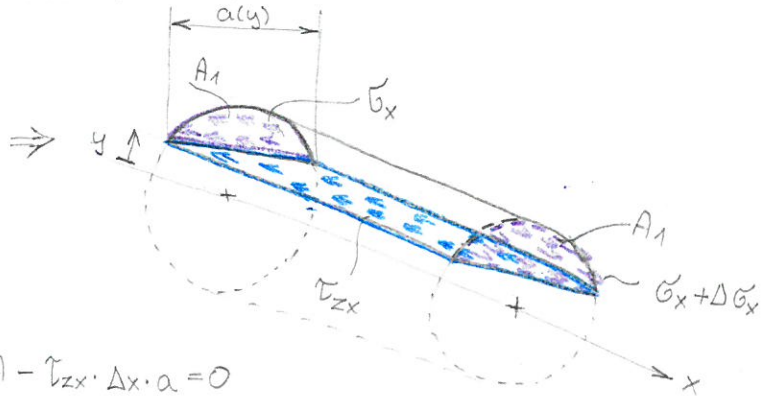
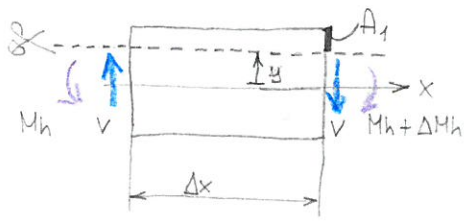


Szilárdságtan - 4. gyakorlat

Nyírásból adódó feszültségek:

• Vegyünk ki a rüdből egy kicsiny darabot ($V(x)$ áll.)



$\sum F_y = 0:$

$$\int_{(A_1)} -\sigma_x dA + \int_{(A_1)} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) dA - \tau_{zx} \cdot \Delta x \cdot a = 0$$

$$\tau_{zx} = \frac{1}{a \cdot \Delta x} \cdot \int_{(A_1)} \Delta\sigma_x dA = \frac{\Delta M_h}{\Delta x} \cdot \frac{1}{I_z \cdot a} \cdot \int_{(A_1)} y dA$$

$$\sigma_x = \frac{M_h}{I_z} \cdot y \Rightarrow \Delta\sigma_x = \frac{\Delta M_h}{I_z} \cdot y$$

Ha most $\Delta x \rightarrow 0:$

$$\tau_{zx}(y) = \tau_{xz}(y) = - \frac{V \cdot S(y)}{I_z \cdot a(y)}$$

Ez így előjel helyes, mutatja az irányt is!

$S(y)$: Az (A_1) km. stat. nyom. a a z tengelyre!

Nem a teljes km.-é! az amúgy is 0, mivel z átmege a súlyponton!

Ha az előjeleket nem vesszük figyelembe:

$$\tau(y) = \frac{V \cdot S(y)}{I_z \cdot a(y)} \rightarrow \text{adott } y \text{ koordináta feletti rész stat. nyom. a}$$

Csavarásból adódó feszültségek: - csak körszim. km. esetén, mert azok nem vetemednek!

Csavarás

Fajl. elcsavaródás:

$$\varphi = \frac{d\psi}{dx} = \frac{\Delta\psi}{L_0}, \quad \varphi: \text{szögelf.}$$

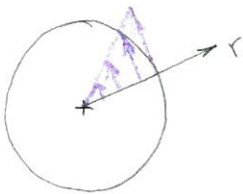
konst. M_t igév.

$$\varphi = \frac{M_t}{I_p \cdot G} \quad \text{csavarómerőség}$$

A fesz. eloszlás:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$$

megj.:



Húzás

Fajl. alakváltozás

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L_0}, \quad u: \text{elmozdulás}$$

