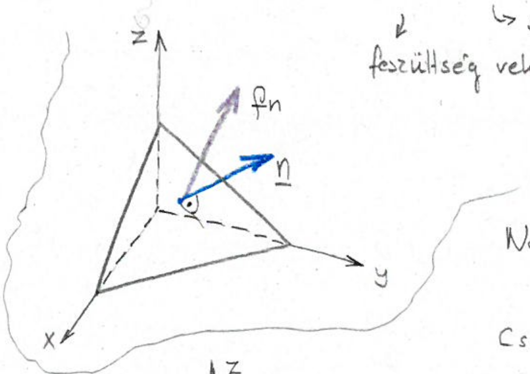
Szilárdságtan - 5. gyakorlat

Feszültségi állapot: tenzor mennyiség ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fv.: $f_n = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$)

f_n ↓ feszültség vektor; $\underline{n}$ ↳ sík normálisa

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

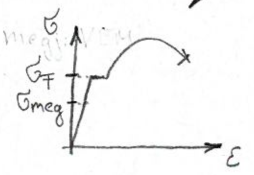


Mire kell ez?

$$\sigma_{egy} = f(\underline{\underline{\sigma}})$$

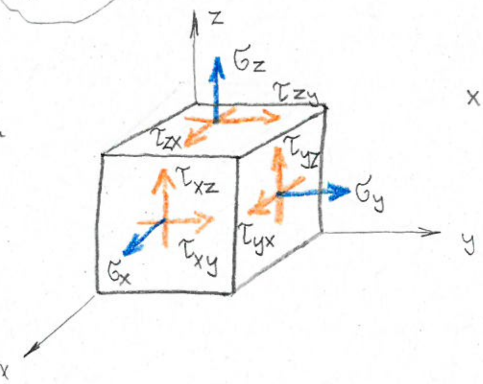
↓ egyenértékű feszültség: - max σ? - max τ? - max U?

Cél: $\sigma_{egy} \le \sigma_{meg}$



megj.: VEM

Ábrázolás: (mind a 6 lapon vannak fesz.-ek, csak a szemben lévőken ellentétes az irányuk)



Normál fesz.: σ_x $\Rightarrow$ $\perp$ a síkra

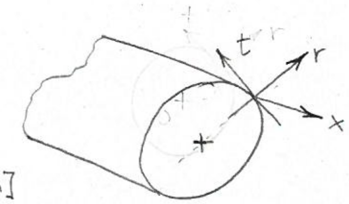
↙ x normálisú síkon, x irányban

Csúsztató fesz.: $\Rightarrow$ $\parallel$ a síkkal

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

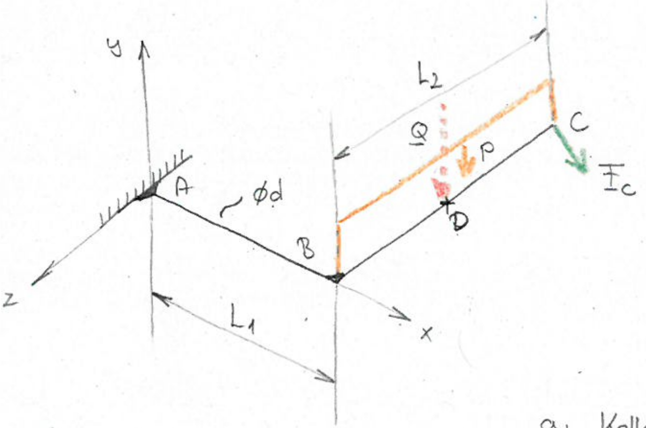
x normálisú síkon ↘ y irányban

megj.: - lehetne más krsz., nem csak (x, y, z) pl.: (x, r, t)



Összetett igénybevételek:

1.25.



