Szilárdságtan - 7. gyakorlat

Főfeszültségek számítása sajátértékekként:

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma \cdot \underline{n} \quad \Rightarrow \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{n} = \underline{0}$$

$\underline{n}$: főirány, σ: főfesz.

A nemtriviális mo.: $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$

$(\underline{n} \neq \underline{0})$

$\Downarrow$

σ főfeszültségek

$\underline{n}$ főirányok $(|\underline{n}| = 1)$

megj.: $\sigma^3 - \sigma_I \sigma^2 + \sigma_{II} \sigma - \sigma_{III} = 0$

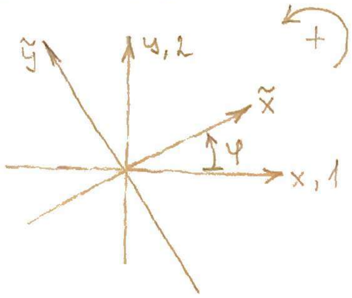
ít: $\sigma_I = tr\,\underline{\underline{\sigma}}$ ⤳ tr ⇒ trace ⇒ mátrix nyoma

$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\left[(tr\,\underline{\underline{\sigma}})^2 - tr\,\underline{\underline{\sigma}}^2\right]$

$\sigma_{III} = \det \underline{\underline{\sigma}}$

Főfeszültségek számolása Mohr-körökkel:

· Emlékeztető:



$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\tilde{y}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Válasszuk úgy a kezdeti (x,y) krsz.-t hogy az két főtengellyel, legyen ez (1, 2), essen egybe!

Azaz: $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ és $\tau_{xy} = 0$ } Következik ebből az is, hogy φ a harmadik főtengely körül forgat.

Így: $$\sigma_{\tilde{x}} = \underbrace{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}_{=:\sigma_K} + \underbrace{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}}_{=:R \geq 0,\ \text{mert}\ \sigma_1 \geq \sigma_2} \cdot \cos 2\varphi$$

σ_K: főfeszültségek átlaga

$$\sigma_{\tilde{x}} = \sigma_K + R \cdot \cos 2\varphi = \sigma_K + R \cdot \cos(-2\varphi)$$

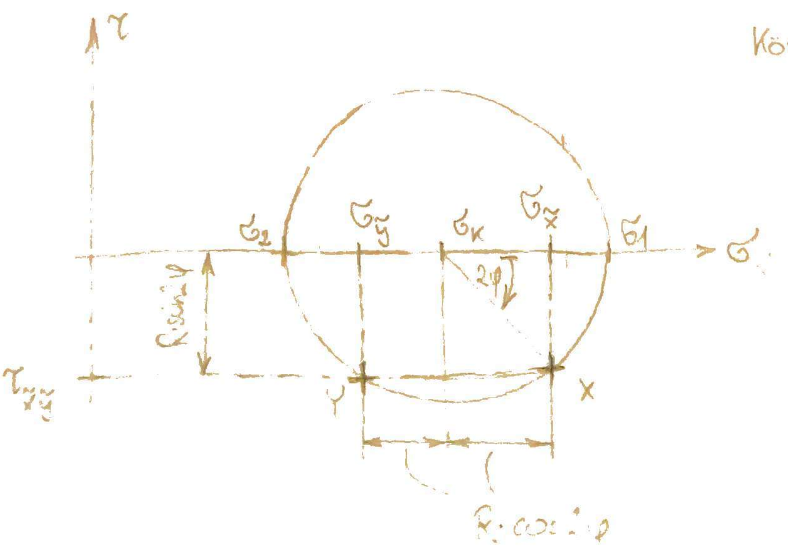
$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_K - R \cdot \cos 2\varphi = \sigma_K - R\cos(-2\varphi)$$

