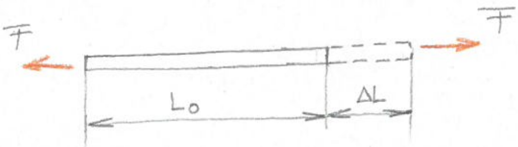
Szilárdságtan – 1. gyakorlat

Húzott rudak alakváltozási és feszültségi állapota

Normál feszültség: $\sigma = \frac{F}{A}$ → normál igbv.



Fajlagos alakváltozás: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

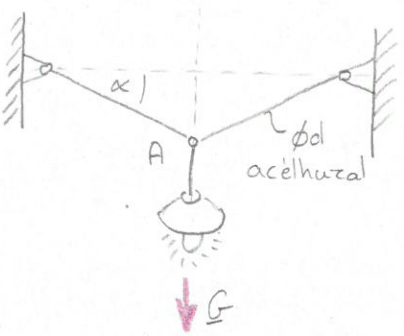
Egyszerű (1D) Hooke-törvény: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

acél: $E = 210$ [GPa]
$\nu = 0{,}3$ [-]

kereszt irányú $\varepsilon_D = -\nu \cdot \varepsilon$

Méretezés, ellenőrzés célja: $\sigma \leq \sigma_{meg} = \sigma_F / n$

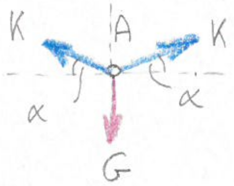
1.1.



$G = 700$ [N]
$d = 3$ [mm] $\quad \sigma_{meg} = 285$ [MPa]
α minimális értéke? $\alpha_{meg} = ?$

Mo.: Adott α mellett számoljuk ki az ébredő feszültséget, majd nézzük meg ennek értéke mikor megfelelő!

Egyensúlyhoz:



$\sum F_y = 0: \quad -G + 2K \cdot \sin\alpha = 0$

$$K = \frac{G}{2\sin\alpha}$$

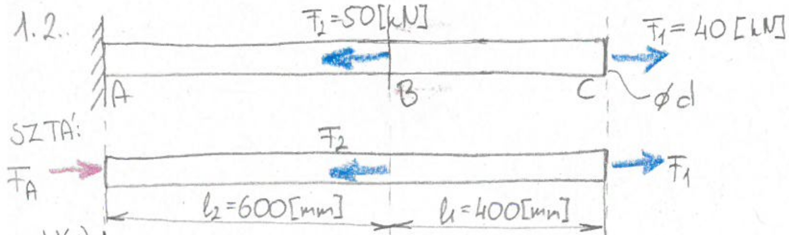
A huzalban ébredő feszültség:
$$\sigma = \frac{K}{A} = \frac{4G}{2d^2\pi\sin\alpha} = \frac{2G}{d^2\pi\sin\alpha}$$

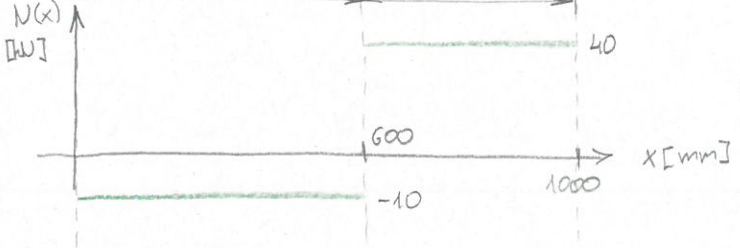
$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$

Hogy a szerkezet szilárdságilag megfelelő legyen:
$$\sigma \leq \sigma_{meg}$$

Határesetben: $\sigma_{meg} = \sigma = \frac{2G}{d^2\pi\sin\alpha} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{2G}{d^2\pi\,\sigma_{meg}}\right) = \dots = 10°$

1.2.