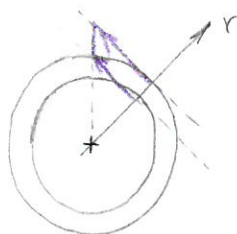
$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{AE} \quad \text{húzómerőség}$$

megj.: hajlítás \rightarrow görbület

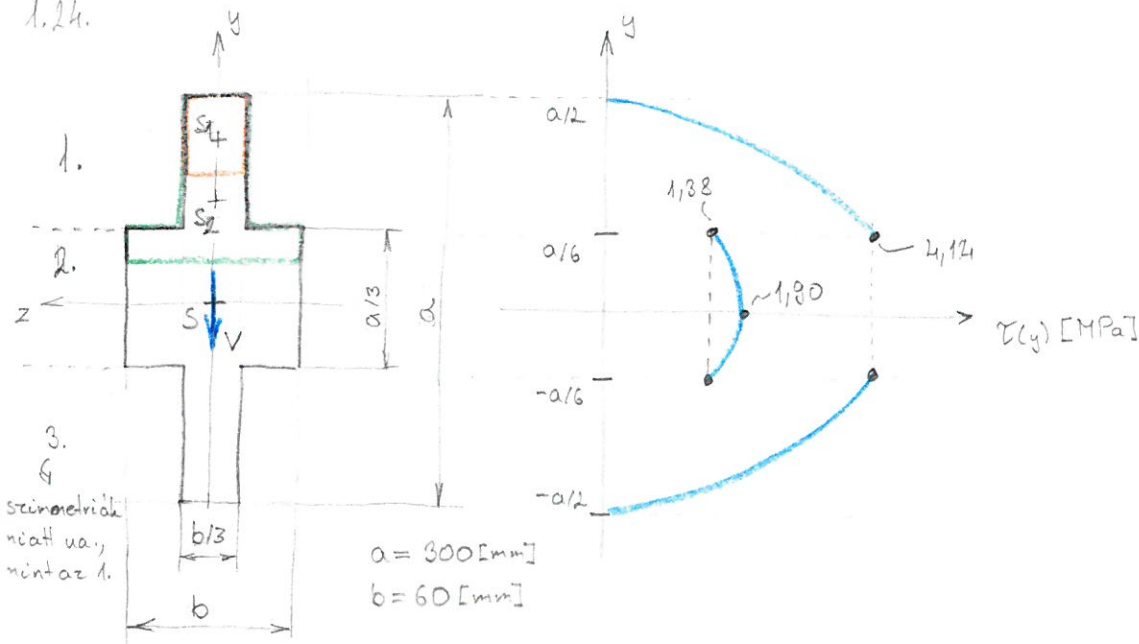
$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_h}{I_z \cdot E} \quad \text{h.m.}$$

megj.: Bredt-képlet: vékonyfalú csőre

$$\tau \approx \frac{M_t}{d_k} / A$$



1.24.



$V = 20 \text{ [kN]}$

Határozzuk meg a csúsztató feszültség eloszlását: $\tau(y)$?
Hol van, és mekkora a maximum?

A km. másodrendű nyomatéka:

$$I_z = 2 \cdot \frac{b/3 \cdot (a/3)^3}{12} + \frac{b/3 \cdot a^3}{12} = \frac{ba^3}{486} + \frac{ba^3}{36} = ba^3 \frac{1+27}{972} = \frac{28ka^3}{972} = 48,3 \cdot 10^6 \text{ [mm}^4\text{]}$$

A km. az I. és II. részekre bontható.

1. $a/6 < y < a/2$ (azaz: $50 < y < 150 \text{ [mm]}$)

A húsvastagság: $a_1(y) = \frac{b}{3} (= 20 \text{ [mm]})$

átlagolás!

Az y koordináta feletti rész: - súlypontja: $y_{S1} = \frac{a/2 + y}{2} (= \frac{150 + y}{2} \text{ [mm]})$

- területe: $A_1 = \frac{b}{3} \cdot (a/2 - y) (= 20 \cdot (150 - y) \text{ [mm}^2\text{]})$

- statikai nyomatéka a z tengelyre:

$S_1(y) = y_{S1} \cdot A_1 = \frac{b}{6} (a/2 - y)^2$

$(= 225000 - 10y^2 \text{ [mm}^3\text{]})$

Az ébredő feszültség:

$\tau_1(y) = \frac{V \cdot S_1(y)}{I_z \cdot a_1(y)} = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{\frac{b}{6} (\frac{a^2}{4} - y^2)}{\frac{b}{3}} = \frac{V}{2I_z} \cdot (\frac{a^2}{4} - y^2) (= 4,65517 - 0,000206897 \cdot y^2 \text{ [MPa]})$

A jellegzetes pontokban számolt konstans } hasonló az $1-y^2$ fv.-hez \Rightarrow parabolikus eloszlás