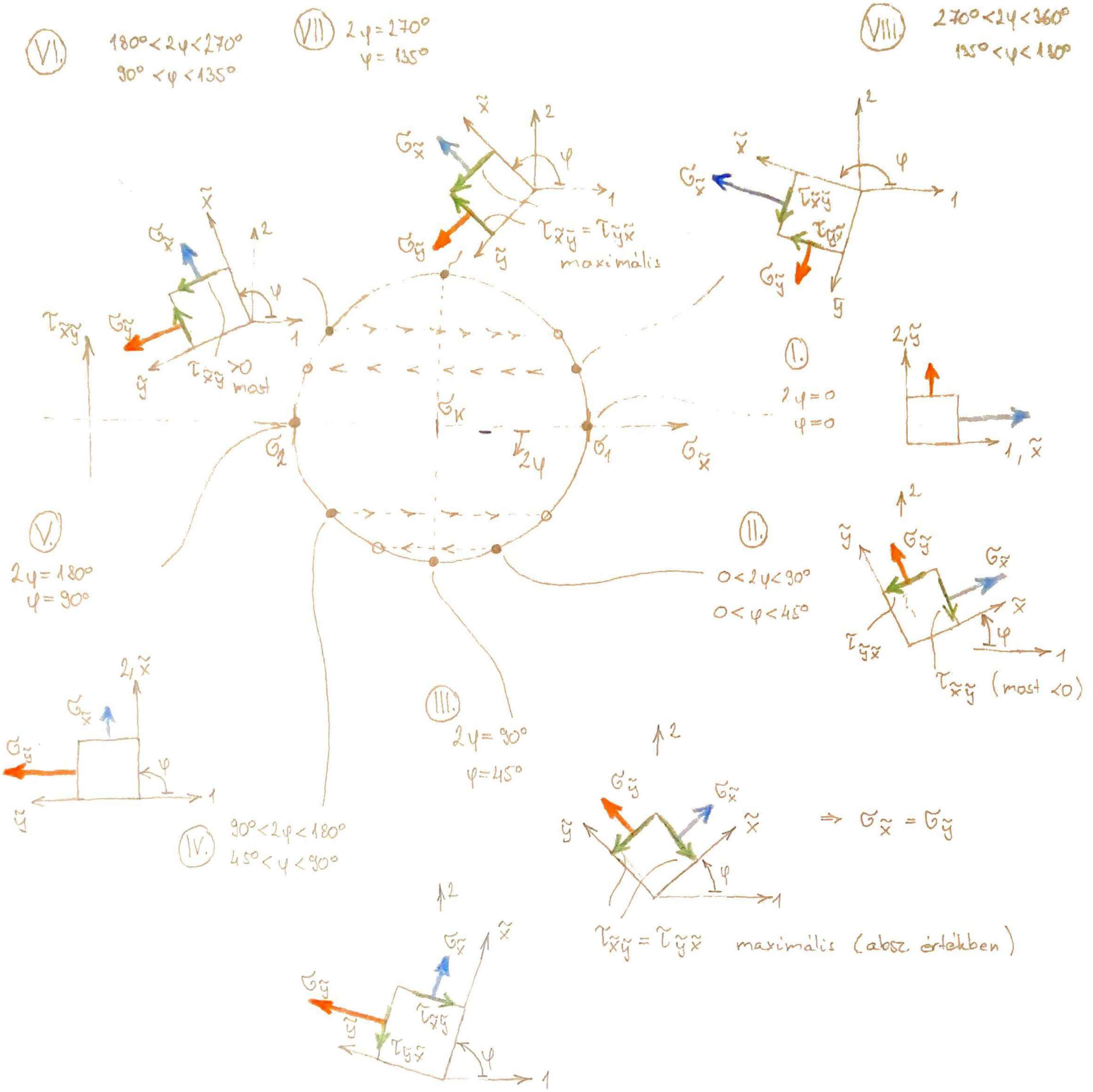
$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = -R \cdot \sin 2\varphi = R \cdot \sin(-2\varphi)$$