$L_1 = 3$ [m] $\qquad d = 30$ [mm]

$L_2 = 2$ [m]

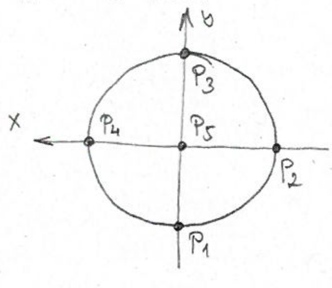
$p = 40$ [N/m]

$$\underline{F}_c = \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} \text{[N]}$$

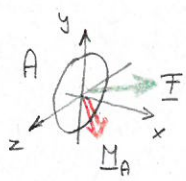
a) Az A km.-ben a feszültségek eloszlása

b) A P_i pontokban a feszültségi állapot

Az A km.:



a) Kellenek az A km. igénybevételei. Redukáljuk a terhelő erőrendszert az A pontba!



A megoszló erőrsz.:

$$\underline{Q} = -pL_2 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -pL_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix} \text{[N]}$$

$$\underline{r}_D = \underline{r}_B + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\underline{r}_{BC}}_{\underline{r}_C - \underline{r}_B} = \frac{1}{2}(\underline{r}_B + \underline{r}_C) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{[m]}$$

$$\underline{r}_B = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{r}_C = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ -L_2 \end{bmatrix}$$

Az eredő erő:

x normálisú a sík

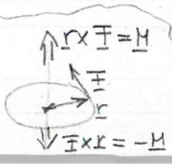
$$\underline{F} = \underline{F}_c + \underline{Q} = \begin{bmatrix} -150 \\ +120 \\ -50 \end{bmatrix} \text{[N]} = \begin{bmatrix} +N \\ +V_y \\ +V_z \end{bmatrix}$$

Az eredő nyomaték:

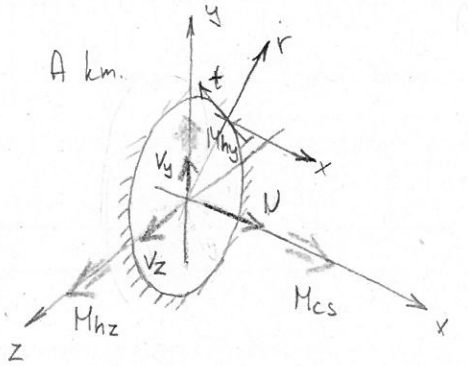
x normálisú sík

$$\underline{M}_A = \underline{r}_C \times \underline{F}_c + \underline{r}_D \times \underline{Q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 - 80 \\ 450 + 0 \\ 600 - 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} \text{[Nm]} = \begin{bmatrix} +M_{cs} \\ M_{hy} \\ M_{hz} \end{bmatrix}$$

megj.:



Igénybevételek a befogás keresztmetszetében: így hat az elhagyott rész (a teljes tartó) a befogás km-ére.



Definiáljuk most N, V_x, V_y és M_{cs}, M_{hy}, M_{hz} értékét úgy, mint $\underline{F}$ és $\underline{M}_A$ komponenseit!

$N = -150$ [N] $\qquad M_{cs} = 320$ [Nm]

$V_y = 120$ [N] $\qquad M_{hy} = 450$ [Nm]

$V_z = -50$ [N] $\qquad M_{hz} = 360$ [Nm]

A keresztmetszet jellemzői:

- terület: $A = \frac{d^2 \pi}{4} = 706,9$ [mm²]
- ekvatoriális másodrendű nyomatékok:
$$I_z = I_y = \frac{d^4 \pi}{64} = 39760,8 \ [mm^4]$$
- poláris másodrendű nyomaték:
$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 79521,6 \ [mm^4]$$

Az igénybevételekből adódó feszültségek eloszlása:

- Normáligénybevétel: N → ábra alapján húz
$$\underset{\sim}{\sigma_x^N} = \frac{N}{A} = \frac{-150}{706,9} = -0,212 \ [MPa]$$
x irányú normálfesz.-et eredményez

