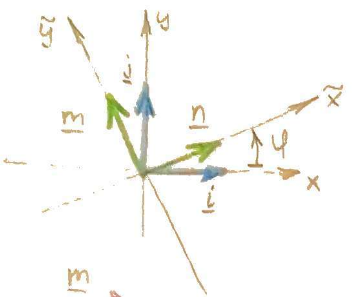
Szilárdságtan – 6. gyakorlat

Főfeszültségek, főirányok számítása: Feltéve, hogy az egyik irány már főirány
$\downarrow$
x, y vagy z

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \dashrightarrow \text{Mivel } \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \text{ így } \sigma_z \text{ főfesz.}$$

Forgassuk el az (x,y) krsz.-t a z tengely körül $\Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$

$\underline{n}$ és $\underline{m}$ egységvektorok

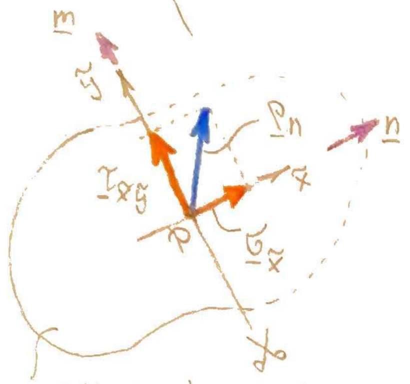


$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{m} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy: • a fesz. vektor: $\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$

• a normál fesz.: $\sigma_n = \underline{n}^T \cdot \underline{\rho}_n = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}$
($\underline{n}$ normálisú síkon) sorv., oszlopv.

• a csúsztató fesz.: $\tau_{nm} = \underline{m}^T \cdot \underline{\rho}_n = \underline{m}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}$
($\underline{n}$ normálisú síkon $\underline{m}$ irányban)



feszültség krumpli

Feszültségek az elfordított krsz. (fesz. kiskocka) esetén:

$$\sigma_{\tilde{x}} = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + 2\tau_{xy} \sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\sigma_{\tilde{y}} = \underline{m}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{m} = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - 2\tau_{xy} \sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

megj.:

$\underline{\sigma}_{\tilde{x}} = \underline{n} \cdot \sigma_{\tilde{x}}$

$\underline{\tau}_{\tilde{x}\tilde{y}} = \underline{m} \cdot \tau_{\tilde{x}\tilde{y}}$

$$\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} = \underline{m}^T \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} = -\sigma_x \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

szélsőérték

Főfeszültségek: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$ ha $\sigma_{1,2} \geq \sigma_3 = \sigma_z$, egyébként más az indexelés!

Főirányok: $\underline{e}_1, \underline{e}_2$

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) \in [-90°, 90°]$$

$\varphi_2 = \varphi_1 + 90° \Rightarrow \oplus$ vagy $\ominus$ úgy, hogy a krsz. jobbsodrású legyen

Maximális csúsztató feszültség:

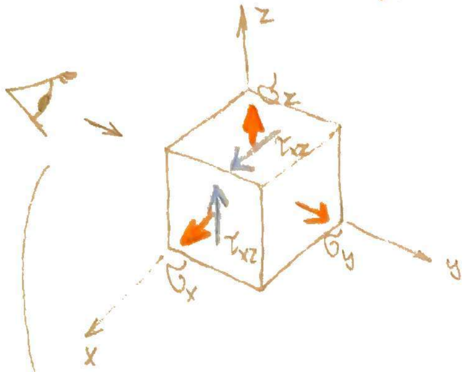
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} > 0$$

$$\tau_{min} = -\tau_{max}$$

4.3.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 40 \end{bmatrix} [MPa] \Rightarrow \text{Főfeszültségek, főirányok?}$$

Ábrázolva: (feltéve, hogy minden ⊕ lenne!)



Látszik, hogy σ_y főfesz. az y irány pedig főirány.

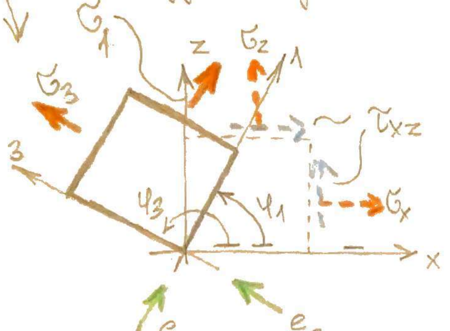
⇓

Az y tengely körül forgatva a feszültségi kiskockát, megkereshetjük a másik kettő főirányt.

$$\sigma_{??} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} =$$

$$= \begin{cases} 52,43\ [MPa] \\ -32,43\ [MPa] \end{cases}$$

Így lesz jobbsodrású krsz.!



