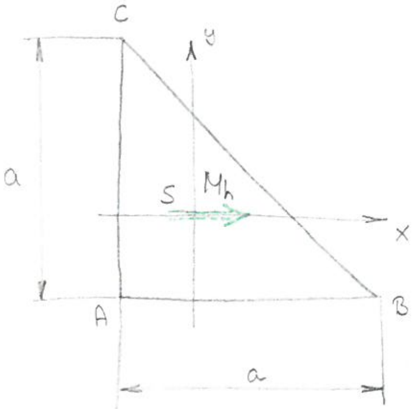
Szilárdságtan – 3. gyakorlat

Ferde hajlítás: A km. főtengelyeivel nem párhuzamos a hajlítás tengelye

$\underline{M}_h \not\parallel \underline{e}_1$ és $\underline{M}_h \not\parallel \underline{e}_2$

1.15.



Adatok: $M_h = 3\,[kNm]$
$a = 9\,[cm]$
$\sigma_{meg} = 150\,[MPa]$

a, Hajl. => normálfesz. eloszlása?

b, Mekkora a biztonsági tényező?

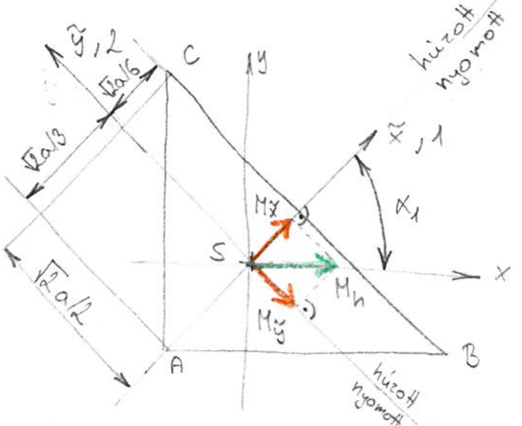
c, Mekkora a zérustengely (semleges teng.) x tengellyel bezárt szöge?

a, Statikából tudjuk:

$$I_x = \frac{a \cdot a^3}{36} = \frac{a^4}{36}, \quad I_y = \frac{a^4}{36}, \quad I_{xy} = -\frac{a^4}{72}$$

megj.:
- $\tilde{x}$ szimmetria tengely
- $\tilde{x} \Leftrightarrow 1$

A főtengelyek: $\tilde{x}, \tilde{y} \Leftrightarrow 1, 2$



$$I_1 = I_{\tilde{x}} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{(I_x - I_y)^2}_{0} + 4I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{a^4}{36}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{a^4}{24}$$

$$I_2 = I_{\tilde{y}} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{a^4}{36}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^4}{72}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1/36 - 1/24}{-1/72}\right) = +45°$$

M_h főtengelyekkel párhuzamos komponensei:

$$M_{\tilde{x}} = M_{\tilde{y}} = \frac{M_h}{\sqrt{2}}$$

A szuperpozíció elve alapján (előjelekre figyelni!):

$$\sigma_z(\tilde{x}, \tilde{y}) = +\frac{M_{\tilde{x}}}{\underset{>0}{I_{\tilde{x}}}} \cdot \tilde{y} + \frac{M_{\tilde{y}}}{\underset{>0}{I_{\tilde{y}}}} \cdot \tilde{x} = \sigma_z^{(\tilde{x})}(\tilde{y}) + \sigma_z^{(\tilde{y})}(\tilde{x})$$

⊕, mert ha $\tilde{y} > 0$, akkor ⊕-nak kellene lennie (húzott)

⊕, mert ha $\tilde{x} > 0$, akkor ⊕-nak kell lennie $\sigma_z^{(\tilde{y})}(\tilde{x})$-nek (húzott)

