)$, tehát

$$P = m\mathbf{g}\mathbf{v} = -mg l\dot{\varphi} \sin(\varphi) = \underbrace{-mgl \sin(\varphi)}_{=Q} \dot{\varphi}.$$

Még egyszerűbb az általános erő komponenseinek számítása az alábbi speciális esetekben:

- A *potenciálos erők* kifejezhetők a potenciálfüggvényük negatív gradienseként. Például egy anyagi pontrendszer i -edik pontjára ható erő

$$\mathbf{F}_i = - \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} & \frac{\partial U}{\partial y_i} & \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{bmatrix}^T.$$

Alkalmazva a (2.83) definíciót, és az összetett függvények deriválási szabályát:

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N - \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} & \frac{\partial U}{\partial y_i} & \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

A matematikai inga példájában $U = -mgl \cos(q)$, tehát $Q = -\partial U/\partial q = -mgl \sin(q)$, ahol $q \equiv \varphi$.

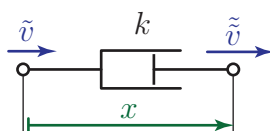
- Viszkózus csillapító elemek esetében – a rugalmas elemek potenciális energiájának mintájára – bevezethető az ún. *Rayleigh-féle disszipatív potenciál*, melynek mértékegysége J/s:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} k \dot{x}^2. \quad (2.85)$$

Itt x a lengéscsillapító két végpontjának egymáshoz képest mért elmozdulását megadó relatív koordináta. Természetesen csak a távolság \dot{x} változási sebességének van jelentősége a csillapítás szempontjából.

A csillapító erő előjelhelyesen $F_{cs} = -k\dot{x}$. Ha az x koordinátát kifejezzük a q_j általános koordinátákkal, akkor (2.83) alapján a megfelelő általános erő komponensek az alábbi alakban adhatók meg:

$$Q_j = -k\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_j}. \quad (2.86)$$



2.33. ábra. Az x relatív koordináta és az $\dot{x} = \tilde{v} - \tilde{v}$ relatív sebesség értelmezése a lengéscsillapító példája kapcsán.

Az általános erő a disszipatív potenciálból a

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.87)$$

formulával számítható, ugyanis – figyelembe véve a $\dot{x} = \dot{x}(q_j)$ kapcsolatot és a disszipatív potenciál (2.85) definícióját –

$$-\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} = -k\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.88)$$

(2.73) miatt ez átírható

$$Q_j = -k\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_j}$$

alakba, ami megegyezik a (2.86) kifejezéssel.

Tehát az általános erő j -edik komponenséhez hozzájárulhatnak potenciális erők (pl. rugóerő, nehézségi erő), csillapító erők és nem potenciális erők (pl. adott külső erő) is. A fentiek alapján a másodfajú Lagrange-egyenletnek a következő, a gyakorlatban jól használható alakját írhatjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.89)$$

ahol Q_j^* az általános erő j -edik komponensének az a része, ami nem fejezhető ki az egyenlet bal oldalán szereplő deriváltak formájában.

2.5.4. A másodfajú Lagrange-egyenlet és a Newton-Euler-módszer összehasonlítása

A másodfajú Lagrange-egyenlet használata sok szempontból előnyös a dinamika alaptételéhez (a Newton-Euler-módszerhez) képest:

- Nem szükséges szabadtest ábrákat rajzolni.
- Nem kell nagy egyenletrendszereket megoldani, a szabadsági foknak megfelelő számú egyenletet kapunk.
- Az energiakifejezések felírása után már csak deriválásokat kell elvégezni, ami jól algoritmizálható, számítógéppel is elvégezhető.

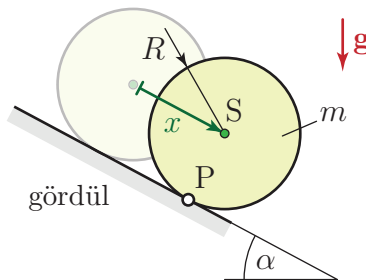
- A kinetikus energiát egyszerű alakban felírhatjuk a súlypontra és pillanatnyilag álló, nem nulla gyorsulású pontra is. Ezzel szemben a dinamika alaptételét (a perdülettételt) a súlyponton kívül csak *tartósan álló*, nulla gyorsulású pontra célszerű felírni.
- A másodfajú Lagrange-egyenlet alkalmazása során könnyen át lehet térni más (pl. henger-, gömbi polár, stb.) koordinátákra. A dinamika alaptételének esetében ez meglehetősen körülményes [7].

Természetesen hátránya is lehet a Lagrange-eljárás alkalmazásának:

- A belső erőkről nem kapunk információt; számításukhoz a mozgásegyenletek megoldása után külön szabadtest ábrákat kell rajzolni. Bizonyos esetekben alkalmazható a [7] jegyzetben leírt analitikus módszer.
- A Lagrange-egyenlet használata kevésbé szemléletes, az egyenletek mögötti fizikai tartalom nehezebben ragadható meg, mint a dinamika alaptételének felírása során.
- A másodfajú Lagrange-egyenlettel kapott egyenletrendszer és a dinamika alaptétele alapján felírt egyenletrendszer egyenértékű, de nem feltétlenül egyezik meg. Összetett mechanikai rendszerek esetében még az is előfordulhat, hogy a Lagrange-eljárás kevesebb egyenletből álló, de numerikusan mégis nehezebben megoldható egyenletrendszert szolgáltat.

2.5.5. Példák

2.2. példa: Lejtőn legördülő korong. A 2.34 ábrán vázolt, R sugarú, m tömegű tömör, homogén korong α szögű lejtőn gördül. A rendszer szabadsági foka $n = 1$. Határozzuk meg a súlypont a_S gyorsulását!



2.34. ábra. Lejtőn legördülő korong.

Válasszuk általános koordinátának a súlypont x koordinátáját; az x tengely a lejtővel párhuzamos. A korong mozgási energiája

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\omega^2.$$

A Lagrange-egyenlet alkalmazásának kulcsfontosságú lépése az energiakifejezések felírása az általános koordináták segítségével. A kinetikus energia első tagja már ki van fejezve \dot{x} -tal. A

második tag átírásához a görbülés $\omega = \dot{x}/R$ feltételét használhatjuk fel. Mivel az S súlyponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték $\Theta_s = \frac{1}{2}mR^2$,

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3}{2}m\dot{x}^2.$$

A potenciális energia

$$U = -mgx \sin(\alpha).$$

A kényszererők ideálisak, nincs csillapítás vagy nem potenciális erő, tehát $\mathcal{D} = 0$ és $Q^* = 0$. A kinetikus energia nem függ az x koordinátától, ezért

$$\frac{\partial E_K}{\partial x} = 0. \quad (2.90)$$

A (2.89) másodfajú Lagrange-egyenlet nem nulla tagjai deriválással fejezhetők ki:

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\ddot{x} \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -mg \sin(\alpha).$$

Behelyettesítve a

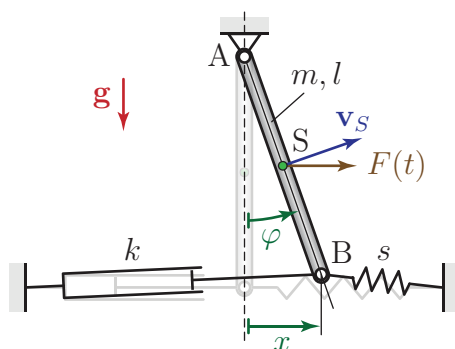
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_K}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.91)$$

Lagrange-egyenletbe:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} - mg \sin(\alpha) = 0,$$

amiből $\ddot{x} \equiv a_S = \frac{2}{3}g \sin(\alpha)$. ♠

2.3. példa: Erőgerjesztett fizikai inga. A 2.35 ábrán látható, l hosszúságú és m tömegű homogén rúdból, valamint s merevségű rugóból és k csillapítási tényezőjű lengéscsillapítóból álló lengőrendszer a függőleges síkban végezhet lengéseket. A rúd súlypontjában $F(t)$ időben változó nagyságú, vízszintes irányú erő hat. A rendszer kis kitérésű lengéseket végez a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül. Írjuk fel a rendszer linearizált mozgásegyenletét a $q \equiv \varphi$ általános koordinátával!



2.35. ábra. Csillapított, gerjesztett inga.

A mozgási energia

$$E_K = \frac{1}{2}\Theta_a\omega^2 \equiv \frac{1}{2}\Theta_a\dot{\varphi}^2,$$

ahol $\Theta_a = \frac{1}{3}ml^2$ az A csuklópontra átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték. A potenciális energia kifejezése két tagból áll: a nehézségi erő potenciális energiája a matematikai inga példája alapján

$$U^{neh} = -mg\frac{l}{2}\cos(\varphi),$$

a rugóban felhalmozódó potenciális energiát pedig a 2.2.2 fejezetben leírtaknak megfelelően közelítjük:

$$U^{rugó} = \frac{1}{2}s(\Delta d)^2 \approx \frac{1}{2}s(l\varphi)^2.$$

A disszipatív potenciált a 2.3.5 fejezet alapján az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\mathcal{D} \approx \frac{1}{2}kv_B^2 \approx \frac{1}{2}k(l\dot{\varphi})^2,$$

ahol v_B a B pont sebességének nagysága. Az S súlypontban ható külső $F(t)$ erőhöz nem tudunk potenciálfüggvényt rendelni, ezért az általános erőhöz való hozzájárulását a teljesítményéből számíthatjuk:

$$P = \mathbf{F}(t)\mathbf{v}_s = F(t)\frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos(\varphi).$$

Az általános erő nem potenciális részét a $\dot{\varphi}$ együtthatója adja meg:

$$Q^* = F(t)\frac{l}{2}\cos(\varphi). \quad (2.92)$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet alábbi alakját használjuk:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_K}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q^*.$$

Az egyenletben szereplő deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} &= \Theta_a\ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial E_K}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} &= kl^2\dot{\varphi}, \\ \frac{\partial(U^{rugó} + U^{neh})}{\partial \varphi} &= sl^2\varphi + mg\frac{l}{2}\sin(\varphi). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ezekben az egyenletekben a rugóerő és a csillapítóerő már linearizált alakkal van közelítve, míg az általános erő nem potenciális része (2.92) és a nehézségi erő nyomatéka (2.93) pontos, nemlineáris kifejezésekkel van megadva. Kis kitérések esetén ez utóbbi tagokat is linearizálhatjuk a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül és $\cos(\varphi) \approx 1$, valamint $\sin(\varphi) \approx \varphi$ behelyettesítésével megkapjuk a linearizált mozgásegyenletet:

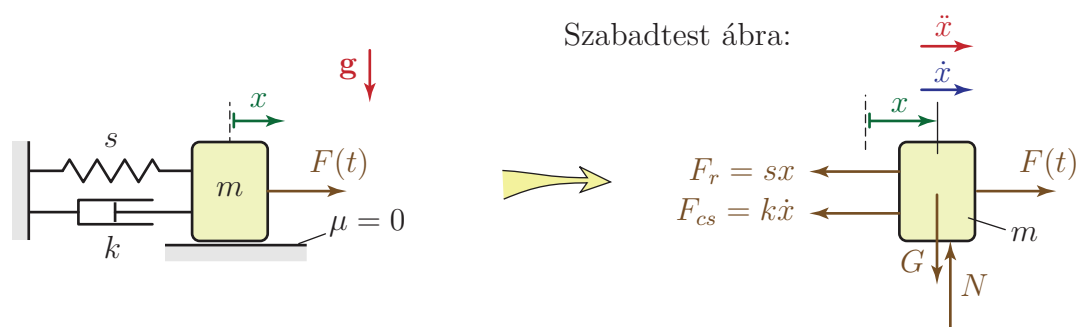
$$\Theta_a\ddot{\varphi} + kl^2\dot{\varphi} + \left(sl^2 + mg\frac{l}{2}\right)\varphi = F(t)\frac{l}{2}. \quad (2.94)$$



2.6. Gerjesztett lengőrendszerek

2.6.1. Gerjesztés típusok

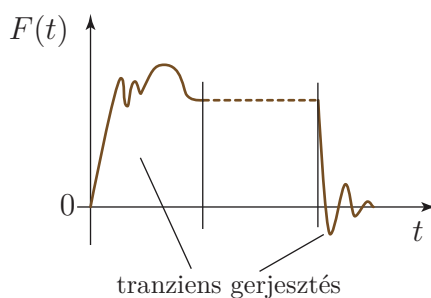
A gépekre, szerkezetekre gyakran hat valamilyen gerjesztő hatás, ami befolyásolja vagy meg is határozza a létrejövő rezgéseket. A *gerjesztett lengőrendszerek* alapmodellje a 2.36 ábrán látható.



2.36. ábra. A gerjesztett, egy szabadsági fokú lengőrendszerek alapmodellje.

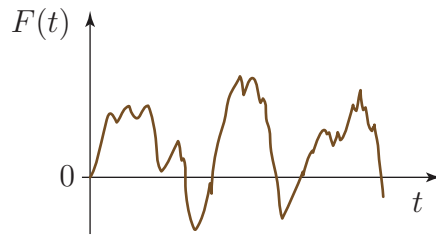
A gerjesztést egy $F(t)$ erővel vesszük figyelembe. Az $F(t)$ *függvény jellege* alapján az alábbi gerjesztés típusokat különböztetjük meg:

1. *Tranziens*, azaz *átmeneti gerjesztés*. Egy tranziens gerjesztő jel a vizsgált időtartam hosszához képest rövid ideig tart. A tranziens egy állandósult alakú – ún. *stacionárius* – jel követi. Ilyen jelenséget tapasztalhatunk például egy gép be- és kikapcsolásakor (2.37 ábra).

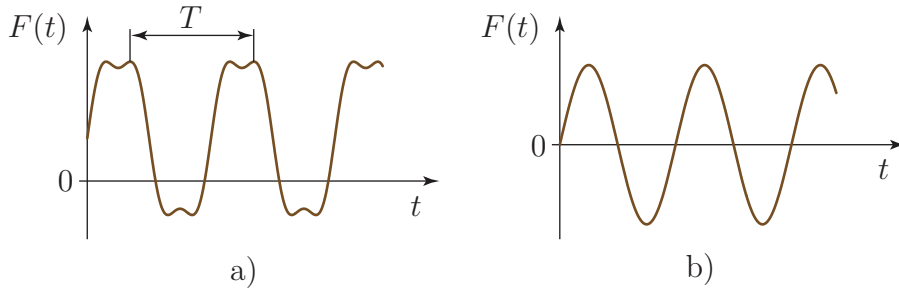


2.37. ábra. Példa tranziens gerjesztésre gép be- és kikapcsolásakor.

2. *Sztocasztikus*, azaz *véletlenszerű gerjesztésre* jó példa a közúti járművekre ható erőnek az útfelület egyenetlenségei miatti ingadozása (2.38 ábra).
3. Matematikailag legjobban a *periodikus gerjesztések* kezelhetőek, ezen belül is a legfontosabbak a *harmonikus* (tiszta szinuszos vagy koszinuszos jellegű) gerjesztések (2.39 ábra).



2.38. ábra. Egy sztochasztikus gerjesztő jel.



2.39. ábra. Periodikus (a) és harmonikus (b) gerjesztés.

A periodikus függvények elég általános feltételek mellett *Fourier-sorba* fejthetők [8], tehát trigonometrikus függvények összegeként fejezhetők ki. Ha a periódusidő T , akkor

$$F(t) = \frac{F_{c0}}{2} + F_{c1} \cos(\omega t) + F_{s1} \sin(\omega t) + F_{c2} \cos(2\omega t) + F_{s2} \sin(2\omega t) + \dots,$$

ahol az ω körfrekvencia a periódusidőből számítható: $\omega = 2\pi/T$. A fenti kifejezés együtthatói

$$F_{cj} = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F_{sj} = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt, \quad j = 1, 2, \dots$$

Ha adott egy

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = F(t) \quad (2.95)$$

lineáris differenciálegyenlet, ahol $F(t)$ periodikus, akkor a közelítő megoldást az $F(t)$ Fourier-sorba fejtésével határozhatjuk meg. Annyi differenciálegyenletet kell ehhez felírni, ahány tagot figyelembe akarunk venni a Fourier-sorból:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{c0} + k\dot{x}_{c0} + sx_{c0} &= \frac{F_{c0}}{2} \\ m\ddot{x}_{c1} + k\dot{x}_{c1} + sx_{c1} &= F_{c1} \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_{s1} + k\dot{x}_{s1} + sx_{s1} &= F_{s1} \sin(\omega t) \\ m\ddot{x}_{c2} + k\dot{x}_{c2} + sx_{c2} &= F_{c2} \cos(2\omega t) \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_{sn} + k\dot{x}_{sn} + sx_{sn} &= F_{sn} \sin(n\omega t). \end{aligned}$$

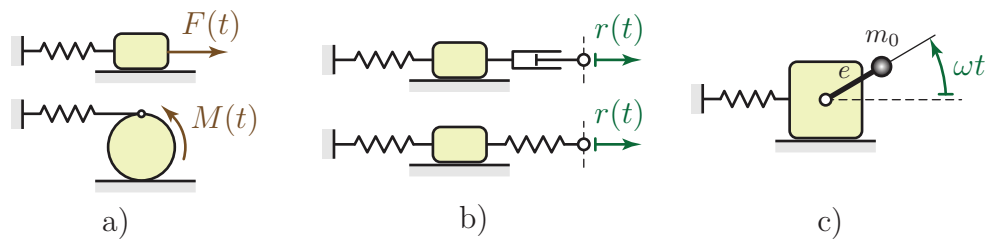
A szuperpozíció-elv miatt a gerjesztés egyes komponenseinek hatása összeadódik, tehát (2.95) közelítő megoldása

$$x(t) \approx x_{c0}(t) + x_{c1}(t) + x_{s1}(t) + x_{c2}(t) + \dots + x_{sn}(t).$$

A fenti módszert alkalmazva tehát elegendő az általánosabb, periodikusan gerjesztett rendszert helyettesítő harmonikusan gerjesztett lengőrendszerek mozgásegyenletét vizsgálni.