$d = 20$ [mm]
$E = 200$ [GPa] $= 200 \cdot 10^9$ [Pa] $= 2 \cdot 10^5$ [MPa]

a) $N(x) = ?$
b) $\Delta L_C = ?$
c) $\sigma_{AB} = ?$, $\sigma_{BC} = ?$

a) Az igénybevételek:
$$N_{AB} = F_1 - F_2 = -10 \text{ [kN]}$$
$$N_{BC} = F_1 = 40 \text{ [kN]}$$

c, A feszültségek: $\sigma_{AB} = \dfrac{N_{AB}}{A} \underset{\uparrow}{=} \ldots = -31{,}83\,[MPa]$ ← Figyeljünk a me.-re!

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 314{,}2\,[mm^2] \qquad \frac{N}{mm^2} = \frac{N}{(10^{-3}m)^2} = 10^6 \underbrace{\frac{N}{m^2}}_{Pa} = MPa$$

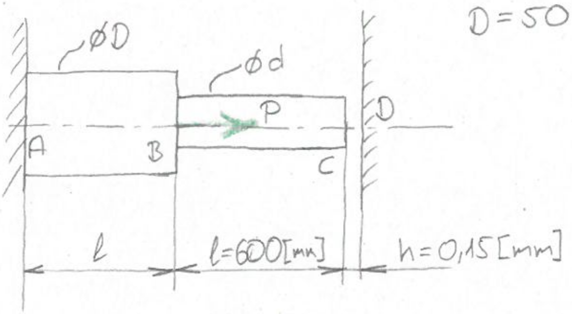
$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{40\cdot 10^3\ N}{314{,}2\ mm^2} = 127{,}32\,[MPa]$$

b, A C pont elmozdulása:

$$\Delta L_C = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \frac{N_{AB}\cdot l_2}{AE} + \frac{N_{BC}\cdot l_1}{AE} = \frac{-10\cdot 10^3\cdot 600}{314{,}2\cdot 2\cdot 10^5} + \frac{40\cdot 10^3\cdot 400}{314{,}2\cdot 2\cdot 10^5} = 0{,}159\,[mm]$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon \overset{\text{def.}}{=} \frac{\Delta L}{L_0} \\ &\underset{\text{Hooke}}{\sigma = E\cdot\varepsilon} \end{aligned}\right\} \sigma = E\cdot\frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \frac{\sigma\cdot L_0}{E} = \frac{N\cdot L_0}{\underbrace{AE}_{\text{húzómerevség}}}$$

1.3.



$D = 50\,[mm] \qquad d = 25\,[mm]$

$P = 300\,[kN] = 3\cdot 10^5\,[N]$

$E = 70\,[GPa] = 7\cdot 10^4\,[MPa]$

Milyenek a hosszváltozások, feszültségek? Reakciók?

Mo.: Tegyük fel, hogy a C keresztmetszet nem ütközik fel D-ben!

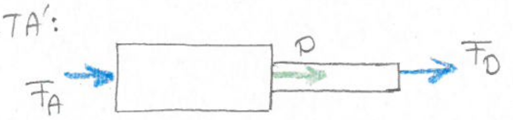
$$\Delta L_C = \Delta L_{AB} + \underbrace{\Delta L_{BC}}_{0,\ \text{mert ekkor } N_{BC}=0} = \frac{P\cdot l}{A_D E} = \frac{3\cdot 10^5\cdot 600}{1963{,}5\cdot 7\cdot 10^4} = 1{,}301\,[mm] > h \Rightarrow \text{Mégis felütközik!}$$

A km.: $A_D = \dfrac{D^2\pi}{4} = 1963{,}5\,[mm^2]$

Többet kell vakerászni így....

Mivel felütközik C a D ponton:

SZTA:



Egyensúly: $\sum F_x = 0: \quad F_A + P + F_D = 0 \qquad (1)$

?? Statikailag határozatlan!