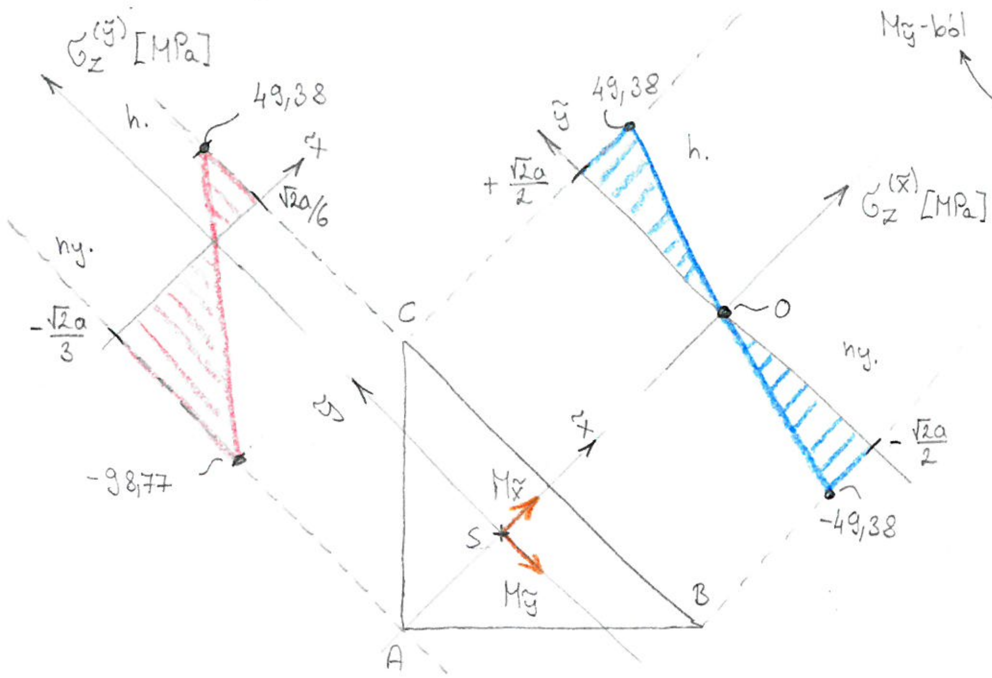
fesz. az $\tilde{x}$ teng. mentén

fesz. az $\tilde{y}$ teng. mentén

megj.: Ha M_h más irányba áll, akkor az előjelek is lehetnek mások!

A feszültségeloszlások:

A feszültségeloszlások:



$M_{\tilde{y}}$-ból

$M_{\tilde{x}}$-ből adódó

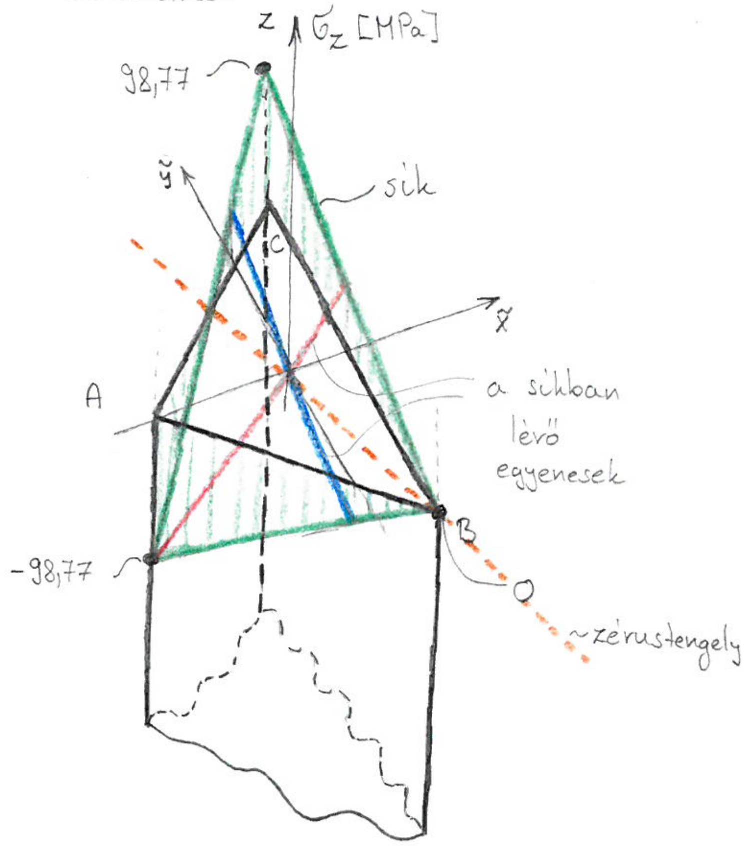
$$\sigma_z^{(\tilde{x})}(\tilde{y}) = \frac{M_{\tilde{x}}}{I_{\tilde{x}}} \cdot \tilde{y} = \overbrace{\frac{24\,Mh}{\sqrt{2}\,a^4}}^{\text{konst}} \cdot \tilde{y}$$

$$\sigma_z^{(\tilde{y})}(\tilde{x}) = \frac{M_{\tilde{y}}}{I_{\tilde{y}}} \cdot \tilde{x} = \underbrace{\frac{72\,Mh}{\sqrt{2}\,a^4}}_{\text{konst.}} \cdot \tilde{x}$$