- Nyírás: V olyan irányú fesz.-et ad, amilyen irányú V maga

  ∘ V_y:
$$\tau_{xy}^{V_y}(y) = \overset{V_y \text{ + irányba mutat}}{\widetilde{+}} \frac{V_y}{I_z}\frac{S(y)}{a(y)} = \ldots = + \frac{4}{3}\frac{V_y}{A} \cdot \left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]$$
x normálisú síkon — y irányba — előadás jegyzetben

jellegzetes értékek:
$$\tau_{xy}\left(\frac{d}{2}\right) = \tau_{xy}\left(-\frac{d}{2}\right) = 0 \ [MPa]$$
$$\tau_{xy}(0) = \tau_{xy,max} = 0,226 \ [MPa]$$

  ∘ V_z:
$$\tau_{xz}^{V_z}(z) = + \frac{V_z}{I_y}\frac{S(z)}{a(z)} = + \frac{4}{3}\frac{V_z}{A}\left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2\right]$$
x normálisú síkon — z irányban — ⊕V_z esetén ⊕τ_{xz} ébred

jellegzetes értékek:
$$\tau_{xz}\left(\frac{d}{2}\right) = \tau_{xz}\left(-\frac{d}{2}\right) = 0 \ [MPa]$$
$$\tau_{xz}(0) = \tau_{xz,max} = -0,094 \ [MPa]$$

- Csavarás:
$$\tau_{xt}^{M_{cs}}(r) = \frac{M_{cs}}{I_p} \cdot r$$
x norm. sík. — tangenciális (érintő) irány

⇒ jellegzetes értékek: $\tau_{xt}(0) = 0$ [MPa]

$\tau_{xt}\left(\frac{d}{2}\right) = 60,36$ [MPa]

• Hajlítás:

○ Mhy: $\sigma_x^{Mhy}(z) = + \frac{M_{hy}}{I_y} \cdot z$ ⇒ jellegzetes értékek:

⊕, mert ⊕ Mhy ⇒ ⊕ σ_x ⊕ z esetén

$\sigma_x^{Mhy}(0) = 0$ [MPa]

$\sigma_x^{Mhy}\left(\frac{d}{2}\right) = 169,77$ [MPa]

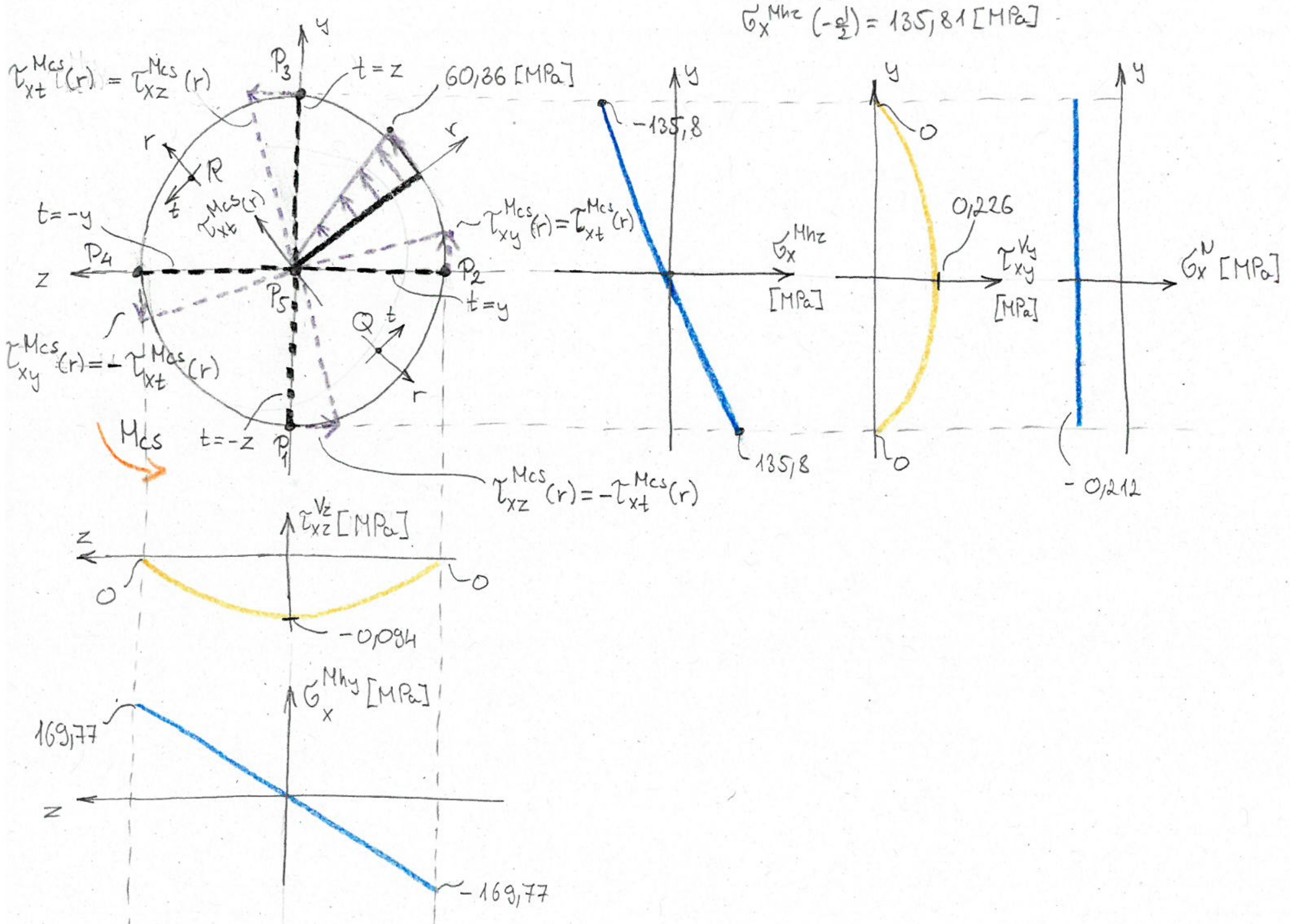
$\sigma_x^{Mhy}\left(-\frac{d}{2}\right) = -169,77$ [MPa]