A gerjesztés *forrása* szempontjából is több különböző gerjesztés típust különböztetünk meg:

1. *Erőgerjesztésnek* illetve *nyomatékgerjesztésnek* nevezzük, amikor a vizsgált lengőrendszerre $F(t)$ vagy $M(t)$ függvénnyel megadott külső erő vagy nyomaték hat. Ez a két eset a mozgásegyenlet felírása szempontjából teljesen azonos módon kezelhető.
2. Ha a lengőrendszerhez kapcsolódó rugalmas vagy csillapító elem egy pontjának az elmozdulása van megadva egy $r(t)$ függvénnyel, akkor *útgerjesztésről* beszélünk.
3. A gerjesztésnek „belső” forrása is lehet: a *kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés*.



2.40. ábra. Erő- és nyomatékgerjesztés (a), útgerjesztés (b), kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés (c).

2.6.2. Harmonikus gerjesztés analitikus vizsgálata – erőgerjesztés

A 2.36 ábrán látható erőgerjesztett alapmodellben legyen $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$! Itt F_0 a *gerjesztés amplitúdója*, ω pedig a *gerjesztés körfrekvenciája*. A mozgásegyenlet könnyen felírható a szabadtest ábra alapján vagy a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = F_0 \cos(\omega t). \quad (2.96)$$

A korábban is követett eljárásnak megfelelően, az m tömeggel osztva kapjuk meg a mozgásegyenlet sztenderd alakját:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=2D\alpha} \dot{x} + \underbrace{\frac{s}{m}}_{=\alpha^2} x &= \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{=f_0\alpha^2} \cos(\omega t) \\ &\Downarrow \\ \ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x &= f_0\alpha^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Az itt bevezetett

$$f_0 = \frac{F_0}{m\alpha^2} \equiv \frac{F_0}{s}$$

paramétert *statikus kitérésnek* (vagy *statikus deformációnak*) nevezzük, ugyanúgy, mint a 2.4.2 fejezetben. Ennyi lenne a hasáb elmozdulása, ha állandó F_0 nagyságú erő tartana egyensúlyt a rugóerővel.

Mivel inhomogén a fenti differenciálegyenlet, a megoldást

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

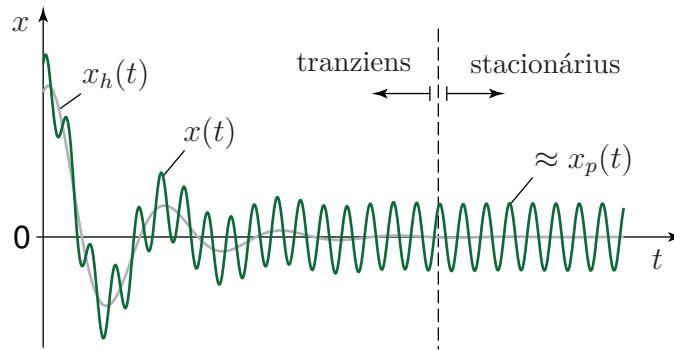
alakban kereshetjük. A homogén egyenlet $x_h(t)$ általános megoldását a gyakorlat számára legfontosabb, gyengén csillapított esetben a (2.46) egyenlet adja meg, azaz:

$$x_h(t) = e^{-D\alpha t} (c_1 \cos(\gamma t) + c_2 \sin(\gamma t)), \quad \text{ahol} \quad \gamma = \alpha \sqrt{1 - D^2}.$$

Csillapított rendszerekben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0,$$

tehát a homogén egyenlet megoldása exponenciális ütemben lecseng és így csak a mozgás első szakaszában megfigyelhető tranziens (átmeneti) rezgéseket befolyásolja (2.41 ábra).



2.41. ábra. Egy gerjesztett és csillapított lengőrendszer mozgástörvénye.

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t)$ miatt elég hosszú idő elteltével – az ún. *stacionárius rezgés* során – a megoldás gyakorlatilag megegyezik a gerjesztéssel kapcsolatos $x_p(t)$ partikuláris megoldással, amit ezért *stacionárius (állandósult) megoldásnak* is neveznek.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását olyan függvény alakjában keressük, mint amilyen az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés – jelen esetben tehát trigonometrikus alakban:

$$x_p(t) = K \cos(\omega t) + L \sin(\omega t). \quad (2.98)$$

Később látni fogjuk, hogy a csillapításnak megfelelő, \dot{x} -ot tartalmazó tag miatt nem elég csak $x_p(t) = K \cos(\omega t)$ alakban keresni a megoldást; a gerjesztés és a megoldás (a „válasz”) ugyanis csillapított rendszer esetén nem lesznek azonos fázisban.

A partikuláris megoldás próbafüggvényét helyettesítsük be a (2.97) mozgásegyenletbe! Ehhez az alábbi deriváltakra van szükség:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -K\omega \sin(\omega t) + L\omega \cos(\omega t) \quad \text{és} \\ \ddot{x}_p(t) &= -K\omega^2 \cos(\omega t) - L\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Behelyettesítés és rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(-K\omega^2 + 2D\alpha\omega L + \alpha^2 K - f_0\alpha^2\right) \cos(\omega t) + \left(-L\omega^2 - 2D\alpha\omega K + \alpha^2 L\right) \sin(\omega t) = 0.$$

Mivel $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ lineárisan függetlenek (tehát nem egymás konstansszorosai), ez az egyenlet csak úgy teljesülhet minden t időpontban, ha a zárójeles kifejezések külön-külön egyenlőek nullával. Az így kapott két egyenletet kell megoldanunk a K és L ismeretlenek meghatározásához:

$$-K\omega^2 + 2D\alpha\omega L + \alpha^2 K = f_0\alpha^2, \quad (2.99)$$

$$-L\omega^2 - 2D\alpha\omega K + \alpha^2 L = 0. \quad (2.100)$$

A számítás egyszerűsítése érdekében osszuk el ezeket az egyenleteket α^2 -tel és vezessük be a dimenziótlan

$$\lambda \equiv \frac{\omega}{\alpha}$$

frekvenciahányadost (más néven *frekvenciaviszonyt* vagy *hangolást*), mely tehát a gerjesztés körfrekvenciájának és a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciájának a hányadosa. Az osztás után a

$$\begin{aligned} -K\lambda^2 + 2D\lambda L + K &= f_0, \\ -L\lambda^2 - 2D\lambda K + L &= 0 \end{aligned}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszert kapjuk. Mátrixos formában felírva

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & 2D\lambda \\ -2D\lambda & 1 - \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nulla. Ez az ún. *matematikai értelemben vett rezonancia*:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda^2 & 2D\lambda \\ -2D\lambda & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = (1 - \lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \quad D = 0.$$

Tehát matematikai értelemben akkor beszélünk rezonanciáról, ha a csillapítás nulla és a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciájával. Gyakorlati szempontból akkor is túlságosan nagy lehet a kitérés, ha csak megközelítjük a matematikai értelemben vett rezonanciát – tehát kicsi, de nem nulla az együtthatómátrix determinánsa. *Mérnöki értelemben* akkor beszélünk rezonanciáról, ha

$$0,8 < \lambda < 1,3 \quad \text{és} \quad D < 0,1. \quad (2.102)$$

Ha nincs rezonancia, akkor a (2.101) egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned} K &= \frac{1 - \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2} f_0, \\ L &= \frac{2D\lambda}{(1 - \lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2} f_0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Ebből a megoldásból látszik, hogy $D \neq 0$ mellett $L \neq 0$, ezért szükség van az $L \sin(\omega t)$ tagra a próbafüggvényben.

Már a csillapítatlan lengőrendszerek kapcsán láttuk (lásd (2.9) és (2.10)), hogy egy (2.98) alakú megoldás

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \vartheta) = \underbrace{A \cos(\vartheta)}_{=K} \cos(\omega t) + \underbrace{A \sin(\vartheta)}_{=L} \sin(\omega t) \quad (2.104)$$

alakban is felírható. Itt A a *stacionárius gerjesztett rezgés amplitúdója*, ϑ pedig a *fáziskésés* vagy *fázisszög*. A fáziskésés elnevezése is mutatja, hogy a kialakuló rezgés késik a gerjesztéshez képest, ezért is vettük fel negatív előjellel a megoldásban.

A (2.104) egyenletben szereplő paraméterek kifejezhetők az alábbi módon:

$$\left. \begin{array}{l} A \cos(\vartheta) = K \\ A \sin(\vartheta) = L \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \sqrt{K^2 + L^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}}, \\ \tan(\vartheta) = \frac{L}{K} = \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2}. \end{array} \quad (2.105)$$

A gerjesztett rendszerek vizsgálatát megkönnyíti a dimenziótlan

$$N \equiv \frac{A}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}} \quad (2.106)$$

nagyítás bevezetése. A nagyítás azt adja meg, hogy hányszor akkora a harmonikusan gerjesztett rendszer maximális kitérése, mint ha állandó F_0 nagyságú erő hatna rá. A nagyítással tehát a dinamikus és a statikus terhelést lehet összehasonlítani.

Vizsgáljuk meg az $N(\lambda)$ függvény 2.42 ábrán látható grafikonját, az ún. *rezonanciagörbét* vagy *nagyítási görbét* különböző D paraméterek mellett! Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

- minden csillapítási tényező értéknél $N(\lambda = 0) = 1$. Ez annak felel meg, hogy állandó nagyságú a gerjesztő erő, ezért $A = f_0$ elmozdulás következik be, a statikus kitérés definíciójával összhangban.
- $D = 0$ esetén $N(\lambda) = 1/|1 - \lambda^2|$, tehát $N(\sqrt{2}) = 1$ és $\lim_{\lambda \rightarrow 1} N(\lambda) = \infty$.
- $D = 0,5$ -nél $N(\lambda = 1) = 1$.

A rezonanciagörbe λ^* *maximumhelyét* és N^* maximumát a λ frekvenciahányados szerinti deriválással határozhatjuk meg:

$$\left. \frac{dN}{d\lambda} \right|_{\lambda^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = \sqrt{1 - 2D^2},$$

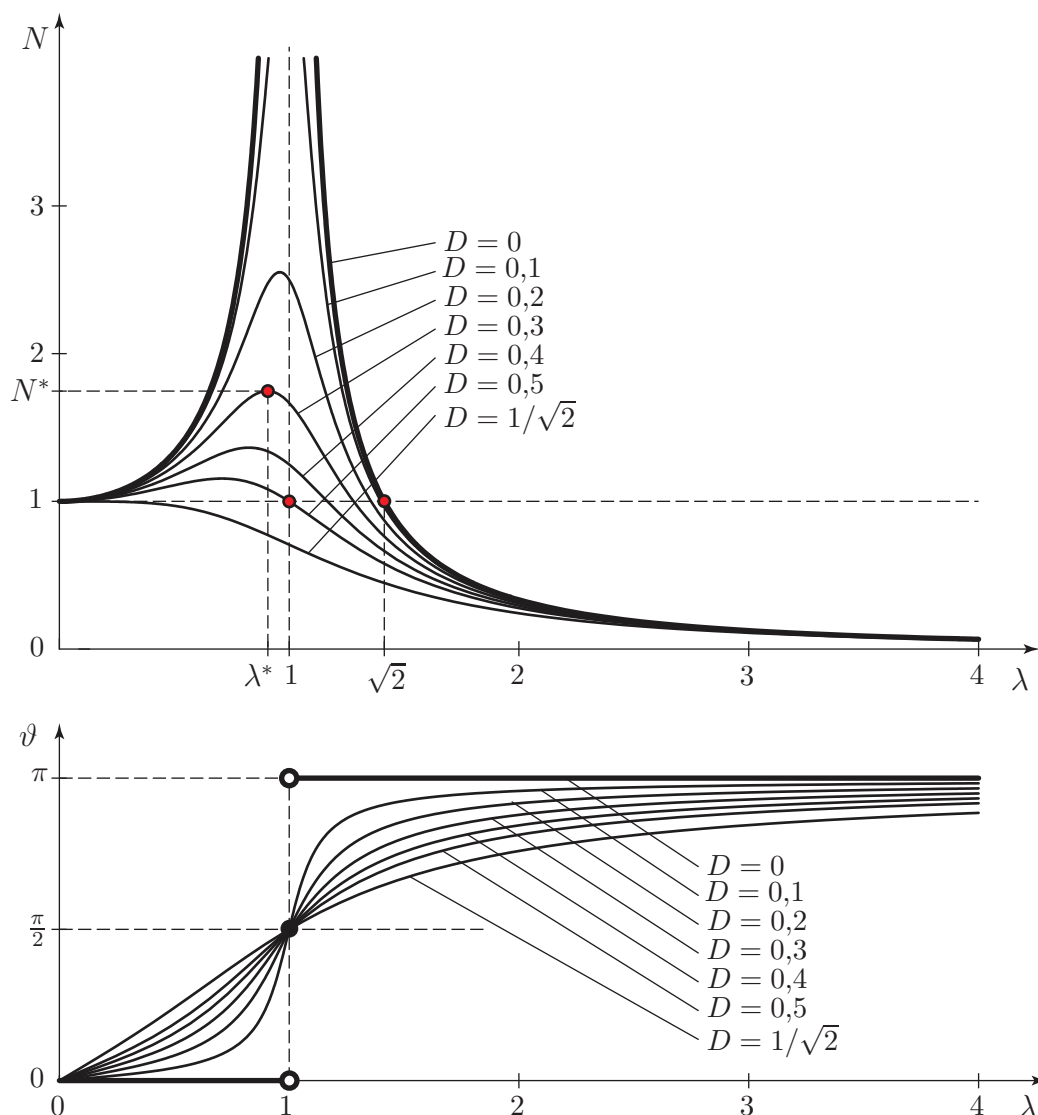
amiből a maximális nagyítás értéke

$$N^* \equiv N(\lambda^*) = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}}.$$

A fenti képletek szerint a D relatív csillapítás növelésével a görbe maximumhelye eltolódik a kisebb λ frekvenciahányados értékek felé. $D = 1/\sqrt{2}$ -nél nagyobb csillapítás mellett már monoton csökkenővé válik az $N(\lambda)$ függvény, ezért ezekben az esetekben $\lambda^* = 0$ és $N^* = 1$.

Az ω^* *rezonancia körfrekvencia* a maximális nagyításhoz tartozó gerjesztési körfrekvencia:

$$\omega^* \equiv \alpha \lambda^* = \alpha \sqrt{1 - 2D^2}. \quad (2.107)$$



2.42. ábra. Rezonanciagörbe és fáziskésés diagram.

Értéke kisebb mind a csillapított, mind a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciájánál:

$$\omega^* < \gamma \equiv \alpha\sqrt{1-D^2} < \alpha,$$

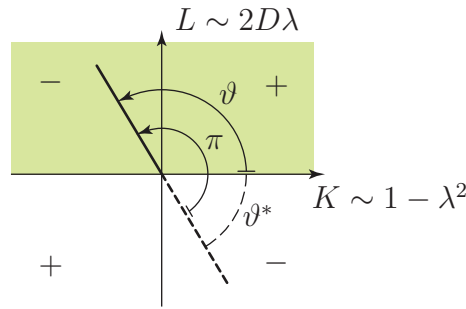
bár $D < 0,1$ mellett ezek a frekvenciák jó közelítéssel egyenlőnek tekinthetők.

A fáziskésés vagy fázisszög (2.105) alapján a

$$\tan(\vartheta) = \frac{L}{K} = \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2}$$

képlettel számítható ki. Mivel az $L = A \sin(\vartheta)$ számláló nem lehet negatív – ez a (2.103) képletből látszik –, $\sin(\vartheta) \geq 0$, ezért $\vartheta \in [0, \pi]$. Ha $\lambda < 1$, akkor $\vartheta \in [0, \pi/2]$, míg $\lambda > 1$ frekvenciahányadosnál $\vartheta \in [\pi/2, \pi]$ – ez utóbbi esetben a számológépek által kiszámolt negatív szöghöz π radiánt kell hozzáadni, a 2.43 ábrának megfelelően.

A fáziskésés $\vartheta(\lambda)$ grafikonja a 2.42 ábrán látható. Ha nincs csillapítás ($D = 0$), akkor a $\lambda < 1$ tartományban $\vartheta = 0$, tehát a gerjesztés és a létrejövő rezgés fázisban vannak.



2.43. ábra. A fáziskésés számítása. $L \sim 2D\lambda \geq 0$ miatt $\vartheta \in [0, \pi]$.

Ugyanakkor $\lambda > 1$ -re $\vartheta = \pi$ adódik, azaz ebben az esetben ellentétes fázisban van a gerjesztés és a válasz. Ez könnyen szemléltethető egy kis csillapítású rugóra függesztett test rázásával: lassú rázás esetén azonos fázisban, gyors rázás esetén ellentétes fázisban mozog a test a kezünkkel.

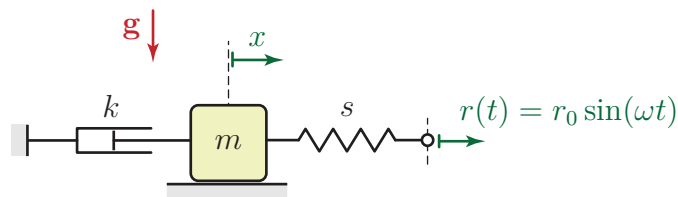
Pozitív csillapítás mellett folytonos lesz a $\vartheta(\lambda)$ görbe. A csillapítástól függetlenül, $\lambda = 1$ -nél $\tan(\vartheta) = \infty$, azaz $\vartheta = \pi/2$ (lásd 2.20 ábra).

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda = 1$ frekvenciahányadosnál a partikuláris megoldás $x_p(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin(\omega t)$, a sebesség pedig $v_p(t) = A\omega \cos(\omega t)$. Ilyenkor az $F_0 \cos(\omega t)$ gerjesztő erő mindig azonos fázisban van a sebességgel, a sebesség növelése irányában hat.

2.6.3. Útgerjesztés

Gerjesztés rugón keresztül

Az *útgerjesztés* elnevezést gyakran leszűkített értelemben használják, arra az esetre, amikor rugón keresztül történik a lengőrendszer gerjesztése. Az ehhez az esethez tartozó alapmodell látható a 2.44 ábrán. Itt a rugó egyik végpontjának az elmozdulása van előírva az $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ függvénnyel.



2.44. ábra. Az útgerjesztés alapmodellje.