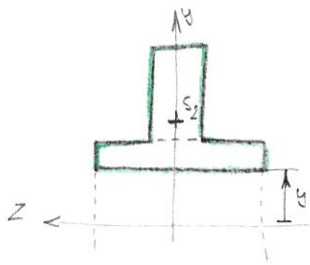
függvényértékek: $\tau_1(\frac{a}{2}) = \frac{V}{2I_z} \cdot 0 = 0 \text{ [MPa]}$

$\tau_1(\frac{a}{6}) = \frac{V}{2I_z} \cdot (\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{36}) = \frac{Va^2}{9I_z} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 300}{9 \cdot 48,3 \cdot 10^6} = 4,14 \text{ [MPa]}$

2. $-a/6 < y < a/6$, azaz: $-50 < y < 50$ [mm]

A húsvastagság: $a_2(y) = b$

Az y koordináta feletti rész: - statikai nyomatéka a z tengelyre:



$$S_2(y) = \underbrace{\frac{a/2 + a/6}{2}}_{\text{súlypont } a/3} \cdot \underbrace{\frac{a \cdot b}{3}}_{\text{terület } ab/3} + \frac{a/6 + y}{2} \cdot \left(\frac{a}{6} - y\right) \cdot b =$$

$$= \frac{a^2 b}{27} + \frac{b}{2} \left(\frac{a^2}{36} - y^2\right) \quad (= 275000 - 30y^2 \text{ [mm}^3])$$

Az ébredő feszültség:

$$\tau_2(y) = \frac{V \cdot S_2(y)}{I_z \cdot a_2(y)} = \frac{V}{I_z} \cdot \left[\frac{a^2}{27} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{36} - y^2\right) \right] \quad (= (\dots) - (\dots)y^2)$$

A jellegzetes pontokban:

$$\tau_2\left(\frac{a}{6}\right) = \tau_2\left(-\frac{a}{6}\right) = \frac{V}{I_z} \left[\frac{a^2}{27} + 0 \right] = \frac{Va^2}{27I_z} = 1,38 \text{ [MPa]} \quad \text{megj.: } \tau_2\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{\tau_1\left(\frac{a}{6}\right)}{3}$$

$$\tau_2(0) = \frac{Va^2}{I_z} \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{72}\right) = \frac{Va^2}{9I_z} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) = \frac{11}{24} \cdot \frac{Va^2}{9I_z} = 1,30 \text{ [MPa]}$$

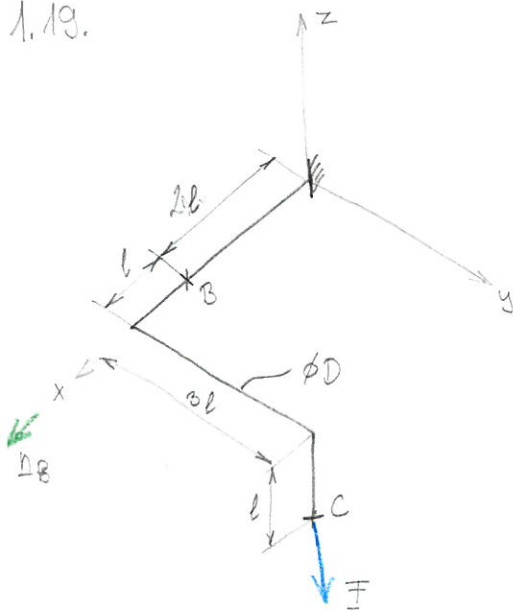
$\frac{3/24 + 8/24}{> 1/3}$

3-szorosára nőtt a húsvast!

Megjegyzések: - Hajlított tartóknál gyakran elhanyagoljuk a nyírásból eredő feszültségeket
Okai: - (Általában kicsi az értéke...)

- A km. szélső szálaiban az értéke 0, ahol a σ maximuma van!
- Nagyobb értéket a km. középső részén vesz fel τ , ahol viszont σ kicsi.