Behelyettesítéshez:

	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$
A	$-\sqrt{2}a/3$	0
B	$\sqrt{2}a/6$	$-\sqrt{2}a/2$
C		$+\sqrt{2}a/2$

Térben ábrázolva:



A három pontban ébredő fesz.:

$$\sigma_A = 0 - 98{,}77 = -98{,}77 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_B = -49{,}38 + 49{,}38 = 0 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_C = 49{,}38 + 49{,}38 = 98{,}77 \text{ [MPa]}$$

b, A biztonsági tényező:

$$n = \frac{\sigma_{meg}}{|\sigma_{max}|} = \frac{150}{98{,}77} = 1{,}52 \text{ [-]}$$

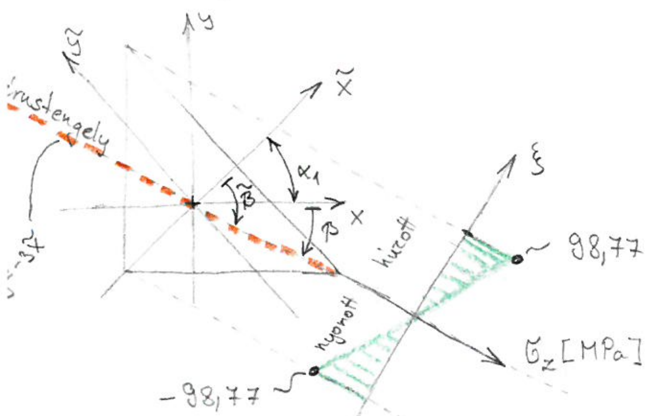
c, Korábbról:

$$\sigma_z(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{24\,Mh}{\sqrt{2}\,a^4}\tilde{y} + \frac{72\,Mh}{\sqrt{2}\,a^4}\tilde{x}$$

A zérustengelyen: $\sigma_z = 0$

$$\sigma_z(\tilde{x},\tilde{y}) = \underbrace{\frac{24\,Mh}{\sqrt{2}\,a^4}}_{\neq 0}\underbrace{\left(\tilde{y} + 3\tilde{x}\right)}_{=0} = 0$$

A zérustengely ábrázolása:



A zérustengely egyenlete: $\tilde{y} + 3\tilde{x} = 0$

$$\tilde{y} = -3\tilde{x}$$

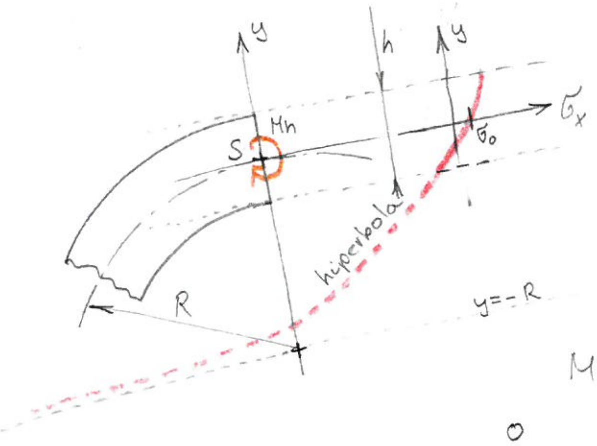
Az egyenes iránysszöge: ($\tilde{x}-\tilde{y}$) rsz.-ben

$$\tilde{\beta} = \arctan(-3) = -71{,}57°$$

Végül az (x–y) rsz.-ben:

$$\beta = \tilde{\beta} + \alpha_1 = -71{,}57° + 45° = -26{,}57°$$

Síkgörbe rudak hajlítása: Grashof-féle képlet

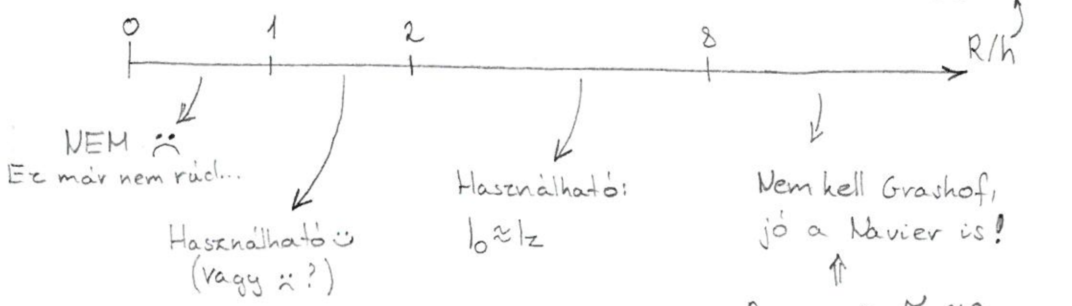


$$\sigma_x = \underbrace{\frac{M_h}{R\cdot A}}_{\sigma_0} + \frac{M_h}{I_0}\cdot y \cdot \frac{R}{R+y}$$ ⤳ $y \to -R$ esetén divergál! (de csak a km. felett van fizikai értelme!)

Redukált másodrendű nyomaték:

$$I_0 = \int_{(A)} \frac{R}{R+y}\, y^2\, dA = R^2 A \cdot \varkappa(\text{keresztmetszet}, R)$$

Mikor használható, és hogyan?



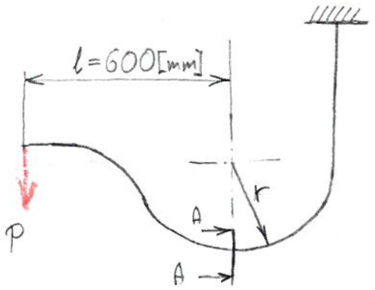
R nagy ⇒ $\sigma_0 \approx 0$

⇒ $\frac{R}{R+y} \approx 1$

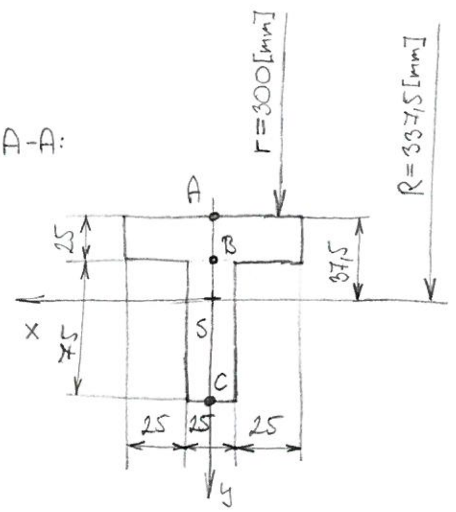
és

$I_0 \approx I_z$

1.16.



A-A:



Adatok:

$\sigma_{meg} = 200$ [MPa]

$I_x = 332$ [cm^4]

$A = 3750$ [mm^4]

Mekkora lehet a P terhelés?

Mit kell használni?

$$\frac{R}{h} = \frac{300+37{,}5}{100} = 3{,}375 \Rightarrow \text{Grashof, de } I_0 \approx I_z$$

Azaz:

$$\sigma(y) \cong \frac{M_h}{R\cdot A} + \frac{M_h}{I_x}\cdot y \cdot \frac{R}{R+y},$$ ahol: $M_h = -l\cdot P$ (kiegyenesíti a rudat: ⊖)

Azaz:

$$\sigma(y) = \frac{-lP}{R\cdot A} + \frac{-lP}{I_x}\cdot y\cdot\frac{R}{R+y} = f(y)\cdot P \Rightarrow \text{Kell: } |\sigma(y)| = |f(y)|\cdot P \le \sigma_{meg}$$

A maximális feszültség (absz. értékben) a szélső szálakban lehet!

$$\sigma(y_A) = \left(\frac{-l}{R\cdot A} + \frac{-l}{I_x} y_A \cdot \frac{R}{R+y_A}\right)\cdot P = 7{,}15\cdot 10^{-3}\cdot \overset{[N]}{P} \quad [\text{MPa}]$$

$y_A = -37{,}5$ [mm]

$$\sigma(y_C) = (\ldots)\cdot P = -10{,}00\cdot 10^{-3} P \quad [\text{MPa}]$$ ⤳ Ez a veszélyesebb