Az általános koordináta $q \equiv x$, tehát a másodfajú Lagrange-egyenlet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_K}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q^* \quad (2.108)$$

alakú. A kinetikus energiából és a disszipatív potenciálból származó tagok számítása egyszerű:

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial E_K}{\partial x} = 0. \quad (2.109)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}k\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = k\dot{x}. \quad (2.110)$$

A potenciális energia a rugó Δx deformációjával írható fel. Mivel a rugó egyik vége az előírt $r(t)$ függvény szerint mozog, a másik vége pedig a hasábal együtt, ezért $\Delta x = x - r(t)$, így

$$U \equiv \frac{1}{2}s\Delta x^2 = \frac{1}{2}s(x - r(t))^2.$$

A potenciális energiát deriválva előáll a rugóban ébredő erőt megadó kifejezés:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = s(x - r(t)). \quad (2.111)$$

Látható, hogy ebben az esetben a potenciális energia kifejezésének a deriválásával kaptunk egy gerjesztésnek megfelelő kifejezést. Mivel nincsenek nem potenciális erők, ezért $Q^* = 0$. A (2.109), (2.110) és (2.111) kifejezéseket behelyettesítve a (2.108) Lagrange-egyenletbe és csak az x -et vagy annak deriváltjait tartalmazó tagokat megtartva a bal oldalon, az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = sr_0 \sin(\omega t).$$

Az egyenlet sztenderd alakja:

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2 \sin(\omega t),$$

ahol

$$f_0 = \frac{sr_0}{m\alpha^2} = r_0. \quad (2.112)$$

A mozgásegyenlet stacionárius megoldása a gerjesztés szinuszos jellege miatt

$$x_p(t) = A \sin(\omega t - \vartheta),$$

a (2.105) egyenlettel megadott A és ϑ paraméterekkel.

A rugó méretezéséhez szükség lehet a *maximális rugóerő* meghatározására is. A (2.111) képlet alapján a rugóerő

$$F_r(t) = s(x(t) - r(t)). \quad (2.113)$$

Ha a stacionárius rezgést vizsgáljuk, akkor $x(t) = x_p(t)$ és $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ behelyettesítésével

$$\begin{aligned} F_r(t) &= sA \sin(\omega t - \vartheta) - sr_0 \sin(\omega t) \\ &\equiv s(A \cos(\vartheta) - r_0) \sin(\omega t) - sA \sin(\vartheta) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Jelöljük $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatóját F_s -sel illetve F_c -vel, tehát legyen

$$\begin{aligned} F_s &= s(A \cos(\vartheta) - r_0) \quad \text{és} \\ F_c &= -sA \sin(\vartheta). \end{aligned}$$

A maximális rugóerő meghatározásához írjuk fel a rugóerő kifejezését

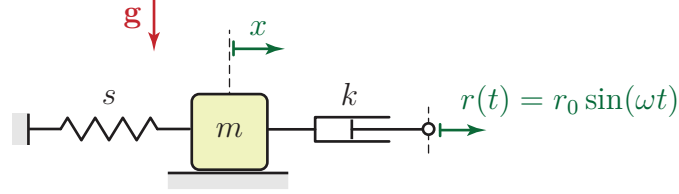
$$F_r(t) = F_{r\max} \sin(\omega t + \delta) \equiv \underbrace{F_{r\max} \cos(\delta)}_{=F_s} \sin(\omega t) + \underbrace{F_{r\max} \sin(\delta)}_{=F_c} \cos(\omega t) \quad (2.115)$$

alakban. (2.114) és (2.115) megfelelő együtthatóinak egyenlősége miatt a maximális rugóerő

$$F_{r\max} \equiv \sqrt{(F_{r\max} \cos(\delta))^2 + (F_{r\max} \sin(\delta))^2} = \sqrt{F_s^2 + F_c^2} = s\sqrt{A^2 - 2Ar_0 \cos(\vartheta) + r_0^2}.$$

Gerjesztés lengéscsillapítón keresztül

A gyakorlatban ritkábban használatos az az útgerjesztés modell, amelyben egy lengéscsillapító egyik végpontjának az elmozdulása adott $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ alakban (2.45 ábra). Az



2.45. ábra. Gerjesztés lengéscsillapítón keresztül.

általános koordináta most is $q \equiv x$. A mozgásegyenlet felírása során ismét a másodfajú Lagrange-egyenletet alkalmazzuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_K}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q^*. \quad (2.116)$$

A Lagrange-egyenletnek megfelelő deriváltak:

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial E_K}{\partial x} = 0 \quad \text{és}$$

$$U = \frac{1}{2} s x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = s x.$$

A disszipatív potenciál kifejezésébe a lengéscsillapító két végpontjának sebességkülönbségét kell beírni. A lengéscsillapító előírt mozgású végpontjának sebessége $\dot{r}(t) = r_0 \omega \cos(\omega t)$, ezért

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} k (\dot{x} - \dot{r}(t))^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = k (\dot{x} - \dot{r}(t)) \equiv k \dot{x} - k r_0 \omega \cos(\omega t).$$

A mozgásegyenlet a (2.116) Lagrange-egyenlet alapján

$$m \ddot{x} + k \dot{x} + s x = k r_0 \omega \cos(\omega t),$$

ezúttal tehát a disszipatív potenciál deriválása szolgáltatja az egyenletben a gerjesztés megfelelő kifejezését. Az egyenlet sztenderd alakja:

$$\ddot{x} + 2D\alpha \dot{x} + \alpha^2 x = f_0 \alpha^2 \cos(\omega t),$$

ahol a $k = 2D\alpha m$ és $\lambda = \omega/\alpha$ összefüggéseket felhasználva

$$f_0 = \frac{k r_0 \omega}{m \alpha^2} = 2D \lambda r_0. \quad (2.117)$$

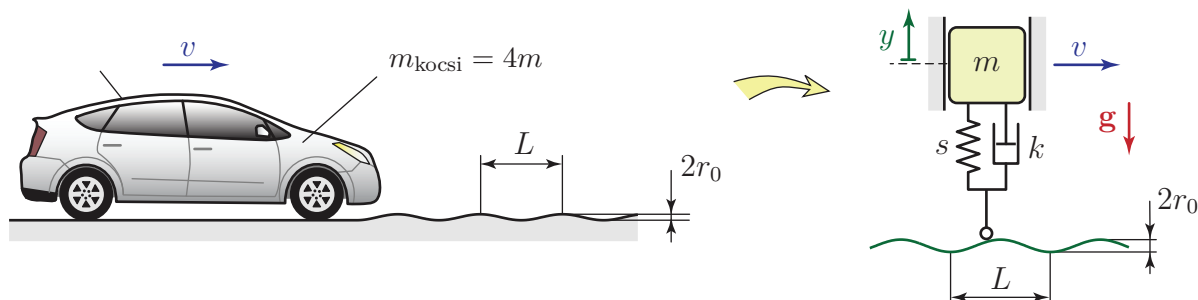
Most tehát a statikus kitérés is függ a gerjesztési frekvenciától, de természetesen továbbra is $x_p(t) = A \cos(\omega t - \vartheta)$ alakban adható meg az állandósult megoldás. (2.105) alapján

$$A = N f_0 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4D^2 \lambda^2}} 2D \lambda r_0. \quad (2.118)$$

Tervezés során hasznos lehet egy új nagyítási függvény bevezetése az r_0 együtthatójaként ($N' = 2D\lambda N$), ami már az összes frekvenciafüggő tényezőt tartalmazza.

Gerjesztés rugón és lengéscsillapítón keresztül

Az előző két modell kombinációjaként kapjuk a gépkocsi legegyszerűbb egyszabadságfokú modelljét, a 2.46 ábrán látható ún. negyed járműmodellt. A gerjesztést az útegyenetlenség okozza, melynek alakját L periódusú (hullámhosszú) és r_0 amplitúdójú szinuszhullámmal közelítjük: $r(x) = r_0 \sin(2\pi x/L)$. Írjuk fel a rendszer mozgásegyenletét a $q \equiv y$ általános koordinátával!



2.46. ábra. Negyed járműmodell úttestről átadódó gerjesztéssel.

Ha a jármű v sebességgel halad, akkor $T = L/v$ idő alatt teszi meg a két szomszédos kiemelkedés közötti utat, tehát ez a gerjesztés periódusideje. Innen a gerjesztés körfrekvenciája $\omega = 2\pi/T = 2\pi v/L$ és $r(t) = r_0 \sin(\omega t) \equiv r_0 \sin(2\pi vt/L)$. Pontosan ilyen alakú gerjesztést vizsgáltunk az előző két útgerjesztés modellben is.

A Lagrange-egyenletet alkalmazva belátható, hogy a mozgásegyenlet jobb oldalán az előző két példában kapott gerjesztő tagok összege jelenik meg:

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + sy = sr_0 \sin(\omega t) + kr_0\omega \cos(\omega t).$$

Az egyenletet elosztva az m tömeggel:

$$\ddot{y} + 2D\alpha\dot{y} + \alpha^2 y = f_1\alpha^2 \sin(\omega t) + f_2\alpha^2 \cos(\omega t),$$

ahol (2.112) és (2.117) alapján

$$f_1 = r_0, \quad \text{és} \quad f_2 = 2D\lambda r_0.$$

Az egyenlet jobb oldalát átalakíthatjuk sztenderd alakba:

$$f_0\alpha^2 \sin(\omega t + \delta) = f_1\alpha^2 \sin(\omega t) + f_2\alpha^2 \cos(\omega t).$$

Az f_0 statikus kitérés meghatározásához alkalmazzuk az addíciós tételt:

$$f_0 \sin(\omega t + \delta) = \underbrace{f_0 \cos(\delta)}_{=f_1} \sin(\omega t) + \underbrace{f_0 \sin(\delta)}_{=f_2} \cos(\omega t),$$

ahol $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatói az előző egyenlet alapján éppen f_1 illetve f_2 . Tehát $f_1 = f_0 \cos(\delta)$ és $f_2 = f_0 \sin(\delta)$, így

$$f_0 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = r_0 \sqrt{1 + (2D\lambda)^2} \quad \text{és}$$

$$\tan(\delta) = \frac{f_2}{f_1} \equiv 2D\lambda.$$

Most $f_1 = r_0 > 0$ és $f_2 = 2D\lambda r_0 > 0$ miatt $\delta \in (0, \pi/2)$. Az állandósult rezgést az

$$x_p(t) = A \sin(\omega t + \delta - \vartheta)$$

függvény írja le, tehát a stacionárius rezgés továbbra is ϑ fázissal késik a gerjesztéshez képest, a δ fázisszög ezt nem befolyásolja. A gerjesztés és válasz közötti fáziskésés

$$\tan \vartheta = \frac{2D\lambda}{1 - \lambda^2}$$

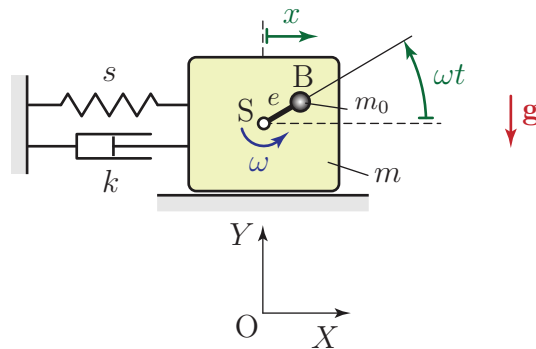
alapján számítható, az állandósult rezgés amplitúdója pedig

$$A = N f_0 = \frac{\sqrt{1 + (2D\lambda)^2}}{\underbrace{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}}_{=N''}} r_0, \quad (2.119)$$

a (2.105) képleteknek megfelelően. Mivel az f_0 statikus kitérés frekvenciafüggő, tervezéshez célszerű az r_0 együtthatójának, az $N'' = \sqrt{1 + (2D\lambda)^2} N$ alakban felírható kifejezésnek a használata.

2.6.4. Kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés

A gépészmérnöki gyakorlatban nagy jelentősége van a *kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztésnek*, hiszen a gépek általában tartalmaznak valamilyen forgó alkatrészt. A megfelelő alapmodell a 2.47 ábrán látható. Itt a statikus kiegyensúlyozatlanságot egy m_0 tömegű, pontszerű testtel vesszük figyelembe, mely e excentricitással – egy e hosszúságú merev rúd végére rögzítve –, ω szögsebességgel mozog. $t = 0$ -ban a rúd vízszintes, az x koordinátát az S súlypont egyensúlyi helyzetétől mérjük. Bár egy szabadsági fokú a rendszer, az energiakifejezések felírásához célszerű felvenni az (X, Y) koordináta-rendszert, ahol $X \equiv x$.



2.47. ábra. Kiegyensúlyozatlan forgórészrel gerjesztett lengőrendszer alapmodellje.

A rendszer mozgási energiája a két test energiájának az összege:

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_0 v_B^2.$$

Az m_0 tömegű test v_B sebességét legkönnyebben az \mathbf{r}_B helyvektor deriválásával számíthatjuk ki. Figyelembe véve, hogy az S súlypont Y koordinátája $y_S = \text{állandó}$,

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x + e \cos(\omega t) \\ y_S + e \sin(\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_B \equiv \dot{\mathbf{r}}_B = \begin{bmatrix} \dot{x} - e\omega \sin(\omega t) \\ e\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Itt felismerhető a $\mathbf{v}_{sz} = [\dot{x} \ 0]^T$ szállító sebesség és a $\mathbf{v}_{rel} = [-e\omega \sin(\omega t) \ e\omega \cos(\omega t)]^T$ relatív sebesség kifejezése. Ezzel a kinetikus energia

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{x}^2 + e^2\omega^2 \sin^2(\omega t) - 2\dot{x}e\omega \sin(\omega t) + e^2\omega^2 \cos^2(\omega t) \right) \\ &\equiv \frac{1}{2}(m + m_0)\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_0e^2\omega^2}_{= \text{konstans}} - m_0\dot{x}e\omega \sin(\omega t), \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} &= (m + m_0)\dot{x} - m_0e\omega \sin(\omega t), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} &= (m + m_0)\ddot{x} - m_0e\omega^2 \cos(\omega t), \\ \frac{\partial E_K}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2.120}$$

A potenciális energia és deriváltja:

$$U = \frac{1}{2}sx^2 + m_0g(y_S + e \sin(\omega t)) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = sx. \tag{2.121}$$

A nehézségi erővel kapcsolatos potenciális energia tag időben változik, mégsem befolyásolja a megfelelő általános erőt, hiszen nem függ az x koordinátától. A Rayleigh-féle disszipatív potenciál és a megfelelő általános erő tag

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}k\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = k\dot{x}. \tag{2.122}$$

Mivel nincsenek nem potenciális erők vagy nem ideális kényszerek, $Q^* = 0$. Viszont a kinetikus energia (2.120) deriváltjában megjelenik egy gerjesztésnek megfelelő tag, amit a mozgásegyenlet jobb oldalára rendezünk. Így (2.121), valamint (2.122) figyelembevételével felírható a mozgásegyenlet:

$$(m + m_0)\ddot{x} + k\dot{x} + sx = m_0e\omega^2 \cos(\omega t). \tag{2.123}$$

A mozgásegyenlet $m_0e\omega^2 \rightarrow F_0$ és $(m + m_0) \rightarrow m$ helyettesítéssel visszavezethető az erőgerjesztett rendszerek (2.96) mozgásegyenletére.

A mozgásegyenlet sztenderd alakja

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + sx = \underbrace{\frac{m_0e\omega^2}{m + m_0}}_{= f_0\alpha^2} \cos(\omega t).$$

A statikus kitérés ebben az esetben is függ a gerjesztés körfrekvenciájától, pontosabban a frekvenciahányadostól:

$$f_0 = \frac{m_0e}{m + m_0} \frac{\omega^2}{\alpha^2} \equiv \frac{m_0e}{m + m_0} \lambda^2. \tag{2.124}$$

Itt bevezethető az

$$r_0 = \frac{m_0 e}{m + m_0}$$

jelölés, amivel $f_0 = r_0 \lambda^2$. A gerjesztett lengőrendszer modell állandósult megoldása

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \vartheta),$$

ahol ϑ (2.105) alapján számítható, az amplitúdó pedig

$$A = N f_0 = \frac{\lambda^2}{\underbrace{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4D^2 \lambda^2}}_{=\tilde{N}}} r_0$$

alakban írható fel. Tehát itt is bevezethető egy új, $\tilde{N} = N \lambda^2$ nagyítási függvény, mely az összes frekvenciafüggő tagot tartalmazza, ezzel megkönnyítve a kiegyensúlyozatlan forgórészű gépek és a gépalapozások tervezését.

2.6.5. Rezgésszigetelés

A gépek rezgéseik során károsíthatják a környezetükben lévő épületeket és a kezelő személyzet egészségét, de befolyásolhatják egymás működését is. Például ha prés- vagy vésőgépet működtetünk forgácsoló gépek mellett, akkor jelentősen rosszabb minőségű lehet a megmunkált felület. Érzékeny műszerekkel végzett mérések pontosságát is csökkentheti a környezetről átadódó rezgések hatása. Ezek a problémák elkerülhetőek megfelelő *rezgésszigetelés* alkalmazásával.

A rezgésszigetelés céljától függően két esetet különböztetjük meg:

- *Aktív rezgésszigetelés* során a cél a környezet védelme a gép rezgéseitől.
- *Passzív rezgésszigetelésről* akkor beszélünk, ha a gépet (műszert) akarjuk megvédeni a környezet rezgéseitől.

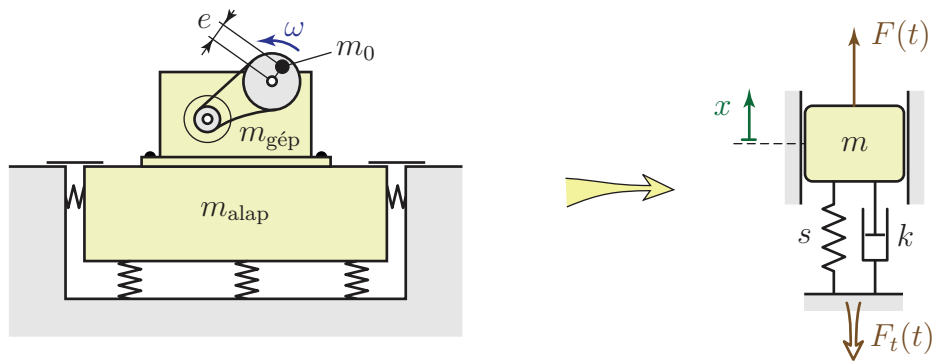
Aktív rezgésszigetelés

Az aktív rezgésszigetelés alapvető modellje a 2.48 ábrán látható. Célunk a talajra átadódó $F_t(t)$ erő dinamikus részének csökkentése az ω szögsebességgel forgó kiegyensúlyozatlan forgórész által gerjesztett állandósult rezgés során. A rendszer mozgásegyenletét (2.123) adja meg, ami visszavezethető egy $F(t) = F_0 \cos(\omega t) \equiv m_0 e \omega^2 \cos(\omega t)$ erőgerjesztésnek kitett lengőrendszer mozgásegyenletére.