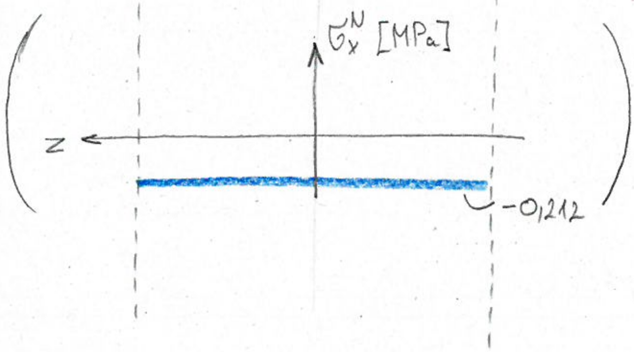
○ Mhz: $\sigma_x^{Mhz}(y) = - \frac{M_{hz}}{I_z} \cdot y$ ⇒ jellegzetes értékek:

⊖, mert ⊕ Mhz ⇒ ⊖ σ_x ⊕ y esetén

$\sigma_x^{Mhz}\left(\frac{d}{2}\right) = -135,81$ [MPa]

$\sigma_x^{Mhz}\left(-\frac{d}{2}\right) = 135,81$ [MPa]





~> persze, innen nézve is konstans...

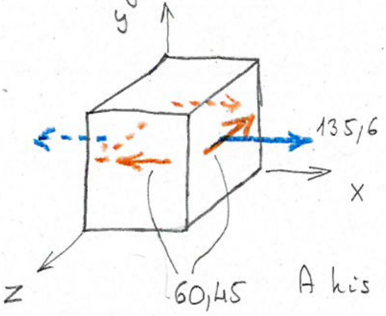
b, P_1 A feszültségek összegzése (szuperpozíció): csak azonos típusú fesz.-eket adhatunk össze!