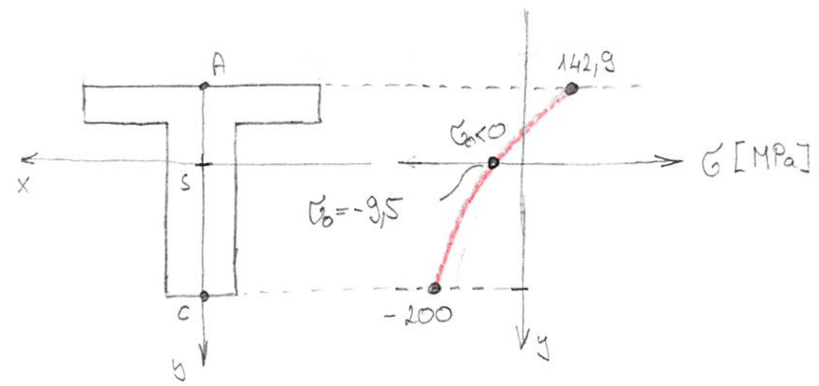
$y_C = 62{,}5$ [mm]

Végül innen a megengedhető legnagyobb terhelés:

$$\left|-10{,}00\cdot 10^{-3}\right| P = 200 \quad \Leftarrow \quad |\sigma(y_C)| = \sigma_{meg}$$

$$\hookrightarrow P = 19\,993 \ [N]$$

A feszültségeloszlás:

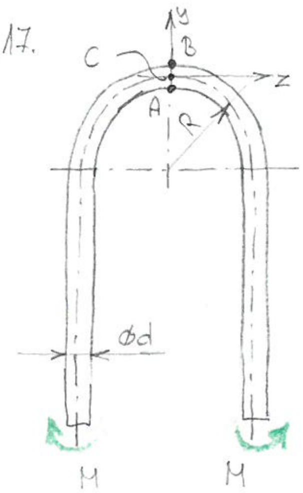


megj.: Ha hibásan a Navier-t használnánk:

$$\sigma(y_A) = \frac{M_h}{I_x}\cdot y_A = 135{,}5 \ [MPa]$$

$$\sigma(y_C) = \frac{M_h}{I_x}\cdot y_C = -225{,}8 \ [MPa]$$

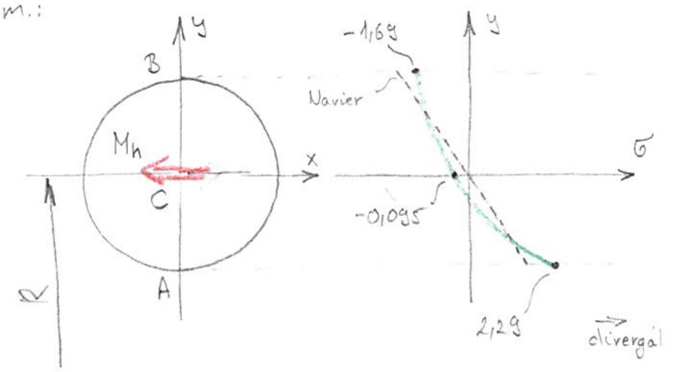
1.17.



Adatok: $M = 1{,}5$ [Nm]
$R = 5$ [cm]
$d = 2$ [cm]

Feszültségeloszlás az A - C - B vonalon?

A km.:



Az igénybevétel: $M_h = -M$ (kiegyenesít)

Mit használhatunk?

$$\frac{R}{d} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \text{Grashof, de } I_0 \approx I_x$$

A km. jellemzői:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 314{,}16 \ mm^2$$

$$I_x = \frac{d^4\pi}{64} = 7853{,}98 \ mm^4$$

A feszültségek:

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{R\cdot A} + \frac{M_h}{I_x}\cdot y \cdot \frac{R}{R+y}$$

- A: $y_A = -\frac{d}{2} = -10$ [mm]

$$\sigma(y_A) = \frac{-1{,}5\cdot 10^3 \ Nmm}{50mm\cdot 314{,}16mm^2} + \frac{-1{,}5\cdot 10^3 \ Nmm}{7854mm^4}\cdot(-10mm)\cdot\frac{50\,mm}{50mm-10mm} = 2{,}29 \ [MPa]$$