Tudjuk, hogy a kialakuló stacionárius rezgés kitérése és sebessége az

$$x_p(t) = A \sin(\omega t - \vartheta) \quad \text{illetve} \quad \dot{x}_p(t) = A \omega \cos(\omega t - \vartheta)$$

függvényekkel írható le, ha az egyensúlyi helyzettől mérjük az x koordinátát. Ebben az esetben az $x = 0$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ állapotban – egyensúlyban – a talajra átadódó erő a gép és gépalap együttes súlyával egyezik meg. Ez a statikus erő nem károsítja a gép környezetét, ezért csak a talajra átadódó erő dinamikus részének a csökkentésével foglalkozunk.



2.48. ábra. Az aktív rezgésszigetelés alapmodellje.

A dinamikus erő a kitérés és sebesség ismeretében, a rugóerő és a csillapító erő eredőjéből számítható⁹:

$$F_t(t) = sx_p(t) + k\dot{x}_p(t) = sA \sin(\omega t - \vartheta) + kA\omega \cos(\omega t - \vartheta).$$

Az addíciós tételek alapján ez a kifejezés átírható

$$\begin{aligned} F_t(t) &= sA \sin(\omega t) \cos(\vartheta) - sA \cos(\omega t) \sin(\vartheta) + k\omega A \cos(\omega t) \cos(\vartheta) + k\omega A \sin(\omega t) \sin(\vartheta) \equiv \\ &\equiv \underbrace{(sA \cos(\vartheta) + k\omega A \sin(\vartheta))}_{\equiv F_s} \sin(\omega t) + \underbrace{(k\omega A \cos(\vartheta) - sA \sin(\vartheta))}_{\equiv F_c} \cos(\omega t) \quad (2.125) \end{aligned}$$

alakba. A bejelölt F_s és F_c együtthatók az $x_p(t)$ megoldás ismeretében kiszámíthatók. Ha az $F_t(t)$ erő maximális értékét keressük, akkor érdemes felírni

$$F_t(t) = F_{\max} \sin(\omega t + \delta) \equiv F_{\max} \cos(\delta) \sin(\omega t) + F_{\max} \sin(\delta) \cos(\omega t) \quad (2.126)$$

alakban. A (2.125) és (2.126) egyenletekben $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatói megegyeznek, tehát

$$\left. \begin{aligned} F_s &= F_{\max} \cos(\delta) \\ F_c &= F_{\max} \sin(\delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{\max} = \sqrt{F_s^2 + F_c^2}.$$

F_s és F_c kifejezéseit behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$F_{\max} = As \sqrt{1 + \left(\frac{k\omega}{s}\right)^2},$$

amiből $k = 2D\alpha m$, $s = m\alpha^2$, valamint $A = Nf_0$ felhasználásával

$$F_{\max} = Nf_0 s \sqrt{1 + (2D\lambda)^2}.$$

A megfelelően szigetelő gépalapozás tervezését megnehezíti, hogy kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés esetén a (2.124) egyenletnek megfelelően $A = Nf_0 = N\lambda^2 r_0$, tehát a

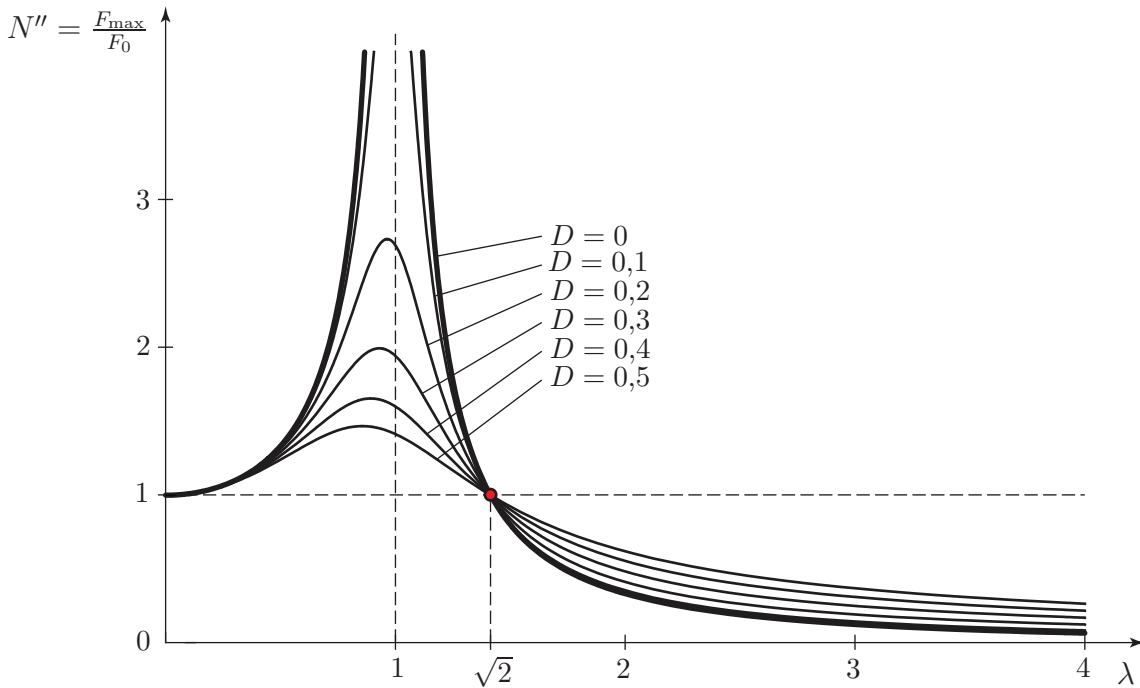
⁹A rugót összenyomó teljes erő a fentiek alapján tartalmazza a test súlyát is, tehát $F_r = -sx_p(t) + mg$, de a rezgésszigetelés szempontjából elég csak a dinamikus rugóerővel foglalkozni.

statikus kitérés is függ a forgás szögsebességétől – azaz a gerjesztés körfrekvenciájától. Ebben az esetben a maximális erőnek az $F_0 = f_0 s = m_0 e \omega^2$ erőhöz viszonyított arányát szokták használni a tervezéshez, ami a (2.119) egyenletben megadott N'' nagyítási függvénnyel azonos alakú:

$$N'' = \frac{F_{\max}}{F_0} = \frac{N f_0 s \sqrt{1 + (2D\lambda)^2}}{f_0 s} = N \sqrt{1 + (2D\lambda)^2}.$$

Az N'' függvény grafikonja a 2.49 ábrán látható. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $N''(\lambda = \sqrt{2}) = 1$, minden D csillapítási tényezőnél. $\lambda < \sqrt{2}$ frekvenciahányadosoknál a csillapítás csökkentése a talajra átadódó erő növekedésével, ennél nagyobb frekvenciahányadosoknál pedig az erő csökkenésével jár.

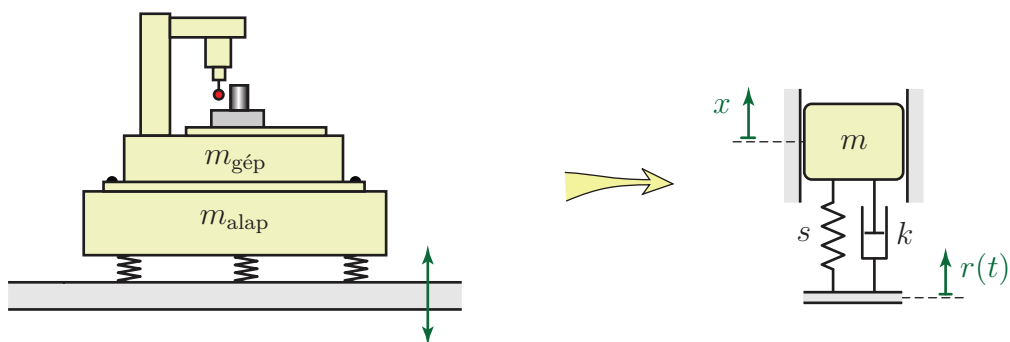
A talajra átadódó erő nagy frekvenciahányadosoknál jelentősen kisebb lehet a statikus erőnél. Ebben a tartományban a λ frekvenciahányados növelésével és a csillapítás csökkentésével N'' csökken, tehát olyan alapozást érdemes készíteni, ami kis csillapítású és lágú. Mivel általában a gép fordulatszám, tehát az ω gerjesztési körfrekvencia adott, $\lambda = \omega/\alpha$ növeléséhez az $\alpha = \sqrt{s/m}$ sajátkörfrekvenciát kell csökkenteni. Sajnos a túlságosan lágú rugók használata bizonyos esetekben megengedhetetlenül nagy kitérésekhez vezetne. Ezekben az esetekben a 2.49 ábra szerint a $\lambda < 0,1$ frekvenciatartomány választása – nagyon merev rugók használata – jelenthet kompromisszumos megoldást.



2.49. ábra. Rezgésszigetelés tervezésére használható $N'' = N\sqrt{1 + (2D\lambda)^2}$ függvény grafikonja.

Passzív rezgésszigetelés

Passzív rezgésszigetelés során a környezet rezgéseitől védeni kívánt műszer *kitérésének* a csökkentése szokott lenni az elsődleges szempont. A megfelelő alapmodell a 2.50 ábrán látható, ami pontosan megfelel a negyed járműmodell példájában vizsgált esetnek. Az ott



2.50. ábra. A passzív rezgésszigetelés alapmodellje.

kapott (2.119) egyenlet szerint a kitérés amplitúdójának csökkentéséhez most is a 2.49 ábrán ábrázolt $N'' = N\sqrt{1 + (2D\lambda)^2}$ kifejezést kell csökkenteni. Tehát az aktív és a passzív rezgésszigetelés általában ugyanolyan feltételek mellett biztosítható: kis csillapítású, lágypévalapozással.

3. fejezet

Több szabadsági fokú lengőrendszerek

Az egy szabadsági fokú lengőrendszerek kapcsán már megállapítottuk a 2.2 fejezetben, hogy a rezgések stabilis egyensúlyi helyzet körül alakulhatnak ki, ezért a nemlineáris egyenleteket az egyensúlyi helyzet körüli sorfejtéssel linearizáltuk. Azt is megmutattuk (2.1.4 fejezet), hogy a lineáris mozgásegyenletekből eltűnnek a konstans tagok, ha az egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátát.

Több (n) szabadsági fokú rendszerek esetében hasonlóan járhatunk el. A mozgásegyenleteket a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével határozzuk meg. Az n szabadsági foknak megfelelően, az egyensúlyi helyzettől mérve felvesszük a q_1, \dots, q_n koordinátákat és felírjuk az – általában nemlineáris –

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

mozgásegyenleteket. Feltéve, hogy a rendszer kis kitérésű rezgéseket végez a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet körül – ahol $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_n]^T$ az *általános koordináták vektora* –, az egyenletek linearizálhatók, így analitikusan meg lehet határozni megoldásukat. Alapvetően kétféleképpen járhatunk el:

1. Felírjuk a (3.1) (nemlineáris) egyenleteket és azokat linearizáljuk. Ez az eljárás mindig helyes eredményre vezet azokban az esetekben, amikor a másodfajú Lagrange-egyenlet alkalmazható – tehát pl. időfüggő geometriai kényszerek esetén is. Mivel a lineáris egyenletek mellett a nemlineáris egyenletek is rendelkezésre állnak, lehetőség van a lineáris közelítés pontosságának numerikus ellenőrzésére.
2. Egy másik megközelítés is alkalmazható, ha csak a lineáris egyenletek meghatározása a cél. Az eljárás lényege az, hogy az E_K , U és \mathcal{D} mennyiségek olyan közelítő alakját használjuk, hogy azokat a (3.1) egyenletbe helyettesítve azonnal lineáris mozgásegyenleteket kapjunk

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*$$

alakban. Ez a módszer önmagában nem alkalmazható ha időfüggő kényszerek is vannak, egyébként ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a Lagrange-egyenlet linearizálásával. A két módszer megkülönböztetése érdekében az így kapott lineáris mozgásegyenleteket *mátrix együtthatós* mozgásegyenleteknek nevezzük.

3.1. Mátrix együtthatós differenciálegyenlet

3.1.1. A kinetikus energia és az általános tömegmátrix

Ha az energiakifejezéseket *másodfokig* sorba fejtjük a megfelelő változó szerint, akkor a Lagrange-egyenletben megadott deriválások elvégzése után lineáris közelítésben helyes mozgásegyenleteket kapunk. Több szabadsági fokú rendszerek esetében többváltozós Taylor-sorfejtést kell alkalmazni. Ha nincsenek időfüggő kényszerek, akkor az E_K kinetikus energia az általános sebességek másodfokú függvénye, tehát $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ és $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ körüli Taylor-sorában nincs konstans vagy a sebességben elsőfokú tag:

$$E_K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}_{=m_{ij}} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \dots \quad (3.2)$$

Itt $\dot{q}_i \dot{q}_j$ együtthatója az \mathbf{M} általános tömegmátrix i, j indexű eleme:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}, \quad (3.3)$$

tehát a kinetikus energia második deriváltját az egyensúlyi helyzetben kell venni.

Mivel a *Young-tétel* miatt a deriválások sorrendje felcserélhető, ezért az általános tömegmátrix szimmetrikus. A tömeg csak pozitív lehet, amiből következik, hogy a kinetikus energia egy *pozitív definit kvadratikus alak*: csak zérus sebességnél nulla az értéke, egyébként pozitív. Ennek megfelelően az általános tömegmátrix pozitív definit is, tehát sajátértékei pozitívak.

3.1.2. A potenciális energia és az általános merevségi mátrix

Az $U(\mathbf{q})$ potenciális energia a koordináták függvényében Taylor-sorba fejthető az egyensúlyi helyzet körül:

$$U(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = U(\mathbf{0}) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}}_{=s_{ij}} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i q_j + \dots = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} + \dots \quad (3.4)$$

A fenti kifejezés konstans tagja a potenciális energia nulla szintjének megválasztásától függ, tehát megfelelő választással ez a tag eltüntethető. Az ún. *Dirichlet-tétel* szerint [4, 6] egyensúlyi helyzetben a potenciális energiának szélső értéke van, ezért az összes parciális deriváltja nulla. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetben az elsőfokú tag is eltűnik, csak a másod- és magasabb fokú tagok maradnak meg. Az egyensúlyi helyzet akkor *stabil*, ha a potenciális energiának minimuma van. Ez pedig annak felel meg, hogy a második parciális deriváltjaiból alkotott mátrix pozitív definit.

A potenciális energia második deriváltjai a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetben az \mathbf{S} általános merevségi mátrix elemeit adják:

$$s_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \quad (3.5)$$

A Young-tétel miatt a merevségi mátrix szimmetrikus és stabilis egyensúlyi helyzetben a potenciális energia minimumának megfelelően pozitív definit. Ha az egyensúlyi helyzet instabil, akkor nem jön létre rezgés, lásd a 2.2.1 fejezetet. Olyan eset is előfordulhat, amikor az egyensúlyi helyzet a stabilitás határán van. Ilyenkor a merevségi mátrix csak pozitív *szemidefinit* lesz, legalább egy nulla nagyságú sajátértékkel.

Időfüggő kényszerek – pl. útgerjesztés (lásd 2.6.3 fejezet) – mellett a potenciális energia időtől függő tagjait is külön figyelembe kell venni. Ebben az esetben a (3.4) kifejezésből nem csak a koordinátákban másodfokú tagokat kell megtartani.

3.1.3. A disszipatív potenciál és az általános csillapítási mátrix

A disszipatív potenciál a kinetikus energiához hasonlóan az általános sebességek másodfokú függvénye (ha nincs időfüggő kényszer, mint pl. útgerjesztés esetén), tehát a

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=0, \mathbf{q}=0} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}_{=k_{ij}} \Big|_{\mathbf{q}=0} \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}} + \dots$$

sorfejtéssel bevezethető a \mathbf{K} általános csillapítási mátrix, melynek i, j -edik eleme

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\mathbf{q}=0}.$$

3.1.4. A mátrix együtthatós differenciálegyenlet felírása

Ha hat olyan aktív erő (vagy nem ideális kényszererő) is, ami nem potenciális, akkor az általános erő komponenseinek eddig figyelembe nem vett, a \mathbf{Q}^* vektorba rendezett részét az erők teljesítményéből számíthatjuk ki a (2.84) képlet alapján.

Helyettesítsük be az energiakifejezések $E_K \approx 1/2 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$, $U \approx 1/2 \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q}$ és $\mathcal{D} \approx 1/2 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{q}}$ közelítő alakjait a másodfajú Lagrange-egyenletbe! Így a nem potenciális általános erő komponensek figyelembevételével az alábbi lineáris mozgásegyenletet kapjuk:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*. \quad (3.6)$$

Ez a *több szabadsági fokú rendszerek mátrix együtthatós differenciálegyenlete*. Ez az egyenlet már lineáris. Az egyenletben szereplő mátrixok és vektorok n szabadsági fokú rendszerek esetén $n \times n$ illetve n méretűek.

Ha van olyan gerjesztő hatás amit pl. az időfüggő kényszerek miatt nem tudunk figyelembe venni, akkor a mozgásegyenletből hiányzó tagokat a másodfajú Lagrange-egyenlet megfelelő tagjainak felírásával lehet levezetni. Erre az eljárásra a 3.3.3 fejezetben mutatunk példákat.