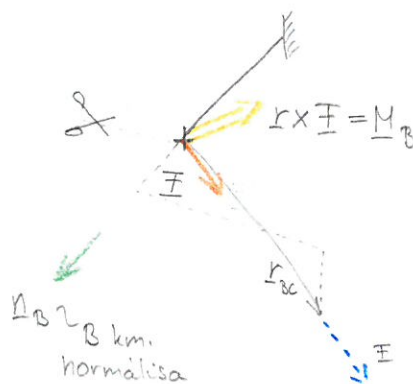
1.19.



$$F = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ -200 \end{bmatrix} \text{ [N]} \quad \begin{matrix} B = 50 \text{ [mm]} \\ l = 1 \text{ [m]} \end{matrix}$$

Adjuk meg a B km.-ben a csavarásból adódó feszültség eloszlását!

Az F erő redukciója az igénybevételhez: ($r \times F$ vagy $F \times r$?)



$$M_B = r_{BC} \times F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ -200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -100 \\ -500 \end{bmatrix} \text{ [Nm]}$$

$$r_{BC} = r_C - r_B = \begin{bmatrix} 3l \\ 3l \\ -l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = l \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ [m]}$$

A B km. csavaró igénybevétele:

$$M_t = \frac{M_B \cdot n_B}{i} = -200 \text{ [Nm]}$$

megj.: a hajlító igbv. vektora:

$$M_h = \frac{M_B}{i} - \frac{M_t \cdot i}{M_t}, \text{ de ez most nem kell...}$$

A B km. poláris másodrendű nyomatéka:

$$I_p = \frac{D^4 \pi}{32} = 613,6 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]}$$

A feszültség eloszlása:

$$\tau(r) = \frac{M_{t1}}{I_p} \cdot r \Rightarrow \text{lin. fv!}$$

konst.

A maximális feszültség: a legnagyobb sugáron

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t1}}{I_p} \cdot \frac{D}{2} = 8,15 \text{ [MPa]}$$

[Nmm] [mm⁴] [mm]

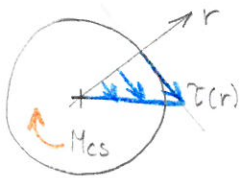
VAGY:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t1}}{K_p}$$

↑ $K_p \rightarrow$ poláris keresztmetszeti tényező

$$K_p = \frac{I_p}{D/2}$$

z
y



Megj: És ha csőből lenne?

$$D = 50 \text{ [mm]}, d = 40 \text{ [mm]}$$

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t1}}{I_p} \cdot \frac{D}{2} = 13,8 \text{ [MPa]} \quad (169\%)$$

A térfogatok, amik arányosak a tömeggel:

$$V_{\text{tömör}} = 7l \cdot \frac{D^2 \pi}{4} = \dots$$

$$V_{\text{cső}} = 7l \cdot \frac{(D^2 - d^2) \pi}{4} = \dots$$

$$\frac{V_{\text{cső}}}{V_{\text{tömör}}} = \frac{D^2 - d^2}{D^2} = \frac{25 - 16}{25} = \frac{9}{25} = 36\%$$

→ alu...

$$E = 70 \text{ [GPa]}$$

$$\nu = 0,34 \text{ [-]}$$

$$\tau_{\text{meg}} = 100 \text{ [MPa]}$$

Méretezzük a tengelyt!

Mennyit fordul el a c km.?

A terhelő nyomaték: $M_c = F \cdot c = 0,3 \text{ [kNm]} = 3 \cdot 10^5 \text{ [Nmm]}$

A reakciók meghatározása:

$$\sum M_x = 0: M_A + M_c + M_B = 0 \quad (1) \Rightarrow \text{statikailag határozatlan}$$

Az alakváltozási feltétel:

$$\psi_A + \Delta \psi_{AC} + \Delta \psi_{CB} = \psi_B$$

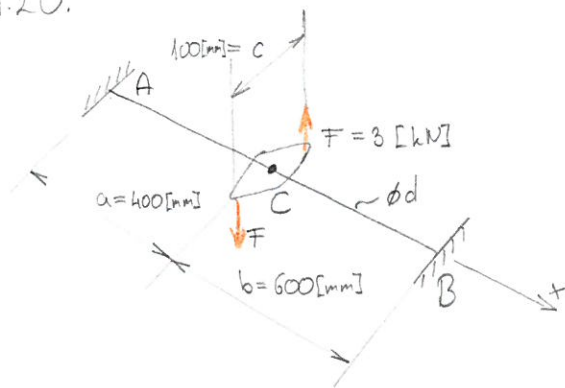
betfogás ← 0 0 → betfogás

$$\frac{M_B + M_c}{I_p \cdot G} \cdot a + \frac{M_B}{I_p \cdot G} \cdot b = 0$$

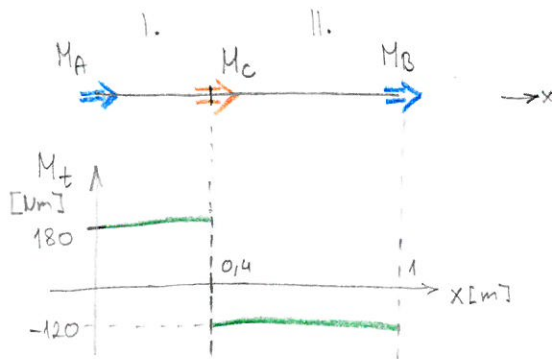
fajl. elcsav. [rad/m] ← ψ_{AC} ψ_{CB}

$$(M_B + M_c) \cdot a + M_B \cdot b = 0 \quad (2)$$

1.20.



SZTA:



$$(2): M_B = -M_C \cdot \frac{a}{a+b} = -1,2 \cdot 10^5 \text{ [Nm]}$$

$$(1): M_A = -M_C - M_B = -1,8 \cdot 10^5 \text{ [Nm]}$$

A tengely méretezése:

- A maximális igénybevitel: $M_{max} = 180 \text{ [Nm]}$ (előjel most nem kell, a fesz irányja most nem számít)
- Hataresetben (tönkremenetel előtti):

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16 M_{max}}{d^3 \pi} = \tau_{meg}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{max}}{\pi \cdot \tau_{meg}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 180 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100}} = 20,92 \text{ [mm]} \approx 21 \text{ [mm]}$$

A C km. szögelfordulása:

$$\psi_C = \psi_A + \psi_{AC} = \frac{M_{t,AC}}{I_p \cdot G} \cdot a = \frac{M_B + M_C}{I_p \cdot G} \cdot a = +0,1463 \text{ [rad]} = 2,38 \text{ [°]}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = 26,12 \text{ [GPa]}$$

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32} = 18,84 \text{ [mm}^4\text{]}$$

megj.: legyen **cső**, úgy hogy $d = \frac{8D}{10}$ (± = $\frac{D}{10}$) ^{falvastagság}

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} = \frac{369}{625} \cdot \frac{D^4 \pi}{32}$$

$$\tau_{meg} = \frac{16 M_{max}}{D^3 \pi} \cdot \frac{625}{369} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{625}{369}} \cdot \sqrt[3]{\frac{16 M_{max}}{\pi \cdot \tau_{meg}}} = 24,94 \text{ [mm]} \approx 25 \text{ [mm]}$$

Ekkor a belső átmérő: $d = 20 \text{ [mm]}$

A tömegek aránya:

$$\frac{m_{cső}}{m_{tömör}} = \frac{A_{cső}}{A_{tömör}} = \frac{25^2 - 20^2}{20^2} = 0,5625 = 56,25\%$$

