Szilárdságtan - 8. gyakorlat

Feszültségi állapot:

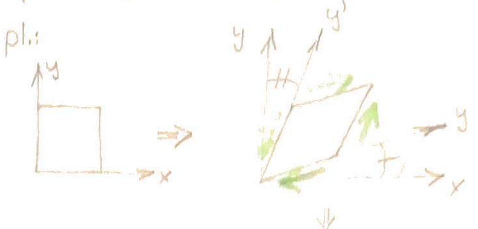
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Alakváltozási állapot:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

itt: • fajlagos alakváltozás: ε
• fajlagos szögváltozás: γ

pl.:



$$\gamma = \sphericalangle \text{F} + \sphericalangle \text{E}$$

A fajlagos térfogat változás:

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \ldots \underbrace{\approx}_{\text{kis alakv.}} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \underbrace{\varepsilon_I}_{\text{első skalárinvariáns}} = \underbrace{tr}_{\text{nyom}}\, \underline{\underline{\varepsilon}}$$

itt: $V \to$ térfogat az alakv. után

$V_0 \to$ térfogat az alakv. előtt

Hooke törvény: • 1D: $\sigma = \varepsilon \cdot E$

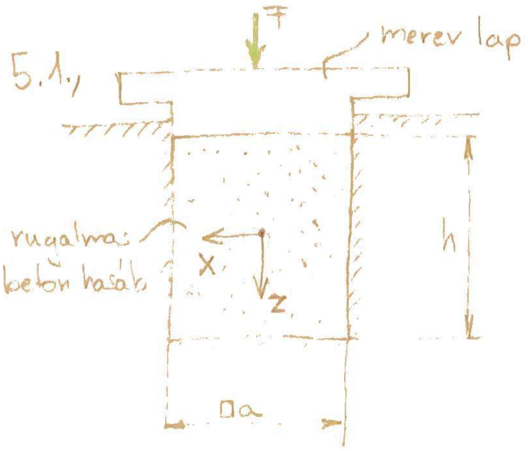
$\tau = \gamma \cdot G$, ahol $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

• 3D: $$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, \varepsilon_I \underbrace{\underline{\underline{E}}}_{\text{egység mx.}}\right]$$

ν: Poisson - tényező

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\, \sigma_I \underline{\underline{E}}\right]$$

5.1.)



A papír síkjával párhuzamosan is van két oldalról merev fal!

$F = 160$ [kN]

$a = 200$ [mm]

$E = 50$ [GPa]

$\nu = 0{,}35$ [-]

$h = 1$ [m]

• Feszültségek?
• Mekkora hasáb magasságának változása, $\Delta h = ?$

A merev fal miatt $\varepsilon_x = 0$ és $\varepsilon_y = 0$, továbbá szögváltozások sem lesznek:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

De ez mennyi vajon?

Ötlet: $\sigma_z = N/A$ -t tudunk számolni

$\Downarrow$

Micsoda $\underline{\underline{\sigma}}$?

A fesz. áll. Hooke-tv. alapján:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\underbrace{\varepsilon_I}_{=0+0+\varepsilon_z=\varepsilon_z}\cdot \underline{\underline{E}}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\text{IH:}\quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\cdot\varepsilon_z + \frac{E}{1+\nu}\cdot\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_z = \frac{E}{1+\nu}\underbrace{\left(1+\frac{\nu}{1-2\nu}\right)}_{\frac{1-\nu}{1-2\nu}}\cdot\varepsilon_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\varepsilon_z$$

Azonban tehát σ_z számolható:

$$\sigma_z = -\frac{F}{a^2} = -4\,[\text{MPa}]$$

nyomás!

Ezzel: $\varepsilon_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\cdot\sigma_z = -4{,}985\cdot 10^{-5}\ [-]$

A keresztirányú feszültségek pedig:

$$\sigma_x = \sigma_y = \ldots = -2{,}154\ [\text{MPa}]$$

Azaz a fesz. és alakv. állapot:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -2{,}154 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}154 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}[\text{MPa}] \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4{,}985 \end{bmatrix}\cdot 10^{-5}\ [-]$$

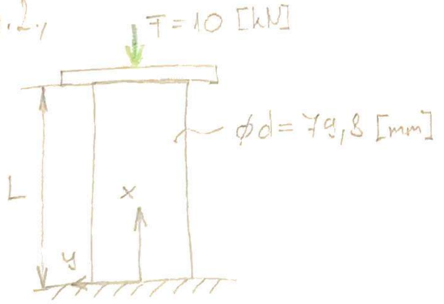
logikus, hiszen $\nu > 0$ (húzott rúd: $\varepsilon_k = -\nu\varepsilon$)
z irányú nyomásra: x és y irányban
tágulna a hasáb, de a falak oldalról
összenyomják, megakadályozva az
oldalirányú tágulást.

No de mennyit változik a hasáb hossza?

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta h = h\cdot\varepsilon_z = \ldots = -0{,}04985\ [\text{mm}] \Rightarrow \text{zsugorodik}$$

⊖, mert a megnyúlás lenne a ⊕

5.2,



$L = 160$ [mm]
$E = 200$ [GPa]
$\nu = 0{,}3$

a, ε_V fajl. térf. vált.?
b, ε_V, ha a keresztirányú alakváltozást megakadályozzuk?

a, Ha a keresztirányú alakváltozást nem gátoljuk, akkor:
σ_y és $\sigma_z = 0$, továbbá a τ fesz.-ek is zérusak.