negatív előjel miatt a forgásirány megváltozik

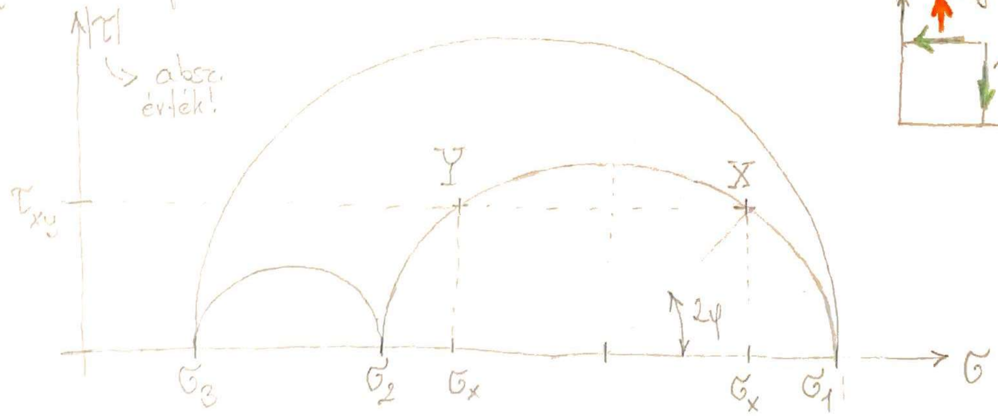
$\Downarrow$

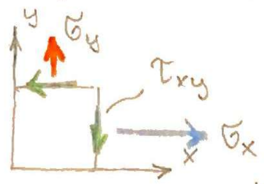
Kör paraméteres egyenlete





A gyakorlatban elég a körök felét megrajzolni, a forgatási irány pedig $\tau_{\tilde{x}\tilde{y}}$ irányából is meghatározható.





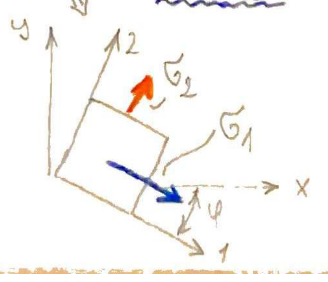
$\sigma_x > \sigma_y$ esetén

φ: az ábráról

$\Downarrow$

forgatási irány: amerre τ_{xy} mutat (nem τ_{yx}!)

$\Downarrow$



4.9. Határozzuk meg a főfeszültségeket, főirányokat!

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$

- Sajátérték számítással:

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 90-\sigma & 40 & 0 \\ 40 & 30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -50-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

Kifejtve: $\underbrace{(-50-\sigma)}_{=0} \cdot \underbrace{\left[(90-\sigma)(30-\sigma) - 40^2\right]}_{=0} = 0$

$\sigma = -50$ $\qquad$ $\sigma^2 - 120\sigma + 1100 = 0$

$$\sigma = \begin{cases} 110 \\ 10 \end{cases}$$

Sorbarendezve: $\sigma_1 = 110$ [MPa]

$\sigma_2 = 10$ [MPa]

$\sigma_3 = -50$ [MPa]

A főirányok:

- 1: $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}})\underline{e}_1 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 90-110 & 40 & 0 \\ 40 & 30-110 & 0 \\ 0 & 0 & -50-110 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) kiírva:

$$\left.\begin{aligned} -20e_{1x} + 40e_{1y} &= 0 \\ 40e_{1x} - 80e_{1y} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{összefüggő egyenletek: } e_{1x} \text{ és } e_{1y} \text{ nem független}$$

$-160e_{1z} = 0 \Rightarrow e_{1z} = 0$

$-20e_{1x} + 40e_{1y} = 0$

$\leftarrow e_{1x} = 2e_{1y}$ és legyen $e_{1y} = 1$ (lehetne bármi, ami nem 0)

Azaz: $\underline{e}_1 = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

nyújtjuk

Kell.: $\underline{e}_1^2 = \underline{e}_1^T \underline{e}_1 = 1 \iff \lambda^2 \cdot (2^2 + 1^2 + 0^2) = 1$

$|e_1| = 1$ $\qquad$ $\lambda = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

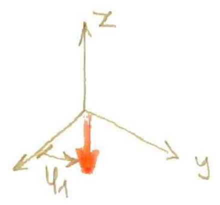
Tehát: $\underline{e}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-] = \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}447 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$

VAGY

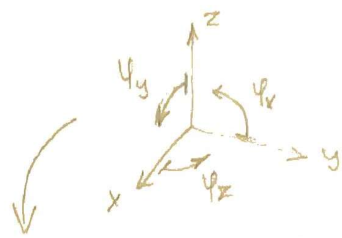
b)
$$\left.\begin{aligned} -20e_{1x} + 40e_{1y} &= 0 \\ 40e_{1x} - 80e_{1y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -e_{1x} + 2e_{1y} = 0$$

$-160e_{1z} = 0 \Rightarrow e_{1z} = 0$

Legyen $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1\\ \sin\varphi_1\\ 0\end{bmatrix}$, mert:



megj.: jobbkéz szabály miatt:



- (x,y) síkban lévő $\underline{e}$:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix}\cos\varphi_z\\ \sin\varphi_z\\ 0\end{bmatrix}$$

- (y,z) síkban:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix}0\\ \cos\varphi_x\\ \sin\varphi_x\end{bmatrix}$$

- (x,z) síkban:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix}\sin\varphi_y\\ 0\\ \cos\varphi_y\end{bmatrix}$$

megj.: más választás is lehetne, csak akkor φ jelentését át kell gondolni!