$$\sigma_x^{P_1} = \sigma_x^{N} + \sigma_x^{M_{hy}}(0) + \sigma_x^{M_{hz}}\left(-\frac{d}{2}\right) = -0{,}212 + 0 + 135{,}8 = 135{,}6 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xy}^{P_1} = \tau_{xy}^{V_y}\left(-\frac{d}{2}\right) = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{\tau_{xz}^{M_{cs}}\left(\frac{d}{2}\right)}_{-\tau_{xt}^{M_{cs}}\left(\frac{d}{2}\right)} + \tau_{xz}^{V_z}(0) = -60{,}36 - 0{,}094 = -60{,}45 \text{ [MPa]}$$

A feszültségi kiskocka: [MPa]



A feszültségi tenzor mátrixa:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 135{,}6 & 0 & -60{,}45 \\ 0 & 0 & 0 \\ -60{,}45 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

A kis kocka átellenes lapjain is ébrednek feszültségek (ellentétes értelműek)!

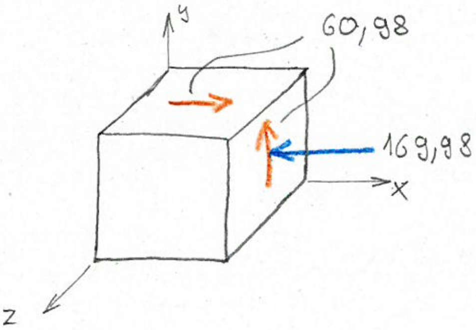
P_2

$$\sigma_x = 0 - 0{,}212 - 169{,}77 = -169{,}98 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xy} = 60{,}36 + 0{,}226 = 60{,}58 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xz} = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -169{,}98 & 60{,}58 & 0 \\ 60{,}58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

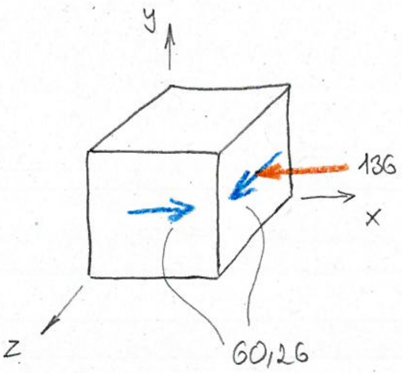


P_3

$$\sigma_x = -135{,}8 - 0{,}212 + 0 = -136 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xy} = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{xz} = 60{,}36 - 0{,}094 = 60{,}266 \text{ [MPa]}$$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -136 & 0 & 62{,}6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 60{,}26 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

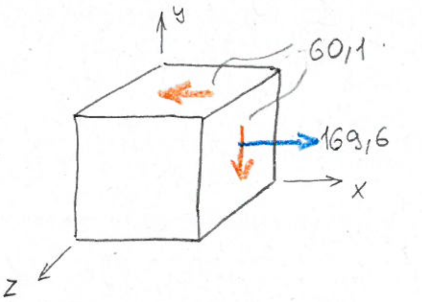
P_4

$\sigma_x = 0 - 0{,}212 + 169{,}77 = 169{,}558$ [MPa]

$\tau_{xy} = -60{,}36 + 0{,}226 = -60{,}134$ [MPa]

$\tau_{xz} = 0$ [MPa]

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 169{,}6 & -60{,}1 & 0 \\ -60{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$



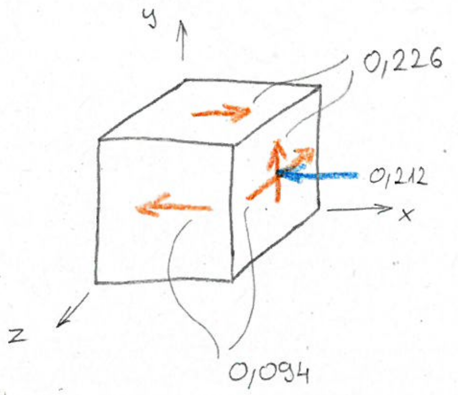
P_5

$\sigma_x = 0 - 0{,}212 + 0 = -0{,}212$ [MPa]

$\tau_{xy} = 0 + 0{,}226 = 0{,}226$ [MPa]