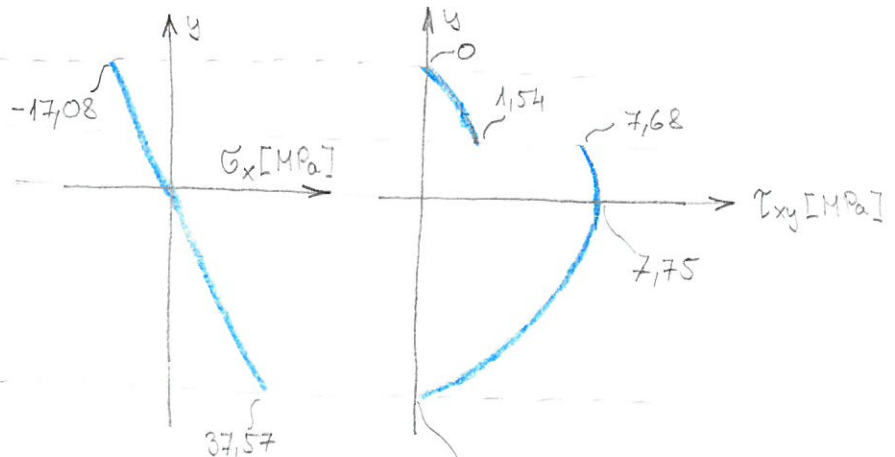
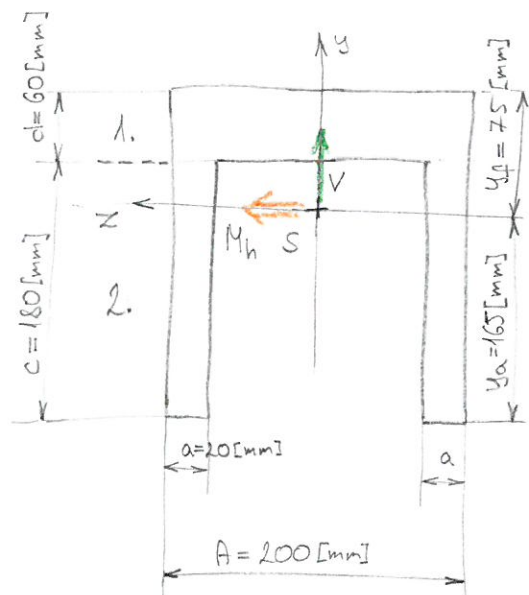
Majdnem fele akkora lesz a tengely tömege!

1.23.

$$M_h = 20 \text{ k [Nm]} \Rightarrow M_h = 20 \text{ [kNm]}$$

$$V = 50 \text{ j [kN]} \Rightarrow V = 50 \text{ [kN]}$$

$$I_z = 8784 \text{ [cm}^4\text{]}$$



0, ha a fene felel eszik, a szélén akkor is 0!

megj.: Szépen látszik, hogy most például:

- ahol τ maximális, ott $\sigma = 0$
 - ahol σ maximális, ott $\tau = 0$
- mindig igaz!
- ↳ elhanyagolható sokszor

A hajlításból származó feszültség:

$$\sigma(y) = - \underbrace{\frac{M_h}{I_z}}_{\text{konst.}} \cdot y$$

Értéke a jellegzetes helyeken:

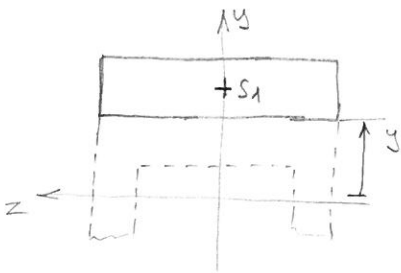
$$\sigma(y_f) = -17,08 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma(0) = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma(-y_a) = 37,57 \text{ [MPa]}$$

A nyírásból származó feszültség:

1, $y_f - d < y < y_f$, azaz: $15 < y < 75$ [mm]



A húsvastagság:

$$a_1(y) = A = 200 \text{ [mm]}$$

A statikai nyomaték:

$$S_1(y) = \frac{y_f + y}{2} \cdot [(y_f - y) \cdot A] = \frac{A}{2} (y_f^2 - y^2)$$

A feszültség eloszlása:

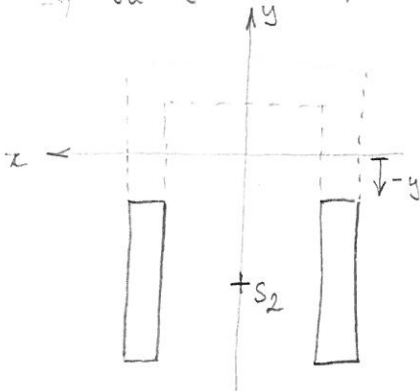
$$\tau_1(y) = \frac{V \cdot S_1(y)}{I_z \cdot a_1(y)} = \frac{V}{2I_z} \cdot (y_f^2 - y^2) = (\dots) - (\dots)y^2$$

Értékek a jellegzetes helyeken:

$$\tau_1(y_f) = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_1(y_f - d) = 1,54 \text{ [MPa]}$$

2, $-y_a < y < -y_a + c$, azaz: $-165 < y < 15$ [mm]



A húsvastagság:

$$a_2(y) = 2 \cdot a$$

A statikai nyomaték:

$$S_2(y) = - \frac{y_a - y}{2} \cdot [(y_a + y) \cdot 2a] = \frac{-2a}{2} \cdot (y_a^2 - y^2)$$

de most az előjel nem számít

A feszültség eloszlása:

$$\tau_2(y) = \frac{V \cdot S_2(y)}{I_z \cdot a_2(y)} = \frac{V}{2I_z} \cdot (y_a^2 - y^2)$$