3.2. Csillapítatlan szabad rezgés

3.2.1. Sajátkörfrekvenciák és lengésképek

Gerjesztetlen esetben a mozgásegyenlet homogén lesz, tehát

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Az egyenlet megoldása különböző frekvenciájú csillapodó rezgések kombinációjaként fejezhető ki, n szabadsági fok esetén $2n$ kezdeti feltétel alapján. Ennek a meglehetősen bonyolult alakú megoldásnak a pontos kiszámítása általában nem szükséges vagy gyakorlatilag nem is lehetséges: az esetek többségében a sok szabadsági fokú rendszerek kezdeti feltételeit nem ismerjük pontosan és a rendszer paramétereinek – elsősorban a csillapításnak – a meghatározása is meglehetősen nehéz. Ha van csillapítás, akkor a megoldás hamar le is cseng.

A gyakorlatban inkább annak van jelentősége, hogy a *gerjesztett* rendszer hogyan viselkedik, hogyan „válaszol” különböző frekvenciájú gerjesztő hatásokra. Különösen nagy amplitúdójú rezgések alakulhatnak ki, ha a gerjesztés frekvenciakomponensei az ún. *rezonancia frekvenciák* közelében vannak, ezért ez a szituáció – a mérnöki értelemben vett rezonancia – általában kerülendő. A rezonancia körfrekvenciák kis csillapítás mellett jó közelítéssel megegyeznek a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciáival, ahogy az 1 DoF esetben láttuk (2.107). Ez az oka annak, hogy nagy gyakorlati jelentősége van a csillapítatlan szabad rezgést leíró

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

egyenletnek. Keressük a fenti egyenlet megoldását

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}e^{i\alpha t} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{A}e^{-i\alpha t}$$

alakban. A fenti függvények második deriváltja

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\alpha^2 \mathbf{A}e^{\pm i\alpha t}$$

alakú, amit behelyettesítve a (3.8) mozgásegyenletbe az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}\right) \mathbf{A}e^{\pm i\alpha t} = \mathbf{0}.$$

Az egy szabadsági fokú esethez hasonlóan (lásd a (2.4) egyenletet), sem az \mathbf{A} vektor – az ún. *lengéskép vektor* –, sem az $e^{\pm i\alpha t}$ kifejezés nem lehet nulla. Az előbbi azért nem, mert akkor azonosan nulla vektor lenne a $\mathbf{q}(t)$ mozgástörvény is, az exponenciális függvény pedig csak $t \rightarrow (-\infty)$ -ben tart nullához. Mivel vektorral nem lehet osztani, csak az exponenciális függvénnyel tudunk egyszerűsíteni:

$$\left(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}\right) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer az \mathbf{A} lengéskép vektor elemeire. Az $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ *triviális megoldás* az egyensúlyban, nyugalomban lévő lengőrendszernek felel meg. A *nemtriviális megoldás* létezésének feltétele, hogy

$$\det\left(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}\right) = 0. \quad (3.10)$$

Ezt az egyenletet *frekvenciaegyenletnek* nevezzük, ebből határozhatjuk meg az α paraméter lehetséges értékeit, a *csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciáit*. A determinánst kifejtve a frekvenciaegyenlet

$$(-1)^n \det \mathbf{M} \alpha^{2n} + (-1)^{n-1} d_{n-1} (\alpha^2)^{n-1} + (-1)^{n-2} d_{n-2} (\alpha^2)^{n-2} + \dots + \det \mathbf{S} = 0 \quad (3.11)$$

alakú, tehát α^2 -nek n -ed fokú polinomja, ahol n a szabadsági fok. Stabil egyensúlyi helyzet körüli rezgések esetében az \mathbf{M} és \mathbf{S} mátrixok pozitív definiték. Ekkor a frekvenciaegyenlet

minden α^2 gyöke pozitív és az egyenletben szereplő d_i tényezők ($i = 0, \dots, n$; $d_0 = \det \mathbf{S}$, $d_n = \det \mathbf{M}$) is mind pozitívak, tehát a frekvenciaegyenlet együtthatóinak előjelei a $(-1)^i$ alakú szorzótényezők miatt váltakoznak (alternálnak). Ez a tulajdonság felhasználható az egyenlet ellenőrzésére.

A $\det(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) = 0$ frekvenciaegyenlet megoldásával α^2 -re kapunk pozitív gyököket, amiből a sajátkörfrekvenciák – melyek természetesen szintén pozitívak:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n.$$

Tehát a legkisebb sajátkörfrekvenciát jelöljük α_1 -gyel.

A mozgásegyenlet megoldásának következő lépése az \mathbf{A} *lengéskép vektorok* meghatározása. Ehhez vissza kell helyettesíteni a sajátkörfrekvenciákat a (3.9) egyenletbe:

$$(-\alpha_j^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \mathbf{A}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Mivel az együtthatómátrix determinánsa nulla (a frekvenciaegyenlet szerint), az \mathbf{A}_j vektorra végtelen sok nem triviális megoldás található, melyek konstans szorzóban különböznek. A számítás egyértelművé tétele érdekében a lengéskép vektorok első elemét 1-nek szokták választani – hacsak nem nulla. Így már a többi elem egyértelműen számítható.

Minden lengésképhez két lehetséges alapmegoldás tartozik, melyek az exponenciális függvény kitevőjének előjelében különböznek. Ennek a $2n$ darab alapmegoldásnak a lineáris kombinációjaként kapjuk a csillapítatlan szabad rendszer mozgásegyenletének általános megoldását:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n B_{1j} \mathbf{A}_j e^{i\alpha_j t} + B_{2j} \mathbf{A}_j e^{-i\alpha_j t}.$$

Az összegben szereplő kifejezések átírhatók a (2.8) egyenletben bemutatott módon az alábbi trigonometrikus alakba, ahol a c_{1j} , c_{2j} illetve C_j és ε_j konstansok a $2n$ kezdeti feltétel alapján határozhatók meg:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n c_{1j} \mathbf{A}_j \cos(\alpha_j t) + c_{2j} \mathbf{A}_j \sin(\alpha_j t) \equiv \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{A}_j \sin(\alpha_j t + \varepsilon_j). \quad (3.12)$$

Ha azonos jellegűek az általános koordináták (mindegyik elmozdulás- vagy mindegyik szögkoordináta), akkor a lengéskép vektorok dimenziótlanok és a C_j együtthatók mértékegysége adja meg a $\mathbf{q}(t)$ vektor mértékegységét. Viszont ha keverednek a koordináták, akkor a $\mathbf{q}(t)$ mozgástörvény vektor elemeinek, valamint az \mathbf{M} , \mathbf{K} és \mathbf{S} együtthatómátrixok elemeinek a mértékegységei különbözőek lesznek, ezért a lengéskép vektorok elemeinek is meg kell adni a mértékegységét.

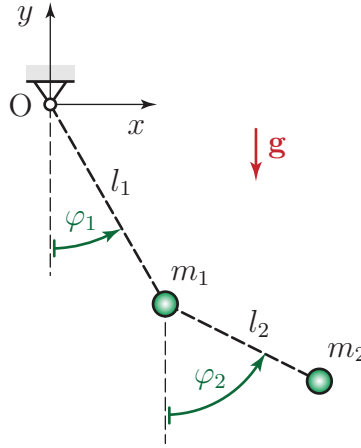
Látszik a (3.12) általános megoldásból, hogy a kezdeti feltételek megfelelő megválasztásával elérhető, hogy $C_j = 0$, $j \neq k$ és $C_k \neq 0$ legyen. Ekkor a megoldásból csak

$$\mathbf{q}(t) = C_k \mathbf{A}_k \sin(\alpha_k t + \varepsilon_k)$$

marad, tehát egy α_k körfrekvenciájú lengés. Mivel az \mathbf{A}_k vektor mindegyik eleme be van szorozva $\sin(\alpha_k t + \varepsilon_k)$ -val, az *összes általános koordináta azonos körfrekvenciával, azonos fázisban változik*. Ebből már látszik, hogy mi a lengéskép vektorok fizikai tartalma: a k -adik lengéskép vektor az egyes koordináták lengési amplitúdóinak az *arányait* adja meg abban a speciális esetben, amikor csak az α_k sajátkörfrekvenciával történik a rezgés. Az általános megoldás n ilyen, különböző körfrekvenciájú és lengésképű rezgés kombinációja.

3.2.2. Példák a sajátkörfrekvenciák és lengésképek meghatározására

3.1. példa: Matematikai kettősingának nevezzük a 3.1 ábrán látható, két nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű fonálból és két pontszerűnek tekinthető testből álló lengőrendszert.



3.1. ábra. Matematikai kettősinga.

Az egyszerűség kedvéért azt az esetet vizsgáljuk, amikor a két test tömege és a két fonál hossza megegyezik: $m \equiv m_1 = m_2$, $l \equiv l_1 = l_2$. Általános koordinátáknak a fonalak függőleges helyzetétől mért szögkitéréseit választjuk: $q_1 \equiv \varphi_1$ és $q_2 \equiv \varphi_2$, tehát az általános koordináták vektora

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

A kinetikus energia

$$E_K = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Az egyes tömegpontok \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 sebességvektorai a helyvektoruk deriválásával számíthatók a legkönnyebben. Az ábra szerint felvett (x, y) koordináta-rendszerben

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l \sin(\varphi_1) \\ -l \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) \\ l\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) \end{bmatrix}, \quad \text{és}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l \sin(\varphi_1) + l \sin(\varphi_2) \\ -l \cos(\varphi_1) - l \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} l\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + l\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \\ l\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + l\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}.$$

A \mathbf{v}_2 sebességvektor kifejezésében a φ_1 -et tartalmazó tagok a szállító sebesség komponenseit, a φ_2 -t tartalmazó tagok pedig a relatív sebesség komponenseit adják. A sebességvektorok kifejezéseit behelyettesítve a kinetikus energia képletébe,

$$E_K = \frac{1}{2}m \left[2l^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right].$$

A potenciális energia nulla szintjét vegyük fel az O csukló magasságában. Így a potenciális energia kifejezése

$$U = -2mgl \cos(\varphi_1) - mgl \cos(\varphi_2).$$

Nincsenek csillapító- vagy nem potenciálos erők, ezért $\mathcal{D} = 0$ és $\mathbf{Q}^* = \mathbf{0}$.

Írjuk fel a matematikai kettősinga kis kitérések mellett érvényes mozgásegyenletét két módszerrel: 1) a másodfajú Lagrange-egyenlettel, 2) a mátrix együtthatós differenciálegyenlet segítségével. Ezután határozzuk meg a sajátkörfrekvenciákat és a lengésképeket a paraméterek függvényében!

Mozgásegyenlet a másodfajú Lagrange-egyenlettel levezetve

Mivel két szabadsági fokú a rendszer, két

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

alakú másodfajú Lagrange-egyenletet kell felírunk. Számítsuk ki először a $\dot{\varphi}_1$ és a φ_1 szerinti deriváltakat:

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2}m \left[4l^2 \dot{\varphi}_1 + 2l^2 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right]. \quad (3.13)$$

A teljes idő szerinti derivált számítása során figyelembe kell venni, hogy a szögkoordináták is függenek az időtől, tehát $d/dt \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -\sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2}m \left[4l^2 \ddot{\varphi}_1 + 2l^2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2l^2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \right]. \quad (3.14)$$

A kinetikus energia függ a koordinátáktól is, ezért

$$\frac{\partial E_K}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2}m \left[2l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right].$$

Végül, a potenciális energia deriváltját kell kiszámítani:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 2mgl \sin(\varphi_1). \quad (3.15)$$

Hasonló eredményeket kapunk a φ_2 és $\dot{\varphi}_2$ szerinti deriválásokkal is:

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{2}m \left[2l^2 \dot{\varphi}_2 + 2l^2 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right], \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{2}m \left[2l^2 \ddot{\varphi}_2 + 2l^2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2l^2 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \right], \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2}m \left[-2l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \right], \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = mgl \sin(\varphi_2). \quad (3.19)$$

A kapott kifejezéseket behelyettesítve a Lagrange-egyenletbe, a következő nemlineáris mozgásegyenleteket kapjuk:

$$2ml^2 \ddot{\varphi}_1 + ml^2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - ml^2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mgl \sin(\varphi_1) = 0 \quad (3.20)$$

$$ml^2 \ddot{\varphi}_2 + ml^2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + mgl \sin(\varphi_2) = 0 \quad (3.21)$$

Az egyenletek első sorában a (3.14) illetve (3.17) kifejezések szerepelnek. Látható, hogy a kinetikus energia koordináta szerinti deriváltjával (ezek az egyenletek második sorának elején vannak) ellenkező előjelű tagok jelentek meg az első sorok végén, ezért lehetőség van az egyenletek egyszerűsítésére.

Az egyenleteket a $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ helyzet körül linearizálva kapjuk a kis kitérésekre érvényes mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned} 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl\varphi_1 &= 0, \\ ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\ddot{\varphi}_1 + mgl\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A linearizálás során minden olyan tag kiesik, ami vagy az általános sebességek, vagy a koordináták elsőnél magasabb fokú kifejezése, tehát pl. $\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 0$, hiszen harmadfokú ($\dot{\varphi}_2^2 \varphi_2$ alakú) a legalacsonyabb fokszámú tag a Taylor-sorában.

Mozgásegyenlet a mátrix együtthatós differenciálegyenlettel levezetve

A kinetikus energia általános sebességek szerinti, illetve a potenciális energia általános koordináták szerinti első deriváltjait a (3.13), (3.16) illetve a (3.15), (3.19) egyenletek adják meg. Ezért az általános tömegmátrix és az általános merevségi mátrix elemeinek meghatározásához már csak ezeket a kifejezéseket kell deriválni.

A kinetikus energia kétszeres deriváltjait mátrix alakba rendezve és az egyensúlyi helyzet koordinátáit behelyettesítve kapjuk az általános tömegmátrixot:

$$\mathbf{M} = \left[\frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j} \Big|_{\mathbf{q}=0} \right] = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & ml^2 \end{bmatrix}_{\varphi_1=\varphi_2=0} = \begin{bmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{bmatrix}.$$

A merevségi mátrix elemeit a potenciális energia deriválásából kapjuk meg:

$$\mathbf{S} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\mathbf{q}=0} \right] = \begin{bmatrix} 2mgl \cos(\varphi_1) & 0 \\ 0 & mgl \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}_{\varphi_1=\varphi_2=0} = \begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a mátrixokkal felírható a mátrix együtthatós differenciálegyenlet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A szorzatok kifejtésével ellenőrizhető, hogy ezek az egyenletek megfelelnek a Lagrange-egyenlet alapján kiszámított (3.22) linearizált mozgásegyenleteknek. A sajátkörfrekvenciák a frekvenciaegyenletből határozhatók meg:

$$\begin{aligned} \det(-\alpha^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) &\equiv \begin{vmatrix} -2\alpha^2 ml^2 + 2mgl & -\alpha^2 ml^2 \\ -\alpha^2 ml^2 & -\alpha^2 ml^2 + mgl \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow m^2 l^4 \alpha^4 - 4m^2 l^3 g \alpha^2 + 2m^2 g^2 l^2 = 0. \end{aligned}$$

Látható, hogy az egyenlet együtthatóinak váltakozik az előjele és α^4 együtthatója $\det(\mathbf{M})$, a konstans tag pedig $\det(\mathbf{S})$. Az egyenlet gyökei $m^2 l^4$ -nel való egyszerűsítés után könnyen kiszámíthatók:

$$\alpha^4 - 4\frac{g}{l}\alpha^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2}^2 = \frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2}).$$

Innen a sajátkörfrekvenciák

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

ahol a szokásos jelölésnek megfelelően α_1 a kisebb sajátkörfrekvencia.

A következő feladat a lengésképek meghatározása. $\alpha = \alpha_1$ -et helyettesítve a (3.9) egyenletbe egy olyan homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek két egyenlete összefüggő. A frekvenciaegyenlet teljesülése ugyanis éppen azt jelenti, hogy a (3.9) egyenlet együtthatómátrixa szinguláris. Az egyenletek összefüggősége miatt a mátrix második sorát nem is érdemes kiírni:

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_1^2 ml^2 + 2mgl & -\alpha_1^2 ml^2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Ennek az egyenletnek végtelen sok, egymástól konstans szorzóban különböző megoldása van az A_{11} , A_{12} elemekre. Mivel számunkra csak a lengéskép vektor elemeinek az aránya fontos, legyen $A_{11} = 1$! Ezzel a választással a (3.23) egyenletrendszer első egyenlete

$$(-2\alpha_1^2 ml^2 + 2mgl) \cdot 1 - \alpha_1^2 ml^2 \cdot A_{12} = 0,$$

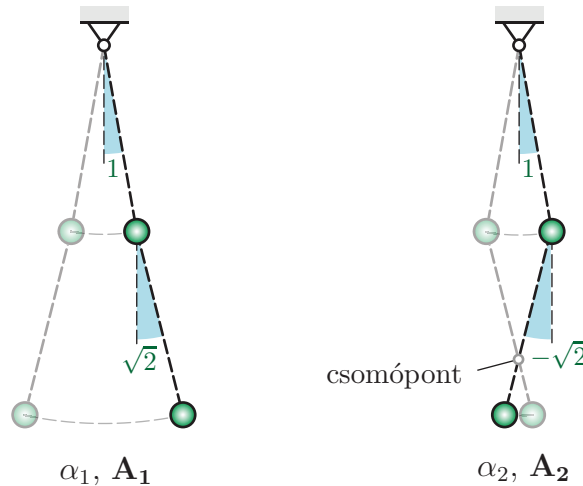
amiből

$$A_{12} = \frac{-2\alpha_1^2 ml^2 + 2mgl}{\alpha_1^2 ml^2} = \frac{2g}{l\alpha_1^2} - 2 = \sqrt{2}.$$

Hasonlóan kapjuk $\alpha = \alpha_2$ behelyettesítésével, hogy $A_{22} = -\sqrt{2}$, tehát a két lengéskép vektor

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

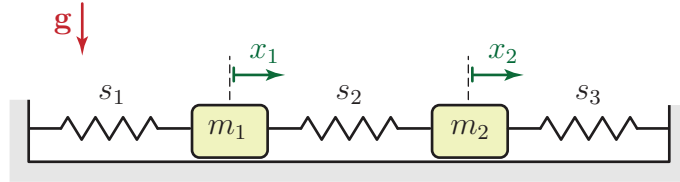
A lengéskép vektorokat az inga 3.2 szerkezeti ábrája segítségével szemléltethetjük.



3.2. ábra. A matematikai kettősinga lengésképeinek szemléltetése.