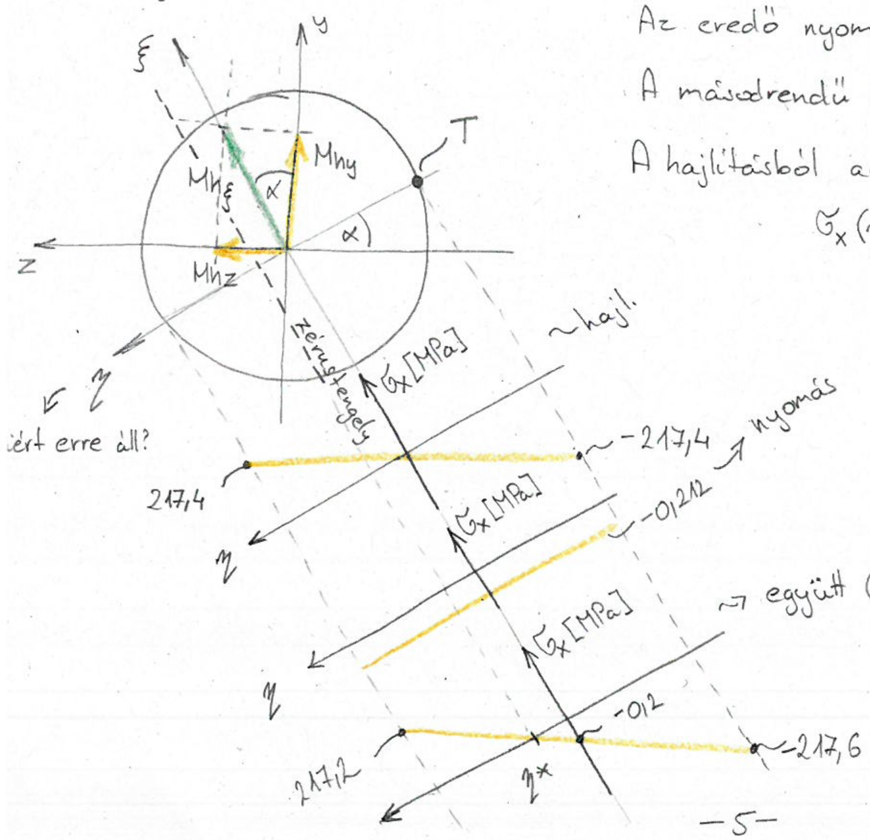
$\tau_{xz} = 0 - 0{,}094 = -0{,}094$ [MPa]

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -0{,}212 & 0{,}226 & -0{,}094 \\ 0{,}226 & 0 & 0 \\ -0{,}094 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$



Megjegyzések:

1, Mivel a kör km. minden súlyponton átmenő tengelye főtengely, így nem feltétlen kell a ferde hajlítást használnunk!



Az eredő nyomaték: $M_{h\xi} = \sqrt{M_{hy}^2 + M_{hz}^2} = 576{,}3$ [Nm]

A másodrendű nyom.: $I_\xi = I_y = I_z = \ldots$

A hajlításból adódó fesz. eloszlása:

$$\sigma_x(\eta) = + \frac{M_{h\xi}}{I_\xi} \cdot \eta \quad \Rightarrow \sigma_x\left(\frac{d}{2}\right) = 217{,}4 \text{ [MPa]}$$

A maximális feszültség helye: T pont

$y_T = \frac{d}{2} \cdot \sin\alpha = 9{,}38$ [mm]

$z_T = -\frac{d}{2} \cos\alpha = -11{,}71$ [mm]

Mivel van normáligénybevétel, így a zérustengely eltolódik (ferde hajlításnál elfordul!)

A teljes fesz. eloszlás:

$$\sigma_x(\eta^*) = \frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\cdot\eta^* + \frac{N}{A} \underset{\uparrow}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \eta^* = -\frac{N}{A}\cdot\frac{I_\xi}{M_{h\xi}} = 0{,}0146\,[mm]$$

a zérustengelyen