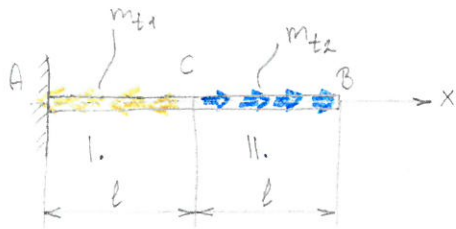
Értékek a jellegzetes helyeken:

$$\tau_2(y_f - d) = 7,68 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_2(0) = \tau_{\max} = 7,75 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_2(-y_a) = 0 \text{ [MPa]}$$

1.21.



Megoszló csavaró erőrendszer:

$$m_{t1} = 500 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{m}} \right] \text{ és } m_{t2} = 1000 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{m}} \right]$$

A többi adatai:

$$\tau_{\text{meg}} = 150 \text{ [MPa]}$$

$$l = 0,5 \text{ [m]}$$

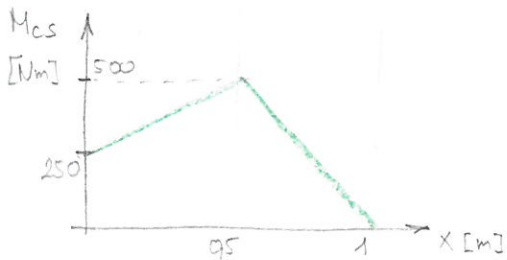
$$G = 70 \text{ [GPa]}$$

- Méretercső a tartó: - tömör ϕD km.-ből,
- $\phi d / \phi D$ csöből!

$$\frac{d}{D} = 0,6$$

- Adjuk meg a $\psi(x)$ függvényt!
(tömör km. esetére)

SZTA'



Az igénybevételek:

$$\text{II. } l < x < 2l: M_{cs}(x) = m_{t2}(2l - x) = m_{t2} \cdot 2l - m_{t2} \cdot x$$

$$\text{I. } 0 < x < l: M_{cs}(x) = m_{t2} \cdot l - m_{t1}(l - x) = (m_{t2} - m_{t1}) \cdot l + m_{t1} \cdot x$$

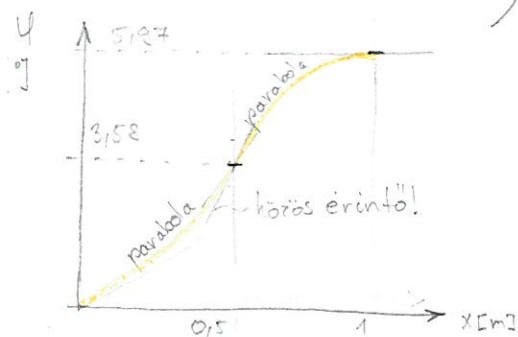
Értékei a jellegzetes helyeken:

$$M_{cs}(0) = M_A = (m_{t2} - m_{t1}) \cdot l \rightarrow \text{ez a reakció} = 250 \text{ [Nm]}$$

$$M_{cs}(l) = m_{t2} \cdot l = 500 \text{ [Nm]}$$

$$M_{cs}(2l) = 0 \text{ [Nm]}$$

Az $x=l$ helyen a legnagyobb az értéke: $M_{cs, \text{max}} = M_{cs}(l) = 500 \text{ [Nm]}$



Méretezés: ökör km.-re:

$$\tau(r) = \frac{M_{cs, \text{max}}}{\frac{l_0}{\frac{D^4 \pi}{32}}} \cdot r$$

A szélső pontokban: $r = D/2$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{32 M_{cs, \text{max}}}{D^4 \pi} \cdot \frac{D}{2} = \tau_{\text{meg}}$$

A teherbíró határan

Ebből:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_{cs, \text{max}}}{\pi \cdot \tau_{\text{meg}}}} = 25,7 \text{ [mm]} \approx 26 \text{ [mm]}$$