Megoldás: Alakváltozási feltétel

$$\Delta L_C = h$$

Tehát:

$$\Delta L_C = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \frac{N_{AB}\cdot l}{A_D\cdot E} + \frac{N_{BC}\cdot l}{A_d\cdot E} \underset{\updownarrow}{=} \frac{l}{E}\left(\frac{P+F_D}{A_D} + \frac{F_D}{A_d}\right) = h \qquad (2)$$

$A_d = \dfrac{d^2\pi}{4} = 490{,}9\,[mm^2]$

$N_{BC} = F_D$

$N_{AB} = P + F_D$

(2): $\dfrac{P\ell}{EA_D} + F_D \cdot \dfrac{\ell}{E}\left(\dfrac{1}{A_D} + \dfrac{1}{A_d}\right) = h$

$$F_D = \frac{h - \frac{P\ell}{EA_D}}{\frac{\ell}{E}\left(\frac{1}{A_D} + \frac{1}{A_d}\right)} = \frac{0{,}15 - \frac{3\cdot 10^5 \cdot 600}{7\cdot 10^4 \cdot 1963{,}5}}{\frac{600}{7\cdot 10^4}\left(\frac{1}{1963{,}5} + \frac{1}{490{,}9}\right)} = \ldots = -53{,}13\,[kN]$$

(1):

$$F_A = -P - F_D = -300 + 53{,}13 = -246{,}87\ [kN]$$

A feszültségek: $\sigma_{AB} = \dfrac{N_{AB}}{A_D} = \dfrac{P + F_D}{A_D} = 125{,}73\ [MPa]$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_d} = \frac{F_D}{A_d} = -108{,}23\ [MPa]$$

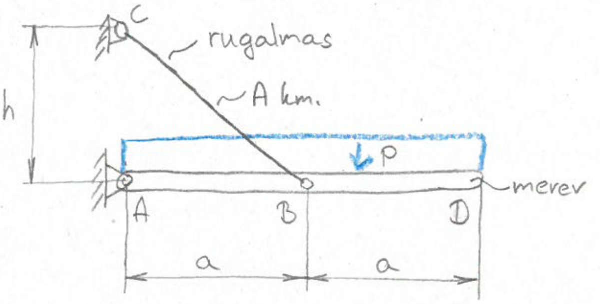
A hosszváltozások:

$$\Delta L_{AB} = \frac{N_{AB}\cdot \ell}{A_D\, E} = 1{,}078\ [mm]$$

Ell.: $\Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = h \Rightarrow$ Szupcsika

$$\Delta L_{BC} = \frac{N_{BC}\cdot \ell}{A_d \cdot E} = -0{,}928\ [mm]$$

1.4.



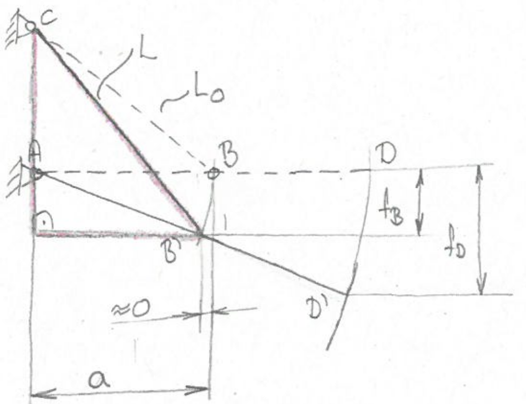
$A = 150\ [mm^2]$ $\quad a = 2\ [m]$ $\quad p = 300\,[\frac{N}{m}]$

$E = 100\,[GPa] = 10^5\,[MPa]$ $\quad h = 1{,}5\,[m]$

Mekkora D függőleges elmozdulása?