Rendezzük sorba a főfeszültségeket!

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 52,43\ [MPa] \\ \sigma_2 &= \sigma_y = 40\ [MPa] \\ \sigma_3 &= -32,43\ [MPa] \end{aligned}\right\} \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \ !$$

A főirányok:

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = 67,5^\circ \Rightarrow \text{1 és x között bezárt forgásszög}$$

Hogy jobbsodrású legyen a krsz.:

$$\varphi_3 = \varphi_1 + 90^\circ = 157,5^\circ.$$

A főirányok egységvektora:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,383 \\ 0 \\ 0,924 \end{bmatrix} [-] \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$$

$$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 \\ 0 \\ \sin\varphi_3 \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,924 \\ 0 \\ 0,383 \end{bmatrix} [-] \qquad \text{VAGY: } \underline{e}_3 \underset{\uparrow}{=} \underline{e}_1 \times \underline{e}_2$$

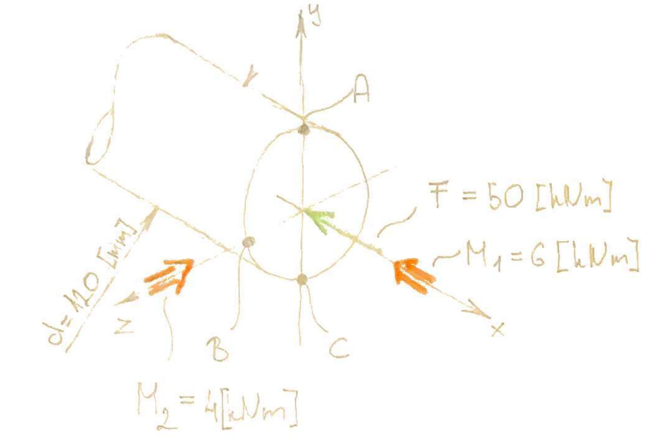
ábráról lenézve, vagy trig. azonossággal

Így lesz jobbsodrású!

4.7.

Főfesz., főirányok A, B, C pontokban?

—o—



A feszültségek eloszlása:

- normál igbv.-ből:

$$\sigma_x = \frac{-F}{A} = -4{,}42 \text{ [MPa]}$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 11\,310 \text{ [mm}^2\text{]}$$

- hajlító igbv.-ből:

$$\sigma_x = +\frac{M_2}{I_z}\cdot y \Rightarrow \sigma_{x,max} = \frac{M_2}{I_z}\cdot\frac{d}{2} = 23{,}58 \text{ [MPa]}$$

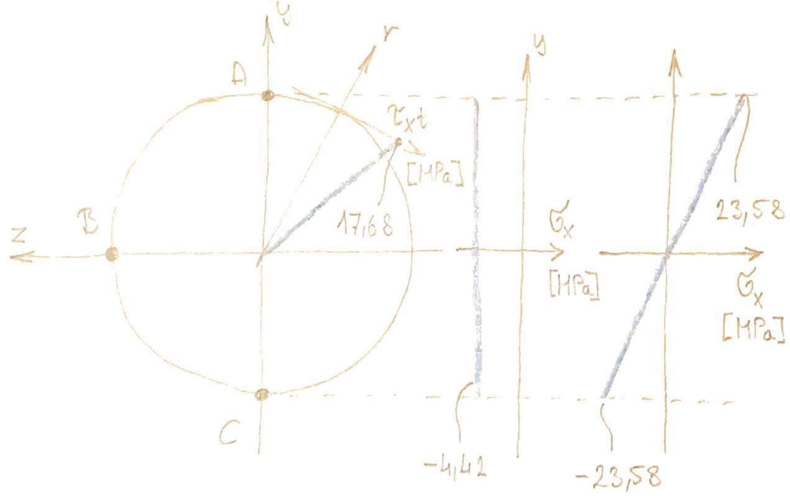
hiszen y>0 esetén húzott

$$I_z = \frac{d^4\pi}{64} = 1{,}0179\cdot 10^7 \text{ [mm}^4\text{]}$$

- csavaró igbv.-ből:

$$\tau_{xt} = \frac{M_1}{I_p}\cdot r \Rightarrow \tau_{xt,max} = \frac{M_1}{I_p}\cdot\frac{d}{2} = 17{,}68 \text{ [MPa]}$$

$$I_p = \frac{d^4\pi}{32} = 2{,}0357\cdot 10^7 \text{ [mm}^4\text{]}$$



Az A pontban:

- A fesz. áll.: $\underline{\underline{\sigma}}_A = \begin{bmatrix} 19{,}16 & 0 & -17{,}68 \\ 0 & 0 & 0 \\ -17{,}68 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ [MPa]
- Mivel $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, így σ_y főfeszültség.
- Az (x,z) síkban lévő főfeszültségek:

$$\sigma_{?} = \frac{\sigma_x+\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 29{,}69 \text{ [MPa]} = \sigma_1 \\ -10{,}53 \text{ [MPa]} = \sigma_3 \end{cases}$$

és $\sigma_2 = \sigma_y = 0$ [MPa]

- A főirányok:

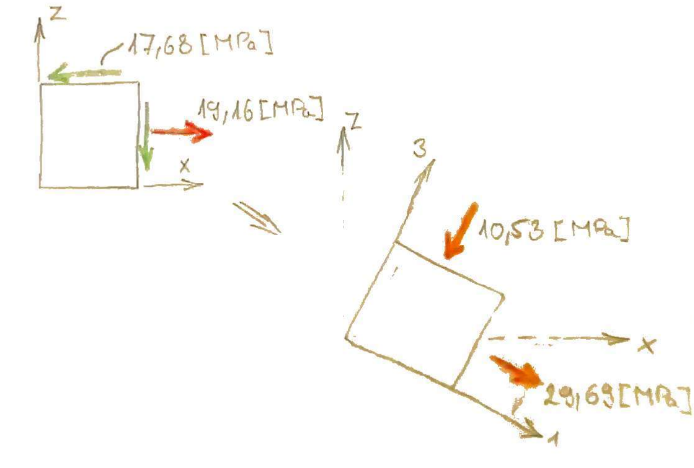
$$\varphi_1 = \arctan\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xz}} = -30{,}78°$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + 90° = 59{,}22°$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}859 \\ 0 \\ -0{,}512 \end{bmatrix} [-]$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underbrace{\underline{e}_2}_{\underline{k}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}512 \\ 0 \\ 0{,}859 \end{bmatrix} [-]$$

Ábrázolva:



A B pontban:

- A fesz. áll.:

$$\underline{\underline{\sigma}}_B = \begin{bmatrix} -4{,}42 & 17{,}68 & 0 \\ 17{,}68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [MPa]$$

- Mivel $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, így σ_z főfeszültség
- Az (x,y) síkban lévő főfeszültségek:

$$\sigma_? = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 15{,}61\ [MPa] = \sigma_1 \\ -20{,}03\ [MPa] = \sigma_3 \end{cases} \quad \text{és } \sigma_2 = \sigma_z = 0\ [MPa]$$

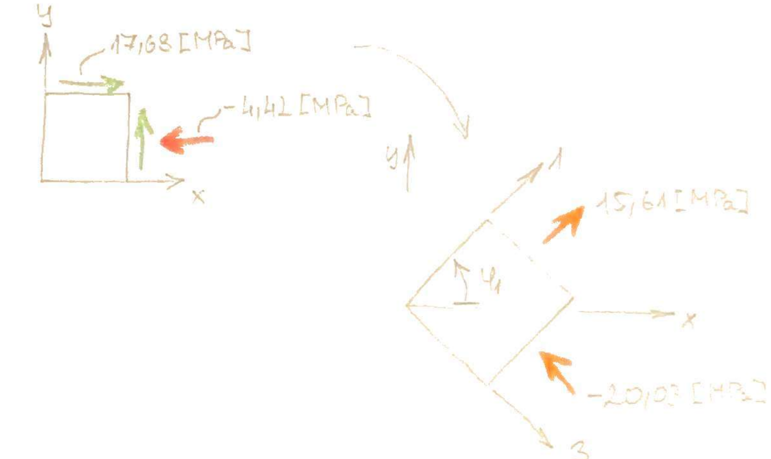
- A főirányok:

$$\varphi_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = 48{,}56°$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}662 \\ 0{,}75 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underbrace{\underline{e}_2}_{\underline{k}} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}662 \\ 0 \end{bmatrix} [-]$$

Ábrázolva:



A C pontban:

- A fesz. áll.: $\underline{\underline{\sigma}}_C = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 17{,}68 \\ 0 & 0 & 0 \\ 17{,}68 & 0 & 0 \end{bmatrix} [MPa]$
- Mivel $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$, ezért σ_y főfeszültség
- Az (x,z) síkban ébredő főfeszültségek

$$\sigma_? = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 8{,}55\ [MPa] = \sigma_1 \\ -36{,}55\ [MPa] = \sigma_3 \end{cases} \quad \text{és } \sigma_2 = \sigma_y = 0\ [MPa]$$

- A főirányok:

$$\varphi_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}} = 64{,}18°$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}435 \\ 0 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} [-]$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}9 \\ 0 \\ 0{,}435 \end{bmatrix} [-]$$