A $q_2 \equiv \varphi_2$ szög maximális értéke – az alsó inga lengésének amplitúdója – mindkét esetben $\sqrt{2}$ -ször nagyobb abszolút értékű, mint a $q_1 \equiv \varphi_1$ szög maximuma, de a második lengéskép esetében ellentétes fázisban mozog az inga alsó és felső része. Ezért az \mathbf{A}_2 lengéskép ábráján megfigyelhető egy ún. *csomópont*, mely az inga mozgása során végig a helyén marad.

3.2. példa: Sorbakapcsolt tömeg-rugó lánc I. A 3.3 ábrán egy két hasázból és három rugóból álló láncszerű lengőrendszer látható. Írjuk fel a mozgásegyenleteket a mátrix együtthatós differenciálegyenlet segítségével, az egyensúlyi helyzetből mért $\mathbf{q} = [x_1 \ x_2]^T$ abszolút koordinátákkal, majd határozzuk meg a sajátkörfrekvenciákat és lengésképeket! Legyen $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$ és $s_1 = s_2 = s_3 = 100 \text{ N/m}$.



3.3. ábra. Sorbakapcsolt tömeg-rugó lánc.

A kinetikus energia

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2,$$

a potenciális energia pedig

$$U = \frac{1}{2}s_1x_1^2 + \frac{1}{2}s_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}s_3x_2^2.$$

Ezek alapján differenciálások után számítható az általános tömeg- és merevségi mátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 \\ -s_2 & s_2 + s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

és felírható a frekvenciaegyenlet:

$$\begin{aligned} \det(-\alpha^2\mathbf{M} + \mathbf{S}) &= \begin{vmatrix} -m_1\alpha^2 + s_1 + s_2 & -s_2 \\ -s_2 & -m_2\alpha^2 + s_2 + s_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 200 - \alpha^2 & -100 \\ -100 & 200 - \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 - 400\alpha^2 + 30000 = 0. \end{aligned}$$

Jól látszik, hogy ugyan csak két nagyságrendnyi különbség van a tömeg kg-ban és a merevség N/s-ban kifejezett számértékei között, a frekvenciaegyenlet együtthatói között már négy nagyságrendnyi eltérés van. Egy hasonló, n szabadsági fokú rendszerrel már 2^n nagyságrendnyi eltérést találnánk, ami már komoly számítási problémákat okozhat sok szabadsági fokú rendszerek frekvenciaegyenletének megoldása során. Az egyenletet átírva

$$\begin{aligned} 10^4 \left(\frac{\alpha}{10}\right)^4 - 400 \cdot 10^2 \left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 + 30000 &= 0, \quad \text{azaz} \\ \left(\frac{\alpha}{10}\right)^4 - 4 \left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

alakra, az együtthatók azonos nagyságrendűvé tehetők és $(\alpha/10)^2$ -re már pontosabban számítható az egyenlet két gyöke:

$$\left(\frac{\alpha_1}{10}\right)^2 = 1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2, \quad \left(\frac{\alpha_2}{10}\right)^2 = 3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2,$$

amiből gyökvonással és tízzel való szorzással kaphatók a sajátkörfrekvenciák:

$$\alpha_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \alpha_2 = 10\sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (3.24)$$

A lengésképek meghatározásához válasszuk mindkét lengéskép vektor első elemét 1-nek, tehát legyen $A_{11} = A_{21} = 1$! A lengéskép vektorok második (A_{12} és A_{22}) elemeinek a meghatározásához a

$$(-\alpha_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -m_1 \alpha_i^2 + s_1 + s_2 & -s_2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

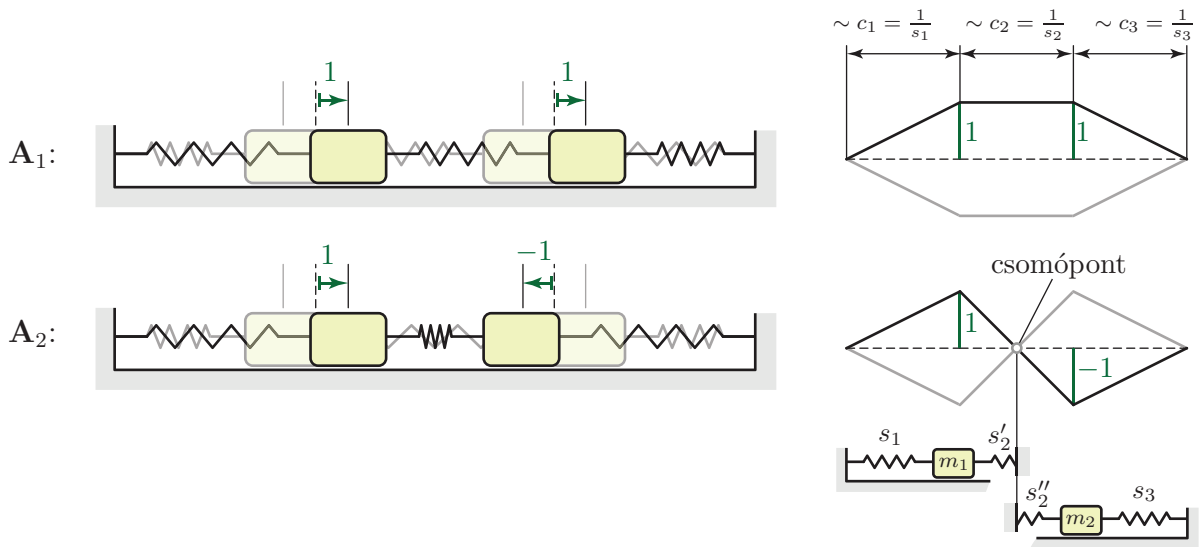
egyenletrendszert kell megoldani. Mivel ennek az egyenletrendszernek a két egyenlete lineárisan összefügg, elég csak az együtthatómátrix első sorát figyelembe venni. Ebből

$$A_{i2} = \frac{s_1 + s_2 - m_1 \alpha_i^2}{s_2} = \frac{200 - \alpha_i^2}{100}, \quad i = 1, 2. \quad (3.25)$$

Behelyettesítve α_i helyére a (3.24) értékeket, $A_{12} = 1$ és $A_{22} = -1$ adódik, amiből a lengéskép vektorok

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Bár a lengéskép vektorok a szerkezeti ábra segítségével is szemléltethetők, láncszerű rendszerek lengésképeit gyakran a kitérésre merőlegesen rajzolják fel. A 3.4 ábrának megfelelően, általában a rugómerevségek reciprokaival, azaz a rugóállandókkal arányos távolságokban veszik fel a lengéskép vektorok egyes elemeit. Az így kapott pontokat egyenes szakaszokkal összekötve a rugók egyes pontjainak elmozdulását is lehet szemléltetni.



3.4. ábra. Tömeg-rugó lánc lengésképei kétféle ábrázolásban.

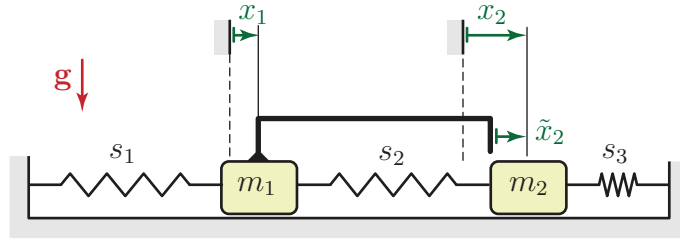
A lengésképek olyan speciális rezgéseknek felelnek meg, amikor a két test α_1 frekvenciával azonos irányban, illetve α_2 frekvenciával ellentétes irányban mozog. Ez utóbbi esetben – az \mathbf{A}_2 lengéskép ábráján jól látható módon – kialakul egy csomópont, azaz olyan pont, mely nem

mozog a rezgés során. A csomópontot akár rögzítettnek is tekinthetjük és helyettesíthetjük az s_2 rugót egy s'_2 és egy s''_2 merevségű rugóval. Mivel ezek sorosan kapcsolt rugók,

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{s''_2} = \frac{1}{s_2}, \quad \text{azaz} \quad c'_2 + c''_2 = c_2. \quad (3.27)$$

Az \mathbf{A}_2 lengésképnek megfelelő rezgés során a két hasáb egyszerre veszi fel a szélső helyzetét, ezért a csomópont akkor marad egyensúlyban, ha $s'_2 \cdot 1 = s''_2 \cdot A_{22}$, tehát $1/c'_2 = A_{22}/c''_2$. Ez azt jelenti, hogy a rugóállandókkal arányos távolságban felvéve a lengéskép vektor elemeit, az összekötő vonalak metszéspontja helyesen adja meg a csomópont helyét. ♠

3.3. példa: Sorbakapcsolt tömeg-rugó lánc II. Oldjuk meg az előző feladatot a $\mathbf{q} = [x_1 \ \tilde{x}_2]^T$ általános koordinátákkal, ahol \tilde{x}_2 relatív koordináta. Ez azt jelenti, hogy \tilde{x}_2 az m_2 tömegű test m_1 -től mért távolságának változását – az s_2 merevségű rugó megnyúlását – adja meg, és így $\tilde{x}_2 = 0$ az egyensúlyi helyzetben. Az x_2 abszolút és \tilde{x}_2 relatív koordináta kapcsolatát a 3.5 ábra szemlélteti.



3.5. ábra. Tömeg-rugó lánc az \tilde{x}_2 relatív koordinátával.

Mivel az m_2 tömegű test abszolút helyzetét az $x_2 = x_1 + \tilde{x}_2$ koordináta írja le, a mozgási energia kifejezése

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \equiv \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 + \dot{\tilde{x}}_2)^2,$$

a potenciális energia pedig

$$U = \frac{1}{2}s_1x_1^2 + \frac{1}{2}s_2\tilde{x}_2^2 + \frac{1}{2}s_3(x_1 + \tilde{x}_2)^2.$$

A tömeg- és merevségi mátrixok:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 + s_3 & s_3 \\ s_3 & s_2 + s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \frac{N}{m}.$$

Ezekkel a mátrixokkal ugyanazok a sajátkörfrekvenciák jönnek ki, mint az eredeti x_1 , x_2 koordinátákkal, de a lengéskép vektorok már mások lesznek, mint az előző feladatban vizsgált esetben:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

A lengéskép vektorok második elemei éppen 1-gyel kisebbek mint az eredetileg választott abszolút koordinátákkal. Ez természetes, ha arra gondolunk, hogy az m_2 tömegű test mozgását az m_1 -hez képest vizsgáljuk, tehát például a két test azonos sebességű mozgását az $\mathbf{A}_1 = [1 \ 0]^T$ vektor adja meg. A példából látszik, hogy míg a sajátkörfrekvenciák egyértelműen jellemzik a vizsgált lengőrendszert, a lengéskép vektorok nem egyértelműek, mert a választott koordinátáktól függenek. ♠

3.3. Gerjesztett rezgések

3.3.1. A stacionárius megoldás meghatározása

A több szabadsági fokú, harmonikusan gerjesztett lineáris lengőrendszer mozgásegyenlete

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{s0} \sin(\omega t) + \mathbf{Q}_{c0} \cos(\omega t) \quad (3.29)$$

alakú. Több szabadsági fokú esetben a csillapítás jelentősen megnehezíti a homogén egyenlet megoldását. Viszont mivel a homogén egyenlet megoldása lecseng, gyakran elegendő is, ha csak a stacionárius megoldást számítják ki. A stacionárius (állandósult) megoldást

$$\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{L} \cos(\omega t) + \mathbf{N} \sin(\omega t) \quad (3.30)$$

alakban keressük, ahol n szabadsági fokú rendszer esetén \mathbf{L} és \mathbf{N} is n elemű. A fenti kifejezést idő szerint deriválva:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_p(t) &= -\mathbf{L}\omega \sin(\omega t) + \mathbf{N}\omega \cos(\omega t) \quad \text{és} \\ \ddot{\mathbf{q}}_p(t) &= -\mathbf{L}\omega^2 \cos(\omega t) - \mathbf{N}\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Ezeket a kifejezéseket visszahelyettesítve a (3.29) mozgásegyenletbe egy meglehetősen hosszú egyenletet kapunk. Ez az egyenlet két külön egyenletre bontható a $\sin(\omega t)$ és a $\cos(\omega t)$ együtthatóinak megfelelően, ugyanúgy, mint a (2.100) egy szabadsági fokú esetben:

$$\cos(\omega t) \text{ együtthatói:} \quad -\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{L} + \omega \mathbf{K}\mathbf{N} + \mathbf{S}\mathbf{L} = \mathbf{Q}_{c0}, \quad (3.31)$$

$$\sin(\omega t) \text{ együtthatói:} \quad -\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{N} - \omega \mathbf{K}\mathbf{L} + \mathbf{S}\mathbf{N} = \mathbf{Q}_{s0}. \quad (3.32)$$

Mátrix alakba rendezve

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} & \omega \mathbf{K} \\ -\omega \mathbf{K} & -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{c0} \\ \mathbf{Q}_{s0} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Ebben az egyenletben a mátrix $2n \times 2n$, a két vektor pedig $2n \times 1$ méretű. Az egyenlet jobb oldalán álló vektor első eleme az első-, második eleme a második általános erő komponens koszinuszos részét adja meg. Hasonlóan, n szabadsági fokú rendszer esetén az $n + i$ -edik elem az i -edik általános erő komponens szinuszos része.

A (3.33) egy *inhomogén* lineáris egyenletrendszer, aminek csak akkor van megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla.

Ennek kapcsán érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor pl. csak koszinuszos jellegű a gerjesztés és nincs csillapítás. Ekkor a (3.33) egyenletrendszer két független egyenletrendszerre esik szét, melyekben \mathbf{L} és \mathbf{N} együtthatómátrixa megegyezik:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \mathbf{L} = \mathbf{Q}_{c0}, \quad (3.34)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Az első egyenlet inhomogén, aminek akkor van megoldása, ha

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \neq 0.$$

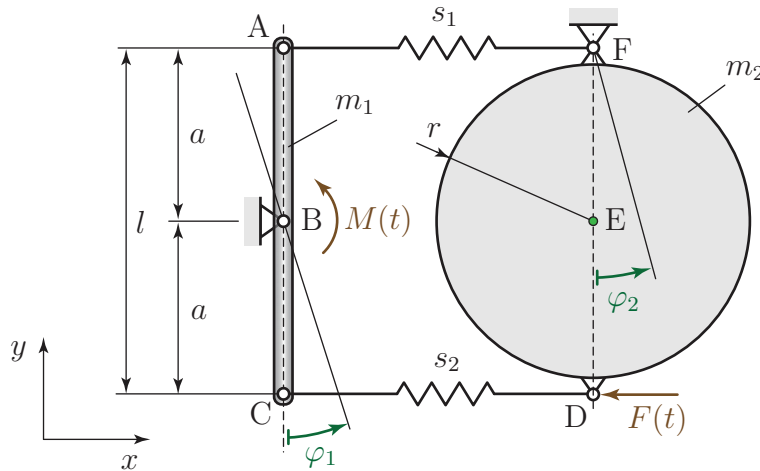
A második – homogén – egyenletnek mindenképpen van egy megoldása: $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Nullától különböző, nemtriviális megoldás csak akkor lehetne, ha $\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) = 0$ lenne. Ez

azonban nem teljesülhet, mert ez ellentétes az első egyenletre megfogalmazott feltétellel. Tehát csillapítás nélküli esetben $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, azaz 0 vagy π radián a fáziseltolódás a gerjesztés és a válasz között, ugyanúgy, mint az egy szabadsági fokú esetben (2.42 ábra).

A (3.35) egyenlet megfelel a sajátkörfrekvenciák és lengések kiszámítása során használt (3.9) egyenletnek. Tehát ha nincs csillapítás és a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik valamelyik sajátkörfrekvenciával, akkor az együtthatómátrix determinánsa nulla. Következésképpen, a (3.35) egyenletnek elvileg lehetne ugyan nemtriviális $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ megoldása is, viszont ekkor a (3.34) egyenletnek nem lenne megoldása. Ez az eset az egy szabadsági fokú rendszerek kapcsán a 2.6.2 fejezetben már említett, matematikai értelemben vett rezonancia. Rezonanciában nem (3.30) alakú a mozgástörvény, ezért nem jelent ellentmondást, hogy ilyenkor nem oldható meg a (3.34) egyenlet.

3.3.2. Erő- vagy nyomatékgerjesztett rendszerek stacionárius megoldásának meghatározása

3.4. példa: A 3.6 ábrán vázolt mechanikai rendszer elemei kis kitérésű lengéseket végeznek a vízszintes síkban. Az általános koordináták vektora $\mathbf{q} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$. A rúdra $M(t) = M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1)$ gerjesztő nyomaték, a korongra pedig $F(t) = F_D \sin(\omega t + \varepsilon_2)$ gerjesztő erő hat. Határozzuk meg az állandósult lengés amplitúdóját és fázisszögét és számítsuk ki az s_2 merevségű rugóban ébredő erő legnagyobb értékét!



3.6. ábra. Rúdból és korongból álló 2 DoF gerjesztett lengőrendszer $M(t) = M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1)$ nyomaték- és $F(t) = F_D \sin(\omega t + \varepsilon_2)$ erőgerjesztéssel.