$f_D = ?$

Az alakváltozás szemléltetése:



B x irányú elmozdulását elhanyagolva: kicsi az elm.

$$L^2 = a^2 + (h + f_B)^2 \Rightarrow$$

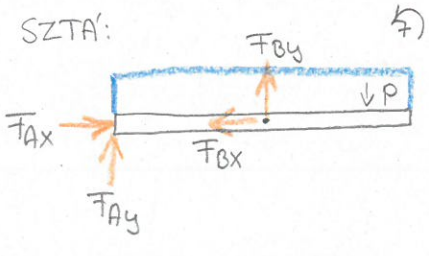
$$f_B = \sqrt{L^2 - a^2} - h = ^{*}$$

Hasonló háromszögek:

$$\frac{f_D}{f_B} = \frac{2a}{a} \Rightarrow f_D = 2 f_B = ^{**}$$

Kell L a rugalmas rúd terhelt hossza. ⇐ Kell N_{BC}

SZTA:



$\sum M_A = 0: \quad F_{By}\cdot a - (p \cdot 2a)\cdot a = 0$

$$F_{By} = 2pa = 600\ [N]$$

A rúd iránya ismert: $\dfrac{F_{Bx}}{F_{By}} = \dfrac{a}{h}$

Így: $F_{Bx} = F_{By} \cdot \frac{a}{h} = 1600\,[N]$

A rúdban ébredő erő:

$$N_{BC} = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = 2000\,[N]$$

A rúd hosszváltozása, megnyúlt hossza:

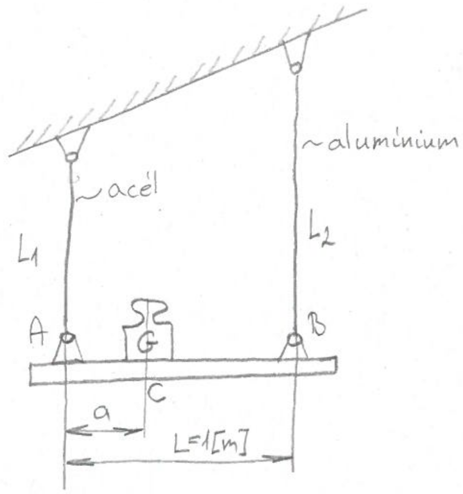
$$L = L_0 + \Delta L = L_0 + \frac{N_{BC} \cdot L_0}{AE} = L_0 \cdot \left(1 + \frac{N_{BC}}{AE}\right) = \sqrt{a^2+h^2} \cdot \left(1 + \frac{N_{BC}}{AE}\right) = 2500{,}333\,[mm]$$

Végül f_B és f_D:

* $f_B = 0{,}55\,[mm]$

** $f_D = 1{,}1\,[mm]$

1.7.



$G = 5000\,[N]$ $\quad E_1 = 200\,[GPa]$ $\quad E_2 = 70\,[GPa]$

$A_1 = 120\,[mm^2]$ $\quad A_2 = 240\,[mm^2]$

$L_1 = 15\,[m]$ $\quad L_2 = 25\,[m]$

Hol legyen G, hogy a rúd vízszintes maradjon? Feszültségek?

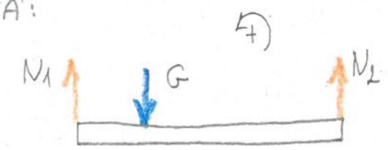
Vízszintes marad a rúd, ha:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\frac{N_1 \cdot L_1}{A_1 E_1} = \frac{N_2 \cdot L_2}{A_2 \cdot E_2} \quad (1)$$

De mekkora N_1, N_2?