Azaz: $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ahol: $\sigma_x = -\frac{F}{A} \cong -2\,[\text{MPa}]$, $A = \frac{d^2\pi}{4}$

Az alakváltozás:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\underbrace{\sigma_I}_{\sigma_x+0+0}\cdot\underline{\underline{E}}\right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

IH: $$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x\right) = \frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{1}{1+\nu}\cdot\sigma_x = \frac{\sigma_x}{E} = -10^{-5}\ [-]$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x = -\nu\cdot\frac{\sigma_x}{E} = \underbrace{-\nu\cdot\varepsilon_x}_{} = 3\cdot10^{-6}\ [-]$$

eml.: húzott/nyomott rúd!

A fajl. térf. vált.: $$\varepsilon_V = \varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-10+3+3)\cdot10^{-6} = -4\cdot10^{-6}$$ $\Rightarrow$ csökken a térfogat (bár az ϕ kicsit növekedik)

c: Ha meggátoljuk a keresztirányú átmérő váltorást, akkor:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ mivel $\varepsilon_y = 0$ és $\varepsilon_z = 0$

Ekkor: $$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I\,\underline{\underline{E}}\right]$$

Amiből (úgy, mint előbb):

$$\sigma_x = \frac{E\,(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E\cdot(1-\nu)}\sigma_x = \ldots = -7{,}43\cdot10^{-6}\ [-]$$

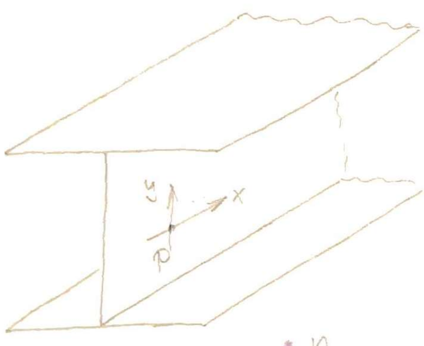
$\sigma_x = -\frac{F}{A}$ most is

Végül a fajl. térf. vált.:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_I = \varepsilon_x + 0 + 0 = -7{,}43\cdot10^{-6}\ [-]$$

↳ Ha oldalról meggátoljuk az elmozdulást, akkor jobban összemegy.

5.3.,



Adatok: $\varepsilon_a = 100\cdot10^{-6}\ [-]$ $\quad\alpha_a = 0°$

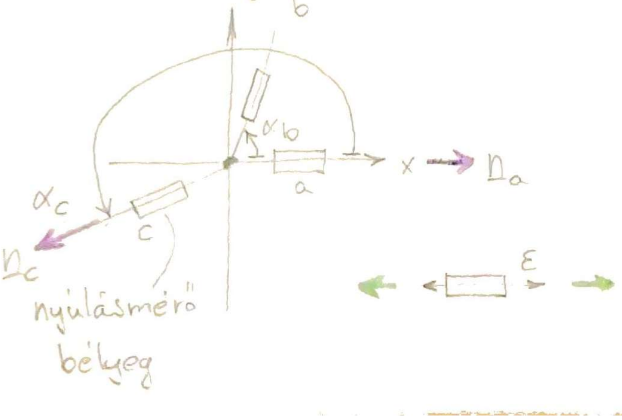
$\varepsilon_b = 50\cdot10^{-6}\ [-]$ $\quad\alpha_b = 70°$

$\varepsilon_c = -70\cdot10^{-6}\ [-]$ $\quad\alpha_c = 200°$

$E = 210\ GPa$, $\nu = 0{,}3$

$\underline{\underline{\sigma}}_P = ?$

- - - -



Tudjuk, hogy P-ben síkfeszültségi állapot van:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ mivel a felület terheletlen

A Hooke-tv. miatt az alakváltozási állapot:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Az adott $\underline{n}$ irányú fajlagos alakváltozás: $\varepsilon_n = \underline{n}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}$

Tehát: a,
$$\underline{n}_a = \begin{bmatrix} \cos\alpha_a \\ \sin\alpha_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$$

$$\varepsilon_a = \underline{n}_a^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}_a = \varepsilon_x \qquad (1)$$

b,
$$\underline{n}_b = \begin{bmatrix} \cos\alpha_b \\ \sin\alpha_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}342 \\ 0{,}94 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$$

$$\varepsilon_b = \underline{n}_b^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}_b = \varepsilon_x \cdot \cos^2\alpha_b + \varepsilon_y \cdot \sin^2\alpha_b + \gamma_{xy} \cdot \cos\alpha_b \cdot \sin\alpha_b \qquad (2)$$

c,
$$\underline{n}_c = \begin{bmatrix} \cos\alpha_c \\ \sin\alpha_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}94 \\ -0{,}342 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$$

$$\varepsilon_c = \underline{n}_c^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{n}_c = \varepsilon_x \cdot \cos^2\alpha_c + \varepsilon_y \cdot \sin^2\alpha_c + \gamma_{xy} \cdot \cos\alpha_c \sin\alpha_c \qquad (3)$$

Amiből: (1): $\varepsilon_x = \varepsilon_a = 10^{-4}$ [-]

(2) és (3): $\varepsilon_y = 256{,}65 \cdot 10^{-6}$ [-]

$\gamma_{xy} = -585{,}96 \cdot 10^{-6}$ [-]

Még ε_z kell. A Hooke-tv. miatt:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right]$$

Tekintsük a $\sigma_z = 0$ komponenset:

$$0 = \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -152{,}85 \cdot 10^{-6} [-]$$

Most a teljes $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ismert már. Kiszámolhatjuk a fesz.-et Hooke-tv. alapján:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \ldots = \begin{bmatrix} 40{,}844 & -47{,}33 & 0 \\ -47{,}33 & 66{,}15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$