A rendszer kinetikus energiája

$$E_K = \frac{1}{2} \Theta_{1b} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_{2f} \dot{\varphi}_2^2,$$

ahol $\Theta_{1b} = 1/12 m_1 l^2$ és $\Theta_{2f} = 1/2 m_2 r^2 + m_2 a^2$ a két test B illetve F ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka. Ebből az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Theta_{1b} & 0 \\ 0 & \Theta_{2f} \end{bmatrix}.$$

A potenciális energia

$$U = \frac{1}{2}s_1(a\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}s_2(l\varphi_2 - a\varphi_1)^2,$$

amiből kétszeres deriválással kapjuk az általános merevségi mátrixot:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} (s_1 + s_2)a^2 & -s_2la \\ -s_2la & s_2l^2 \end{bmatrix}.$$

Az erő- és nyomatékgerjesztésnek megfelelő általános erő komponenseket a teljesítmény kifejezéséből számíthatjuk ki:

$$P = \mathbf{M}_B \cos(\omega t - \varepsilon_1) \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{F}_D \sin(\omega t + \varepsilon_2) \cdot \mathbf{v}_D.$$

Mivel az \mathbf{M}_B nyomaték azonos értelmű, mint az $\boldsymbol{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{\varphi}_1]^T$ szögsebesség, viszont az \mathbf{F}_D erő iránya ellentétes az (x, y, z) koordináta-rendszerben felírt $\mathbf{v}_D = [l\dot{\varphi}_2 \ 0 \ 0]^T$ sebességvektor irányával,

$$P = M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1) \cdot \dot{\varphi}_1 - F_D \sin(\omega t + \varepsilon_2) \cdot l\dot{\varphi}_2. \quad (3.36)$$

Ugyanakkor, a (2.84) egyenlet szerint a teljesítmény kifejezhető az általános erőkkel és sebességekkel is:

$$P = Q_1 \dot{\varphi}_1 + Q_2 \dot{\varphi}_2. \quad (3.37)$$

(3.36) és (3.37) összevetéséből

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1) \equiv \underbrace{M_B \cos(\varepsilon_1)}_{=Q_{1c}} \cos(\omega t) + \underbrace{M_B \sin(\varepsilon_1)}_{=Q_{1s}} \sin(\omega t), \\ Q_2 &= -F_D l \sin(\omega t + \varepsilon_2) \equiv \underbrace{-F_D l \sin(\varepsilon_2)}_{=Q_{2c}} \cos(\omega t) - \underbrace{F_D l \cos(\varepsilon_2)}_{=Q_{2s}} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

A fenti egyenletekben megjelöltük a két általános erő komponens szinuszos és koszinuszos összetevőinek együtthatóit, ugyanis ezekből állítható össze a gerjesztő erő amplitúdóit tartalmazó vektor.

A gerjesztett rendszer stacionárius megoldásában szereplő L_1, L_2, N_1, N_2 együtthatók a (3.33) egyenlet alapján felírt

$$\begin{bmatrix} -\omega^2\Theta_{1b} + (s_1 + s_2)a^2 & -s_2la & 0 & 0 \\ -s_2la & -\omega^2\Theta_{1b} + s_2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2\Theta_{1b} + (s_1 + s_2)a^2 & -s_2la \\ 0 & 0 & -s_2la & -\omega^2\Theta_{1b} + s_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1c} \\ Q_{2c} \\ Q_{1s} \\ Q_{2s} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_B \cos(\varepsilon_1) \\ -F_D l \sin(\varepsilon_2) \\ M_B \sin(\varepsilon_1) \\ -F_D l \cos(\varepsilon_2) \end{bmatrix}.$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg, de ezek kiírásától most eltekintünk.

Az s_2 merevségű rugóban ébredő erő a rugó két végének elmozdulásából számítható:

$$F_{s_2} = s_2(l\varphi_2 - a\varphi_1).$$

Mivel az állandósult állapotban $\varphi_1(t) = L_1 \cos(\omega t) + N_1 \sin(\omega t)$ és $\varphi_2(t) = L_2 \cos(\omega t) + N_2 \sin(\omega t)$, ez az erő

$$F_{s_2} = s_2 \left(\underbrace{(L_2 l - L_1 a)}_{\equiv x_c} \cos(\omega t) + \underbrace{(N_2 l - N_1 a)}_{\equiv x_s} \sin(\omega t) \right)$$

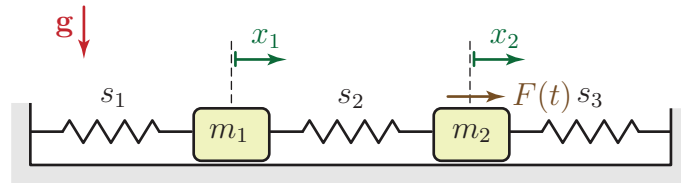
alakban fejezhető ki, ahol bevezettük az x_c és x_s jelöléseket. A maximális rugóerő meghatározásához a (2.11) egyenlethez hasonló átalakítást kell végrehajtani:

$$F_{s_2} = s_2 \sqrt{x_c^2 + x_s^2} \sin(\omega t + \delta).$$

Mivel a szinuszfüggvény -1 és 1 közötti értékeket vehet fel, a maximális rugóerő

$$F_{s_2 \max} = s_2 \sqrt{x_c^2 + x_s^2}. \quad \spadesuit$$

3.5. példa: Láncszerű lengőrendszer gerjesztett rezgései. Vizsgáljuk meg a 3.2. példában vizsgált láncszerű rendszer gerjesztett rezgéseit abban az esetben, amikor $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ erő hat az m_2 tömegű testre! Adott $F_0 = 10 \text{ N}$ erőamplitúdó és $\omega = 10 \text{ rad/s}$ gerjesztési körfrekvencia mellett határozzuk meg úgy az m_1 tömeg nagyságát, hogy az m_2 tömegű test nyugalomban maradjon a stacionárius rezgés során! A 3.2. példának megfelelően $m_2 = 1 \text{ kg}$ és $s_1 = s_2 = 100 \text{ N/m}$.



3.7. ábra. Erőgerjesztett tömeg-rugó lánc. $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

A 3.2. példában már meghatároztuk a tömeg- és merevségi mátrixot, de most m_1 értéke ismeretlen:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 \\ -s_2 & s_2 + s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A következő lépés az általános erő vektorának meghatározása. Ehhez írjuk fel a gerjesztő erő teljesítményét:

$$P = F(t)\dot{x}_2.$$

A teljesítmény kifejezésében \dot{x}_1 együtthatója lenne az általános erő vektor Q_1 komponense, ami most nulla. \dot{x}_2 együtthatójából $Q_2 = F(t)$, tehát a mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 \cos(\omega t), \quad \text{azaz kifejtve}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 + s_2 & -s_2 \\ -s_2 & s_2 + s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} \cos(\omega t).$$

Mivel csillapítatlan a lengőrendszer, a partikuláris megoldást kereshetjük

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{X}_0 \cos(\omega t) \quad (3.38)$$

alakban. Ezt azért tehetjük meg, mert csillapítás nélkül – az egy szabadsági fokú esethez hasonlóan – a gerjesztés és a megoldás (válasz) fázisa vagy azonos, vagy ellentétes (ezzel kapcsolatban lásd a (3.35) egyenlet megoldásáról leírtakat). A fenti próbafüggvényt vissza kell helyettesíteni a mozgásegyenletbe, amihez szükség van annak második deriváltjára:

$$\ddot{\mathbf{q}}_p = -\omega^2 \mathbf{X}_0 \cos(\omega t).$$

Visszahelyettesítés után a

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{S} \mathbf{X}_0 \cos(\omega t) = \mathbf{Q}_0 \cos(\omega t)$$

egyenletre jutunk, aminek minden t időpontban teljesülnie kell. Tehát $\cos(\omega t)$ -vel egyszerűsíthetünk és így

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{S}) \mathbf{X}_0 = \mathbf{Q}_0. \quad (3.39)$$

Adott rendszerparaméterek mellett ebből már meghatározható lenne az \mathbf{X}_0 vektor mindkét eleme, tehát tényleg megfelelő volt (3.38) alakban keresni a partikuláris megoldást.

Most nincs megadva az m_1 tömeg; ezt abból a feltételből lehet meghatározni, hogy az \mathbf{X}_0 vektor második eleme nulla kell legyen. Tehát ebben az esetben is két ismeretlen van az egyenletben: m_1 és \mathbf{X}_0 első eleme – amit X_{01} -gyel jelölünk. A (3.39) egyenlet tehát így fejthető ki:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + s_1 + s_2 & -s_2 \\ -s_2 & -m_2\omega^2 + s_2 + s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \\ \begin{bmatrix} 200 - m_1\omega^2 & -100 \\ -100 & 200 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer első egyenletéből

$$(-m_1\omega^2 + s_1 + s_2)X_{01} = 0,$$

amiből a keresett m_1 tömeg

$$m_1 = \frac{s_1 + s_2}{\omega^2} = \frac{200}{100} = 2 \text{ kg},$$

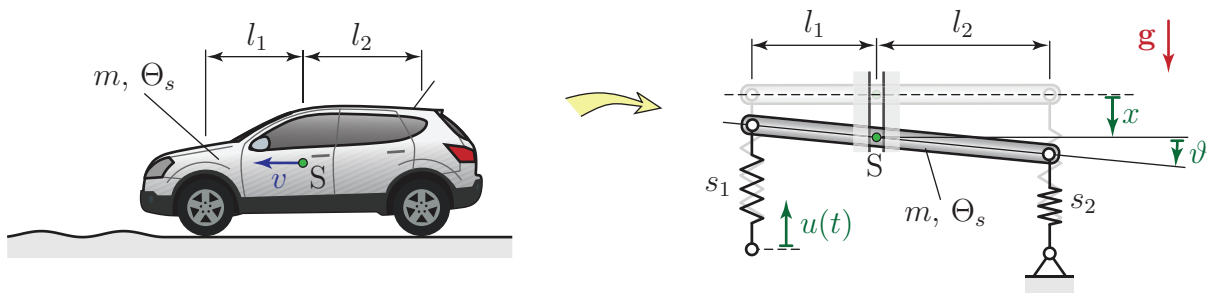
az egyenletrendszer második sorából pedig az m_1 tömegű test stacionárius rezgésének maximális nagyságú kitérésére $X_{01} = -0,1$ m adódik. A negatív előjel arra utal, hogy a gerjesztéssel ellentétes fázisban mozog a test.

Tehát az m_1 tömeg megfelelő megválasztásával zérussá tehető az m_2 tömegű test amplitúdója az állandósult állapotban, pedig éppen arra a testre hat a gerjesztő erő. Az ilyen tulajdonságú lengőrendszereket dinamikus lengésfojtónak nevezik. ♠

3.3.3. A mátrix együtthatós differenciálegyenlet használata időfüggő kényszerek esetén

Ha időtől explicite függő kényszerfeltételek korlátozzák a rendszer viselkedését, akkor a gerjesztésnek megfelelő általános erő komponensek nem számíthatók közvetlenül a mátrix együtthatós differenciálegyenlet 3.1 fejezetben részletezett felírási módszerével. Az ilyen jellegű feladatok vagy a másodfajú Lagrange-egyenlet által szolgáltatott nemlineáris egyenletek linearizálásával oldhatók meg, vagy a két módszer kombinációjával. Ebben a fejezetben ez utóbbi módszerre mutatunk példákat.

3.6. példa: Útgerjesztés rugón keresztül (fél járműmodell). *A járművek egyszerű – egy merev testből és két rugóból felépített – két szabadsági fokú mechanikai modellje látható a 3.8 ábrán.*



3.8. ábra. Jármű útegyenetlenség általi gerjesztése és a megfelelő fél járműmodell. Az időfüggő kényszerfeltétel: $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$.

Az m tömegű és Θ_s tehetetlenségi nyomatékú jármű mozgásának leírására bevezetett általános koordináták $q_1 \equiv x$ és $q_2 \equiv \vartheta$. Ezek közül x a súlypont függőleges elmozdulása az egyensúlyi helyzettől lefelé, míg ϑ a jármű elfordulása az óramutató járásával egyező irányban mérve. Az egyszerűség kedvéért az útegyenetlenség általi gerjesztést csak az első keréken vesszük figyelembe, azaz a modellben úgy tekintjük, hogy az s_1 merevségű rugó alsó végpontja az előírt $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ függvény szerint mozog. A feladat a mozgásegyenletek levezetése.

A rendszer mozgási energiája

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\vartheta}^2,$$

amiből az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_s \end{bmatrix}.$$

Amint korábban már megmutattuk, a konstans tagok kiesnek a linearizált mozgásegyenletből, ha az egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátákat. Ebben a feladatban ez azt jelenti, hogy figyelmen kívül hagyhatjuk a nehézségi erő potenciális energiáját és a rugók potenciális energiájának azt a részét, ami a jármű súlyának megfelelő statikus egyensúlyi helyzetbeli előfeszítésből adódik. Egyensúlyban éppen az ezeknek a potenciális energiáknak megfelelő erők tartanak egyensúlyt, azaz eredőjük nulla.

Ennek megfelelően, a potenciális energia közelítőleg (lásd 2.2.2 fejezet):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}s_1(u+x-l_1\vartheta)^2 + \frac{1}{2}s_2(x+l_2\vartheta)^2 \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}(s_1+s_2)x^2 + \frac{1}{2}(s_1l_1^2+s_2l_2^2)\vartheta^2 + (s_2l_2-s_1l_1)x\vartheta + s_1ux - s_1l_1u\vartheta + \frac{1}{2}s_1u^2. \end{aligned}$$

A mozgásegyenlet felírásához szükség van a potenciális energia koordináták szerinti deriváltjaira. Az első deriváltak a $Q_j = -\partial U/\partial q_j$ összefüggés miatt az általános erő komponenseinek (-1)-szeresét adják:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= (s_1+s_2)x + (s_2l_2-s_1l_1)\vartheta + \boxed{s_1u}, \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= (s_1l_1^2+s_2l_2^2)\vartheta + (s_2l_2-s_1l_1)x \boxed{-s_1l_1u}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A merevségi mátrix elemeit további differenciálásokkal kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} s_{11} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = s_1+s_2, \\ s_{12} \equiv s_{21} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \vartheta} = s_2l_2-s_1l_1, \\ s_{22} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = s_1l_1^2+s_2l_2^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A mátrix együtthatós mozgásegyenletben az $\mathbf{S}\mathbf{q}$ szorzat jelenik meg. A szorzást elvégezve megkapjuk azokat az általános erő komponenseket, amelyeket figyelembe vehetünk a merevségi mátrix felírásával:

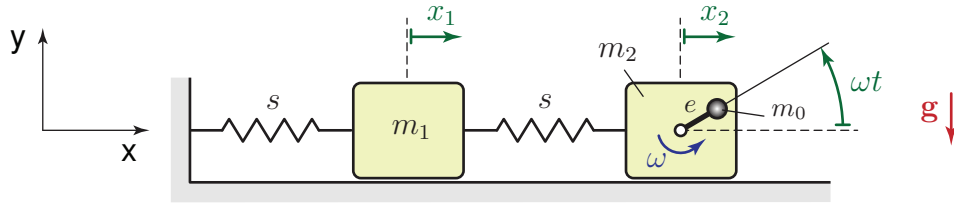
$$\mathbf{S}\mathbf{q} \equiv \begin{bmatrix} s_1+s_2 & s_2l_2-s_1l_1 \\ s_2l_2-s_1l_1 & s_1l_1^2+s_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_1+s_2)x + (s_2l_2-s_1l_1)\vartheta \\ (s_2l_2-s_1l_1)x + (s_1l_1^2+s_2l_2^2)\vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

A (3.40) egyenletekkel összehasonlítva látszik, hogy az általános erő $u = u_0 \sin(\omega t)$ gerjesztést tartalmazó tagjai – melyeket bekereteztünk a (3.40) egyenletekben – hiányoznak a (3.42) kifejezésből. Ezeket a hiányzó tagokat (-1)-gyel szorozva a mozgásegyenlet jobb oldalán tüntetjük fel:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1+s_2 & s_2l_2-s_1l_1 \\ s_2l_2-s_1l_1 & s_1l_1^2+s_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1u_0 \sin(\omega t) \\ s_1l_1u_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

A feladat megoldása egyszerűbb, ha az útgerjesztést helyettesítjük egy azzal azonos fázisban változó, $F_0 = s_1u_0$ erőamplitúdójú, $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ gerjesztő erővel, mely közvetlenül a testre hat a rugó felső rögzítési pontjánál. Ennek az erőnek a nyomatéka jelenik meg (3.43) jobb oldalának második tagjában. ♠

3.7. példa: Kiegyensúlyozatlan forgórészrel gerjesztett 2 DoF lengőrendszer. A 3.9 ábrán látható lengőrendszer m_1 és m_2 tömegű hasábokból, valamint azokat egymással és egy rögzített fallal összekötő s merevségű rugókból áll. Az m_2 tömegű testhez rögzített tengely körül m_0 tömegű kiegyensúlyozatlan forgórész forog ω szögsebességgel és e excentricitással. Az általános koordináták vektora $\mathbf{q} = [x_1 \ x_2]^T$, ahol az x_1 és x_2 elmozdulásokat a hasábok



3.9. ábra. Kiegyensúlyozatlan forgórészsel gerjesztett tömeg-rugó lánc.

egyensúlyi helyzeteitől mérjük. A forgórész a t pillanatban ωt szöget zár be a vízszintessel, ez egy időtől függő kényszerfeltétel.

A rendszer kinetikus energiája

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_0v_0^2.$$

Az m_0 tömegű test v_0 sebességének kiszámításához írjuk fel a test helyvektorát:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_2 + e \cos(\omega t) \\ e \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Ebből differenciálással határozható meg a \mathbf{v}_0 sebességvektor és annak négyzete:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - e\omega \sin(\omega t) \\ e\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix},$$

$$v_0^2 = \dot{x}_2^2 + e^2\omega^2 - 2e\omega\dot{x}_2 \sin(\omega t).$$

Tehát a kinetikus energia az általános koordinátákkal felírva

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_0\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_0e^2\omega^2 - m_0e\omega\dot{x}_2 \sin(\omega t).$$

A potenciális energia kifejezésében egyaránt figyelembe vesszük a rugókban és a nehézségi erőterben felhalmozódó energiát:

$$U = \frac{1}{2}sx_1^2 + \frac{1}{2}s(x_2 - x_1)^2 + m_0ge \sin(\omega t).$$

Csillapítás vagy nem potenciális erő nem szerepel a feladatban, ezért a másodfajú Lagrange-egyenlet(ek)et az alábbi formában írhatjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Az alábbiakban összehasonlítjuk a fenti egyenletek és a mátrix együtthatós egyenlet levezetésének lépéseit, az egymásnak megfelelő kifejezéseket egymás mellé írva.

Másodfajú Lagrange-egyenlet

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1$$

\Rightarrow

Mátrix együtthatós egyenlet

$$m_{12} \equiv \frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} = 0$$

$$m_{11} \equiv \frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{x}_1^2} = m_1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_2} &= (m_0 + m_2)\dot{x}_2 - m_0 e \omega \sin(\omega t) \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_2} &= (m_0 + m_2)\ddot{x}_2 - m_0 e \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$m_{22} \equiv \frac{\partial^2 E_K}{\partial \dot{x}_2^2} = m_0 + m_2$$

A mátrix együtthatós egyenletből kiesik a gerjesztést tartalmazó tag.