SZTA:



$\Sigma M_A = 0: \quad -G \cdot a + N_2 \cdot L = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{G \cdot a}{L}$

$\Sigma M_B = 0: \quad \ldots \Rightarrow N_1 = \frac{G \cdot (L-a)}{L}$

$\Sigma M_C = 0: \quad -N_1 \cdot a + N_2 \cdot (L-a) = 0 \quad (2)$

(1): $\frac{N_1}{N_2} = \underbrace{\frac{L_2 A_1 E_1}{L_1 A_2 E_2}}_{c}$ és (2): $\frac{N_1}{N_2} = \frac{L-a}{a} = c$

$\Downarrow$

$L - a = ca$

$L = a(1+c) \Rightarrow a = \frac{L}{1+c} = \frac{L}{1 + \frac{L_2 A_1 E_1}{L_1 A_2 E_2}} =$

$= 0{,}2958\,[m]$

$= 295{,}8\,[mm]$

A feszültségek:

$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \ldots = 29{,}34\,[MPa]$

$N_1 = \frac{G \cdot (L-a)}{L} = 3521\,[N]$

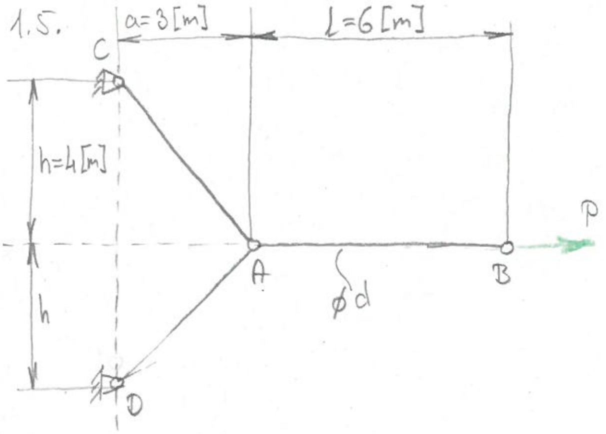
$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \ldots = 6{,}16\,[MPa]$

$N_2 = G - N_1 = 1479\,[N]$

A függőleges elm.:

$\Delta L_1 = \Delta L_2 = \ldots = 2{,}2\,[mm]$

1.5.

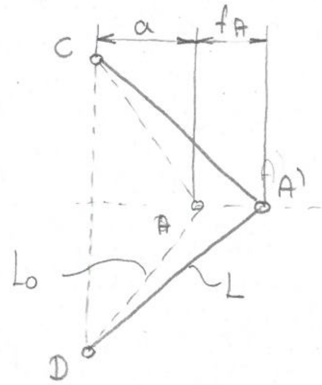


$d = 30$ [mm]

$E = 200$ [GPa]

Mekkora legyen P, hogy $f_B = 5$ [mm] legyen?

Az alakváltozás szemléltetése:



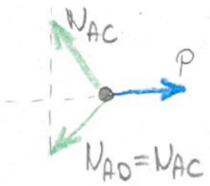
$$L^2 = h^2 + (a+f_A)^2 \Rightarrow \quad f_A = \sqrt{L^2 - h^2} - a$$

Majd:

$$f_B = f_A + \Delta L_{AB}$$

Kell: $L \Leftarrow$ kell $N_{AD} = N_{AC}$

A egyensúlya:



Hasonlóság: $\frac{h}{a} = \frac{N_{ACy}}{N_{ACx}}$

$$\sum F_x = 0: \quad -2N_{ACx} + P = 0$$

$$N_{ACx} = \frac{P}{2} \qquad N_{ACy} = \frac{P}{2} \cdot \frac{h}{a}$$

Végül:

$$N_{AC} = \sqrt{N_{ACx} + N_{ACy}} = \frac{P}{2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}$$

Ezzel az AC rúd megnyúlt hossza:

$$L = L_0 + \Delta L = L_0 \cdot (1+\varepsilon) = L_0 \cdot \left(1 + \frac{N_{AC}}{AE}\right) = \underbrace{L_0}_{\sqrt{a^2+h^2}}\left(1 + \frac{P}{2AE}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)$$

Ezzel:

$$f_B = \sqrt{(a^2+h^2)\left(1 + \frac{P}{AE}\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}} + \frac{P^2}{4AE}\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)\right) - h^2} - a + \frac{Pl}{AE} \quad \Rightarrow \quad P\text{-re másodfokú egyenlet}$$

$P = 54{,}62$ [kN]