Azaz: $-e_{1x} + 2e_{1y} = 0$

$$-\cos\varphi_1 + 2\sin\varphi_1 = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} = 26{,}57^\circ$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1\\ \sin\varphi_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}894\\ 0{,}447\\ 0\end{bmatrix} \ [-]$$

σ_2: $(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_2\underline{\underline{E}})\cdot\underline{e}_2 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix}80 & 40 & 0\\ 40 & 20 & 0\\ 0 & 0 & -60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{2x}\\ e_{1y}\\ e_{2z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$e_{2z} = 0$

De $|\underline{e}_2| = 1$, ezért legyen $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}\cos\varphi_2\\ \sin\varphi_2\\ 0\end{bmatrix}$.

$$80\cdot\cos\varphi_2 + 40\sin\varphi_2 = 0$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi_2 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) + 180^\circ = 153{,}43^\circ$$

tg 180° periodikus, és pont így lesz $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jobbsodrású

Azaz: $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}\cos\varphi_2\\ \sin\varphi_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}447\\ 0{,}894\\ 0\end{bmatrix}$ [-]

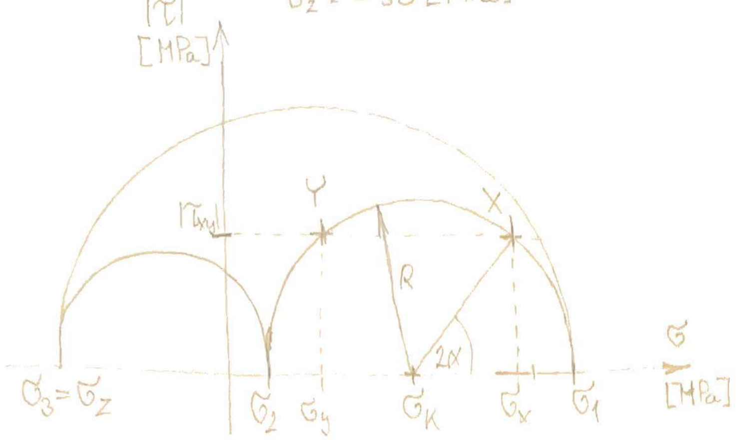
σ_3: $\underline{e}_3 = \underline{k} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ [-]

z irány

° Mohr - körökkel: $\sigma_x = 90$ [MPa] $\quad \tau_{xy} = 40$ [MPa]

$\sigma_y = 30$ [MPa]

$\sigma_z = -50$ [MPa]



1., X és Y pontok felvétele

2, $\sigma_K = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 60$ [MPa]

$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_K)^2 + \tau_{xy}^2} =$

$= \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$

3.,

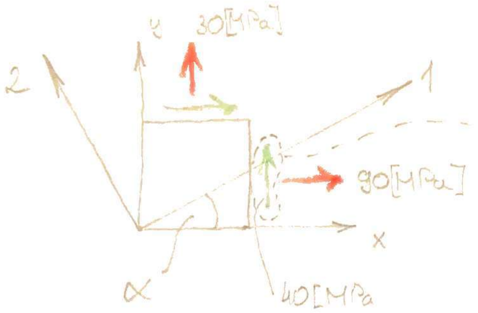
4., $tg\, 2\alpha = \frac{|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_K}$

$\Downarrow$

$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_K} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{40}{30}$

$= 26{,}57°$

5., Ábrázoljuk ezt:



A X ponthoz tartozó síkon lévő τ felfele mutat

$\Downarrow$

felfele kell x-et forgatni, hogy az 1 főirányt megkapjuk.

Azaz: $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}447 \\ 0 \end{bmatrix}$

6., A főirányok:

$\underline{e}_3 = \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ [-] $\quad \underline{e}_2 = \underbrace{\underline{e}_3 \times \underline{e}_1}_{\text{így lesz}} = \dots = \begin{bmatrix} -0{,}447 \\ 0{,}894 \\ 0 \end{bmatrix}$ [-]

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jobbsodrású

megj.: $\underline{e}_1 \neq \underline{e}_1 \times \underline{e}_3$!

$\Downarrow$

3., A főfeszültségek (leolvasva az ábráról)

$\sigma_1 = \sigma_K + R = 110$ [MPa]

$\sigma_2 = \sigma_K - R = 10$ [MPa]

$\sigma_3 = \sigma_Z = -50$ [MPa]