Az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_0 + m_2 \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial E_K}{\partial x_2} = 0 \quad \rightarrow$$

Ezeknek a tagoknak nincs megfelelőjük a mátrix együtthatós egyenletben, mert mindig vagy nullát, vagy nemlineáris kifejezést adnak eredményül.

A potenciális energia deriválása során a nehézségi erőből származó tag mind a Lagrange-egyenletből, mind a mátrix együtthatós egyenletből kiesik, hiszen nem függ a koordinátáktól:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2s x_1 - s x_2 \Rightarrow \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= s(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{11} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2s \\ s_{22} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = s \\ s_{12} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -s \end{aligned}$$

Ebből az általános merevségi mátrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2s & -s \\ -s & s \end{bmatrix}.$$

A levezetés alapján a mátrix együtthatós differenciálegyenlet

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_0 + m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2s & -s \\ -s & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 e \omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

A jobb oldalon látható általános erő vektort a másodfajú Lagrange-egyenletből kapott, bekeregetett tagból számítottuk. Az egyenlet többi tagja ugyanolyan alakban adódik a két módszerrel. Természetesen a tömegmátrixot az általános gyorsulás vektorral, a merevségi mátrixot pedig az általános koordináták vektorával megszorozva lehet összehasonlítani az egymásnak megfelelő tagokat.

A feladat megoldása leegyszerűsíthető, ha a kiegyensúlyozatlan forgórészt egy $F_0 = m_0 e \omega^2$ amplitúdójú gerjesztő erővel helyettesítjük, ami az m_0 tömegű test felé mutat. Ezen kívül az m_0 tömeget is hozzá kell adni a tömegmátrix megfelelő eleméhez. ♠

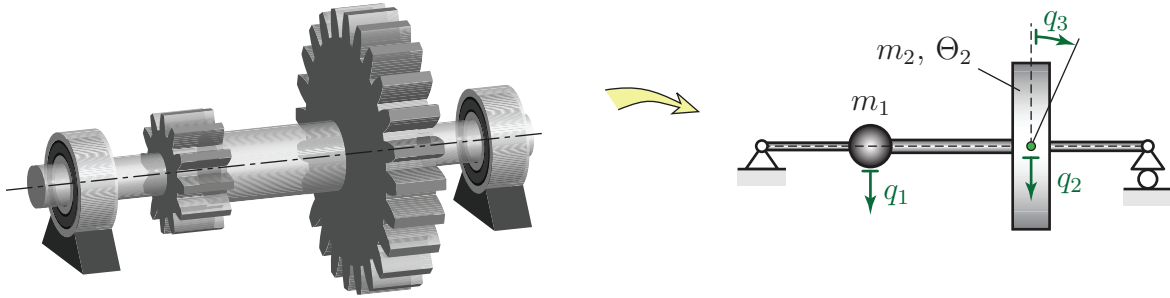
3.4. Rudak hajlító lengései

Az 1.3.1 fejezetben már láttuk, hogy egy szabadsági fokú, rugalmas rudat tartalmazó lengőrendszerek egyenértékű rugómerevsége hogyan számolható ki szilárdságtani megfontolások

alapján. Ebben a fejezetben több szabadsági fokú rendszerekre általánosítjuk az ott leírt módszert. Olyan szerkezeteket vizsgálunk, melyek egy valamilyen módon megtámasztott, elhanyagolható tömegű rugalmas rúdból és arra ráékeltek merev testekből állnak. A rendszer csillapítatlan rezgéseit leíró linearizált mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

alakban írható fel.



3.10. ábra. Rugalmas tengelyre ékeltek fogaskerekek és a megfelelő három szabadsági fokú mechanikai modell.

Ha a rúdhoz rögzített merev testek tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható, akkor pontszerűnek is tekinthetjük azokat. Általános koordinátáknak a testek súlypontjainak elmozdulás koordinátáit – illetve ha a rúdra merőleges tengely körüli elfordulásukat is figyelembe akarjuk venni, akkor elfordulási szögüket is – választjuk. Ezzel a koordináta választással az egyes testek mozgási energiája külön-külön figyelembe vehető, például ilyen alakban:

$$E_K = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\dot{q}_3^2 \dots \quad (3.45)$$

Ebből az általános tömegmátrix könnyen meghatározható. Mivel az egyes általános sebességek külön tagokban szerepelnek a kinetikus energia kifejezésében, a tömegmátrix diagonális:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \Theta_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

A merevségi mátrix a 3.1 fejezet alapján az U potenciális energiából számítható, melyet az általános koordináták segítségével kell kifejezni. Jelen esetben a potenciális energia megegyezik a hajlított rúd *alakváltozási energiájával*. Szilárdságtanból ismert [12], hogy az M_h hajlítónyomatéki függvénnyel

$$U = \frac{1}{2IE} \int_{(0)} M_h^2(x, F_i, M_j) dx$$

alakban, tehát végeredményben az $F_i, M_j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, R$ terhelések függvényeként fejezhető ki az alakváltozási energia, ahol x a rúd hossza mentén felvett koordináta, I a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomaték és E a rugalmassági modulusz. Bár a Betti- és a Castigliano-tétel segítségével kiszámítható az U alakváltozási energiából egy

keresztmetszet q_i elmozdulása vagy elfordulása, a fordított feladat megoldása nagyon nehézkes.

Ez az oka annak, hogy egy másik megközelítést alkalmazunk a rúd rugalmas tulajdonságainak a figyelembevételére. Az egy szabadsági fokú lengőrendszerek vizsgálata kapcsán már láttuk (lásd 1.3.1 fejezet), hogy a rugalmas rudak rugóállandója könnyebben számítható, mint az egyenértékű rugómerevségük. Több szabadsági fokú esetben a $\mathbf{C} \equiv \mathbf{S}^{-1}$ rugóállandó mátrixot tudjuk egyszerűen kiszámítani.

Ha a lengőrendszer valamilyen \mathbf{Q} -állandó általános erő hatása alatt a \mathbf{q}_e koordinátákkal megadott *egyensúlyi helyzetben* van, akkor $\dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}$ és $\ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}$ miatt

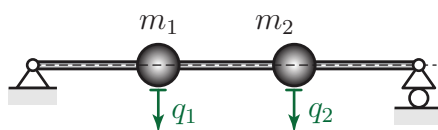
$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{q}_e &= \mathbf{Q}, \quad \text{tehát} \\ \mathbf{q}_e &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q} \equiv \mathbf{C}\mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Az általános erő komponenseinek

$$Q_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = j, \\ 0 & \text{ha } k \neq j \end{cases}$$

alakban történő megválasztásával a \mathbf{q}_e vektor komponenseiből könnyen kiszámíthatók a \mathbf{C} rugóállandó mátrix elemei.

Nézzük meg ezt egy egyszerű példán keresztül! A 3.11 ábrán látható lengőrendszerben két pontszerű test van egy rugalmas rúdra rögzítve. Ha állandó nagyságú $\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2]^T$



3.11. ábra. Rugalmas rúdra rögzített pontszerű testek – két szabadsági fokú mechanikai modell.

erő hat, akkor (3.46) alapján a két test egyensúlyi elmozdulása az erőmentes helyzettől mérve

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

tehát kifejtve

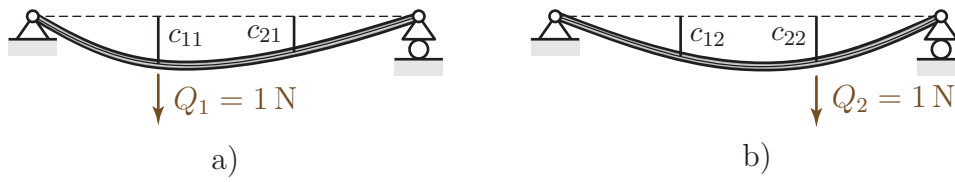
$$q_1 = c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2 \quad (3.48)$$

$$q_2 = c_{21}Q_1 + c_{22}Q_2. \quad (3.49)$$

Ha például c_{11} -et akarjuk meghatározni, akkor $Q_1 = 1$ és $Q_2 = 0$ választással q_1 számértéke éppen megadja c_{11} értékét. Ugyanilyen erőkomponensek mellett q_2 a c_{21} számértékével egyezik meg. $Q_1 = 0$ és $Q_2 = 1$ választással c_{12} és c_{22} értéke számítható ki.

Általánosan, c_{ij} számértéke q_i számértékével egyezik meg, ha $Q_j = 1$, a többi általános erő komponens pedig nulla.

Az egyes erők vagy nyomatékok által okozott elmozdulásokat a Betti- és a Castigliano-tétel, vagy a rugalmas szál differenciálegyenlete segítségével határozhatjuk meg. Egyszerű esetekben javasolható a járulékképletek használata is.



3.12. ábra. A rugóállandó mátrix elemeinek meghatározása megfelelő, egységnyi nagyságú erők alkalmazásával. a) c_{11} és c_{21} , b) c_{12} és c_{22} .

A \mathbf{C} rugóállandó mátrix szimmetrikus, hiszen a szimmetrikus \mathbf{S} merevségi mátrix inverze. Ez az eredmény az ún. *Maxwell-féle felcserélhetőségi tételnek* [12] felel meg.

A rugóállandó mátrix ismeretében elvileg számítható a merevségi mátrix és így alkalmazhatóak az eddig említett megoldási módszerek. A mátrix invertálás művelete azonban nagyon számításigényes, különösen nagyméretű mátrixok esetében. Ez a probléma elkerülhető, ha az

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

mozgásegyenletet beszorozzuk balról a \mathbf{C} rugóállandó mátrixszal. Mivel $\mathbf{CS} = \mathbf{I}$, ezért

$$\mathbf{CM}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{CQ}.$$

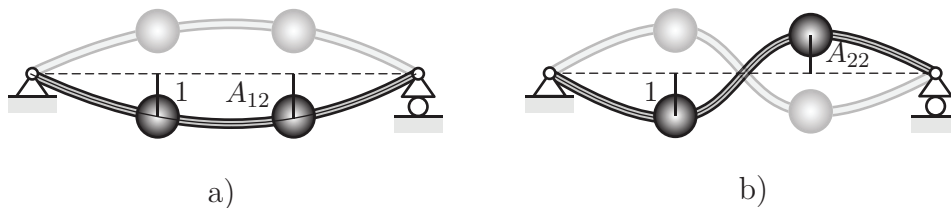
Ennek az egyenletnek nyilván ugyanaz a megoldása, mint az eredeti mozgásegyenletnek. Például $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ mellett kiszámíthatók a rendszer sajátkörfrekvenciái és lengésképei. A megoldást $\mathbf{q} = \mathbf{A}e^{\pm i\alpha t}$ alakban keresve és azt visszahelyettesítve a fenti egyenletbe, a frekvenciaegyenletet

$$\det(-\alpha^2\mathbf{CM} + \mathbf{I}) = 0$$

alakban kapjuk, amiből számíthatók az $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sajátkörfrekvenciák. A lengésképek a

$$(-\alpha_j^2\mathbf{CM} + \mathbf{I})\mathbf{A}_j = \mathbf{0}$$

egyenlet alapján határozhatók meg. A lengésképek ábrázolása ebben az esetben folytonos vonalakkal történik, ahogy a 3.13 ábra is mutatja. A mozgásegyenlet átírásához csak mátrix szorzást kellett elvégezni, ami jelentősen egyszerűbb és pontosabb, mint a mátrix invertálás. Arra azonban ügyelni kell, hogy ugyan szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus, de két szimmetrikus mátrix szorzata már nem biztos, hogy az. Ennek megfelelően, az általános esetben a \mathbf{CM} mátrix sem szimmetrikus.



3.13. ábra. Hajlító lengést végző rúd lengésképeinek ábrázolása.

Tárgymutató

- ütközés, 3
- ütközés utáni sebesség képlete, 5
- ütközési normális, 4
- ütközési tényező, 3, 5
- ütközési talppont, 7
- álló tengely körül elforduló test ütközése, 7
- általános csillapítási mátrix, 77
- általános erő, 50, 51
- általános koordináták vektora, 75
- általános koordináta, 48
- általános merevségi mátrix, 76
- általános sebességekkel, 52
- általános tömegmátrix, 76
- útgerjesztés, 59

- abszolút koordináta, 83
- addíciós tétel, 18
- aktív rezgészigetelés, 70
- amplitúdó, 18
- analitikus módszerek, 45
- aperiodikus határeset, 38

- bizonytalansági zóna, 42

- centrikus ütközés, 4
- Coulomb-féle súrlódás, 40
- csavarrugó, 9
- csillapítás mérése, 37
- csillapítási tényező, 31
- csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája, 17
- csillapítatlan szabad lengés, 15
- csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája, 34
- csomópont, 83

- dinamikus lengésfojtó, 90
- dinamikus rugóerő, 24
- dinamikus terhelés, 62
- Dirichlet-tétel, 76
- disszipatív potenciál, 52
- egyenértékű modell, 11

- erőgerjesztés, 58
- erőimpulzus, 5
- erőlökés, 5
- erős csillapítás, 38
- excentrikus ütközés, 8

- fáziskésés, 61
- fázisszög, 18
- fázisszög, 61
- fizikai inga, 24
- Fourier-sor, 57
- frekvenciaegyenlet, 78
- frekvenciahányados, 61
- frekvenciaviszony, 61

- geometriai kényszerek, 46
- gerjesztés amplitúdója, 59
- gerjesztés körfrekvenciája, 59
- gerjesztés lengéscsillapítón keresztül, 65
- gerjesztés rugón keresztül, 64
- gerjesztett lengőrendszerek, 56
- gerjesztett rezgés amplitúdója, 61
- gyenge csillapítás, 34

- hangolás, 61
- harmonikus gerjesztés, 57
- harmonikus rezgés, 17
- harmonikus rezgések, 2
- hirtelen rögzítés, 8

- időálló, 38
- időtől függő kényszer, 47
- ideális kényszer, 47
- inga, 24
- instabil egyensúlyi helyzet, 27

- karakterisztikus egyenlet, 16, 33
- kezdeti feltételek, 18
- kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés, 59, 68
- kinematikai kényszerek, 46

- kritikus csillapítás, 38
- Lehr-féle csillapítási tényező, 33
- lengéskép vektor, 78
- lengéskép vektorok, 79
- linearizálás, 25
- Lipschitz-feltétel, 40
- logaritmikus dekrementum, 37
- másodfajú Lagrange-egyenlet, 45, 51
- mátrix együtthatós differenciálegyenlet, 77
- mátrix együtthatós mozgásegyenlet, 75
- matematikai értelemben vett rezonancia, 61
- matematikai inga, 24
- matematikai kettősinga, 80
- maximális kitérés számítása, 35
- maximális rugóerő meghatározása, 65
- Maxwell-ábra, 5
- Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel, 96
- merevségi mátrix, 76
- mozgásegyenlet, 2
- mozgásegyenlet sztenderd alakja, 16
- mozgástörvény, 2
- nagyítás, 62
- nagyítás maximuma, 63
- nagyítási görbe, 62
- nemtriviális megoldás, 78
- Newton-Euler módszer, 45
- nyomatékgerjesztés, 58
- passzív rezgésszigetelés, 70, 72
- peremfeltételek, 18
- periódusidő, 20
- periódusidő mérése, 37
- periodikus gerjesztés, 57
- potenciális erők, 52
- pozitív definit kvadratikus alak, 76
- radián, 20
- Rayleigh-féle disszipatív potenciál, 52
- redukált tömeg, 7
- relatív csillapítási tényező, 33
- relatív koordináta, 85
- relatív sebesség, 69
- rezgésszigetelés, 70
- rezonancia, 61, 87
- rezonancia frekvenciák, 78
- rezonancia körfrekvencia, 63
- rezonancia mérnöki értelemben, 61
- rezonanciagörbe, 62
- Routh-Hurwitz-kritériumok, 27, 34
- rugó, 9
- rugó potenciális energiája, 10
- rugóállandó, 10
- rugóállandó mátrix, 12, 95
- rugók párhuzamos kapcsolása, 12
- rugók soros kapcsolása, 13
- rugómerevség, 10
- rugalmas elemek, 9
- sajátfrekvencia, 20
- spirálrugó, 10
- stabilitás feltétele, 27
- stacionárius megoldás, 60
- stacionárius rezgés, 57, 60
- statikus deformáció, 59
- statikus kitérés, 21, 42, 59
- statikus rugóerő, 24
- statikus terhelés, 62
- szállító sebesség, 69
- száraz súrlódás, 40
- sztochasztikus gerjesztés, 57
- tökéletesen rugalmas ütközés, 4
- tökéletesen rugalmatlan ütközés, 4
- tömegmátrix, 76
- túlcsillapított lengőrendszer, 39
- tehetetlen elemek, 9
- tehetetlenségi nyomaték mérése lengésidőből,
26
- torziós rugó, 10
- torziós rugóállandó, 10
- torziós rugómerevség, 10
- tranziens gerjesztés, 57
- triviális megoldás, 78
- virtuális teljesítmény, 47
- Young-tétel, 76

Felhasznált és ajánlott irodalom

- [1] Béda Gyula, Bezák Antal: Kinematika és dinamika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [2] J.N. Bronstejn, K.A. Szemengyajev, G. Musiol, H. Mühlig: Matematikai kézikönyv, TypoTeX Kiadó, Budapest, 2000.
- [3] Budó Ágoston: Kísérleti fizika I, 12. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [4] Budó Ágoston: Mechanika, 10. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [5] Dede Miklós: Kísérleti fizika I, Kossuth Lajos Tudományegyetem, 14. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [6] F. Gantmacher: Lectures in Analytical Mechanics, MIR Publishers, Moszkva, 1970.
- [7] Hraskó Péter: Elméleti fizika I – Elméleti mechanika, Janus Pannonius Tudományegyetem jegyzetkiadója, 1995.
- [8] A.N. Kolmogorov, Sz.V. Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [9] Landau-Lifsic: Elméleti fizika I – Mechanika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [10] Ludvig Győző: Lengéstan példatár, 41033, Műegyetemi Kiadó, 1998.
- [11] Muttnyánszky Ádám: Kinematika és kinetika, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.
- [12] Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [13] Pach Zs. Pálné - Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
- [14] L.Sz. Pontrjagin: Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [15] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, 4. kiadás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1998.