• cső esetén:

$$l_0 = \frac{D^4 \pi}{32} - \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{D^4 (1 - 0,6^4) \pi}{32}$$

$$d = 0,6D$$

Hasontlóan, mint előbb:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 M_{cs, \text{max}}}{(1 - 0,6^4) \pi \cdot \tau_{\text{meg}}}} = 26,9 \text{ [mm]} \approx 27 \text{ [mm]}$$

megj.: Mennyi anyagot spórolhatunk? ^{tömeget}

$$\frac{A_{\text{cső}}}{A_{\text{tömör}}} = \frac{D^2 (1 - 0,6^2)}{D^2} =$$

$$= 1 - 0,36 = 0,64 = 64\%$$

Adott x km. mekkora szöggel fordul el? $\Rightarrow \psi(x)$

Fajlagos szögelfordulás: $\varphi = \frac{\Delta \psi}{\Delta x} \rightarrow \frac{d\psi}{dx}$
ha $\Delta x \rightarrow 0$

Integrálással meghatározható az elcsavarodás fv.-e:

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi(\xi) d\xi$$

x_0 -ban ismerni kell az elcsavarodást!

I. $0 < x < l$:

$$\psi(x) = \frac{M_{cs}(x)}{I_p \cdot G} = \frac{1}{I_p \cdot G} \left[\overbrace{(m_{t2} - m_{t1}) \cdot l + m_{t1} \cdot x}^{M_A} \right] = \frac{1}{I_p \cdot G} [M_A + m_{t1} \cdot x]$$

$$\psi(x) = \underbrace{\psi(0)}_0 + \int_0^x \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{I_p \cdot G} \cdot \int_0^x (M_A + m_{t1} \cdot \xi) d\xi = \frac{1}{I_p \cdot G} \left[M_A \xi + \frac{m_{t1}}{2} \xi^2 \right]_{\xi=0}^{\xi=x} =$$

O_1 hiszen ez be van fogva

$$= \frac{1}{I_p \cdot G} \left(M_A x + \frac{m_{t1}}{2} x^2 \right)$$

\Rightarrow A jellegzetes helyeken:

A: $\psi(0) = 0$ [rad]

C: $\psi(l) = 0,0625$ [rad] = $3,58^\circ$

II. $l < x < 2l$

$$\psi(x) = \frac{1}{I_p \cdot G} \cdot (m_{t2} \cdot 2l - m_{t2} \cdot x)$$

$$\psi(x) = \psi(l) + \int_l^x \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{I_p \cdot G} \left(M_A \cdot l + \frac{m_{t1}}{2} l^2 \right) + \frac{1}{I_p \cdot G} \cdot \int_l^x (m_{t2} \cdot 2l - m_{t2} \cdot \xi) d\xi$$

$$m_{t2} \cdot \left[2l\xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_{\xi=l}^{\xi=x}$$

$$2lx - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} l^2$$

$$= \frac{1}{I_p \cdot G} \left(\overbrace{M_A \cdot l + \frac{m_{t1}}{2} l^2}^{(m_{t2} - m_{t1}) \cdot l} - \frac{3m_{t2}}{2} l^2 + 2m_{t2} l x - m_{t2} \frac{x^2}{2} \right) =$$

$$\left(\frac{-m_{t2}}{2} - \frac{m_{t1}}{2} \right) l^2 = -\frac{m_{t1} + m_{t2}}{2} l^2$$

$$= \frac{1}{I_p \cdot G} \left(-m_{t2} \frac{x^2}{2} + 2m_{t2} l \cdot x - \frac{m_{t1} + m_{t2}}{2} l^2 \right)$$

A jellegzetes helyeken:

C: ua. mint előbb (nem török el a rúd, ψ nem ugorhat sehó sem...)

B: $\psi(2l) = \frac{l^2}{I_p \cdot G} \cdot \left(-2m_{t2} + 4m_{t2} - \frac{m_{t1} + m_{t2}}{2} \right)$

$$= \frac{l^2}{I_p \cdot G} \left(\frac{3m_{t2}}{2} - \frac{m_{t1}}{2} \right) =$$

$$= \frac{0,5^2}{\frac{25174 \pi}{32} \cdot 10^{-12} \cdot 70 \cdot 10^9} \cdot \left(\frac{3 \cdot 1000}{2} - \frac{500}{2} \right) = 0,104$$

[rad] = $5,97^\circ$