- B: $y_B = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma(y_B) = \ldots = -1{,}69$ [MPa]
- C: $y_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma(y_C) = \sigma_0 = \ldots = -0{,}095$ [MPa]

megj.: Ha hibásan a Navier-t használnánk:

$$\sigma(y_A) = \frac{M_h}{I_x}\cdot y_A = -1{,}91 \ [MPa]$$

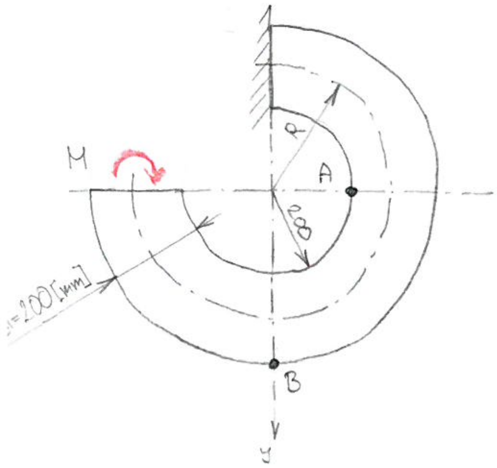
$$\sigma(y_B) = \frac{M_h}{I_x}\cdot y_B = 1{,}91 \ [MPa]$$

1.18.

Adatok: $M = 5$ [kNm]

$R = 200 + 100 = 300$ [mm]

Feszültségek? Hol van a semleges tengely?



Mit használunk?

$$\frac{R}{d} = \frac{300}{200} = 1{,}5 \Rightarrow$$ Grashof kell pontos I_0 alkalmazásával

A redukált másodrendű nyomaték:

$$I_0 = R^2 \cdot A \cdot \chi = \ldots \cong 83{,}23 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 3{,}142 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\chi \cong \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{2R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{d}{2R}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{d}{2R}\right)^6 + \frac{7}{128}\left(\frac{d}{2R}\right)^8 + \ldots \cong 0{,}029 \; [-]$$

táblázatból

A rúd igénybevétele: $M_h = M$ (tovább görbít)

minden km.-ben ennyi!

Az ébredő feszültségek:

$$\sigma(y) = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0} \cdot y \cdot \frac{R}{R+y}$$

$$\sigma_A = \sigma\left(-\frac{d}{2}\right) = \ldots = -8{,}48 \text{ [MPa]} \qquad \sigma_0 = \sigma(0) = 0{,}53 \text{ [MPa]}$$

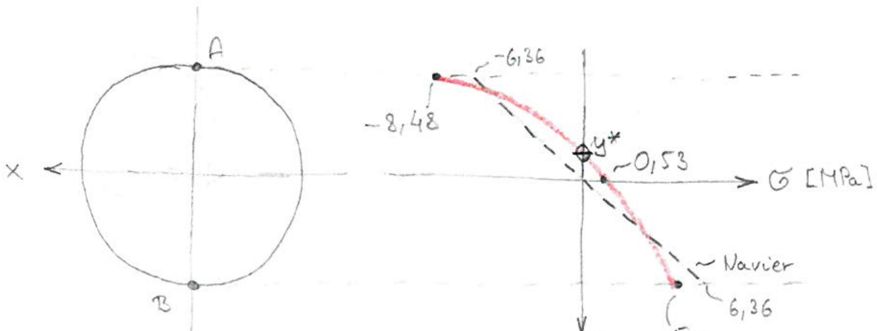
$$\sigma_B = \sigma\left(\frac{d}{2}\right) = 5{,}04 \text{ [MPa}$$

megj.: Ha helytelenül a Navier-t használnánk:

$$\sigma_B = \frac{M_h}{I_x} \cdot \frac{d}{2} = 6{,}36 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_A = \ldots = -6{,}36 \text{ [MPa]}$$

A feszültségek eloszlása:



A semleges tengely helye: $\sigma(y^*) = 0$

$$0 = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0} \cdot y^* \frac{R}{R+y^*} \Rightarrow -\frac{R}{RA} - \frac{y^*}{RA} = \frac{R}{I_0} \cdot y^* \Rightarrow -\frac{1}{A} = y^*\left(\frac{R}{I_0} + \frac{1}{RA}\right)$$

$$y^* = -\frac{1}{\left(\frac{R}{I_0} + \frac{1}{RA}\right)A} = -\frac{1}{\underbrace{\frac{RA}{I_0} + \frac{1}{R}}_{\frac{R^2A + I_0}{RI_0}}} = -\frac{RI_0}{R^2A + I_0} = -8{,}578 \text{ [mm]}$$