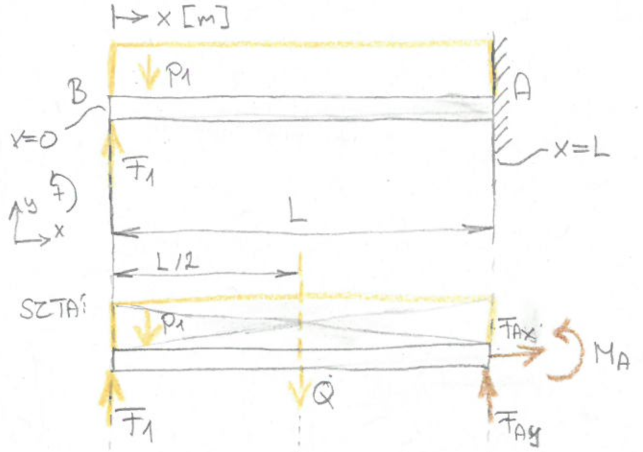
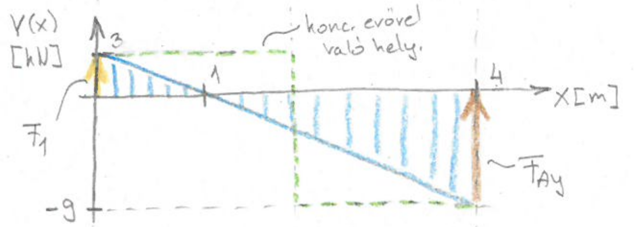
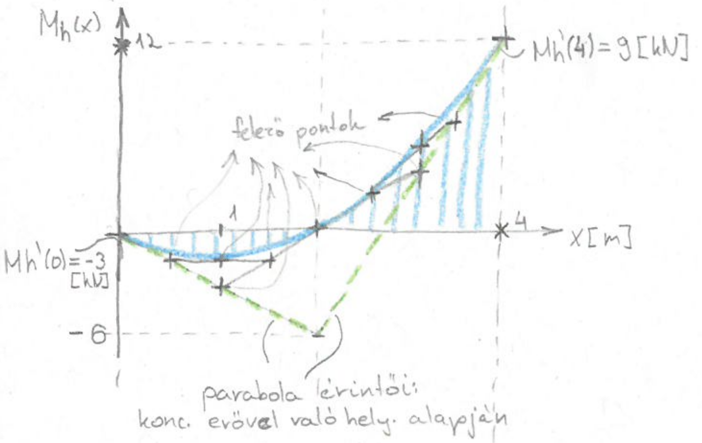
9.1., Írjuk fel az igénybevételi fv.-eket és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!







$L = 4$ [m]
$p_1 = 3$ [kN/m]
$F_1 = 3$ [kN]

Reakciók: (csak akkor kell kiszámítani, ha jobbról írjuk fel az igbv. fv.-eket!)

$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} = 0$ [kN]

$\sum F_y = 0: \quad F_1 - \underbrace{p_1 \cdot L}_{Q = 12 [kN]} + F_{Ay} = 0$

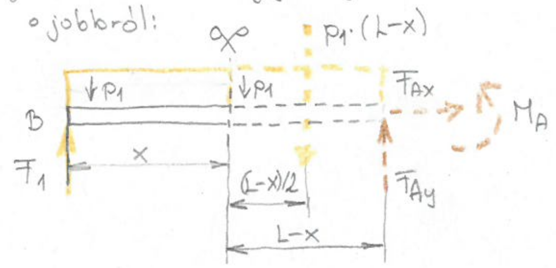
$F_{Ay} = p_1 \cdot L - F_1 = 9$ [kN]

$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot L + (p_1 \cdot L) \cdot \frac{L}{2} + M_A = 0$

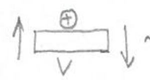
$M_A = F_1 \cdot L - \frac{p_1 L^2}{2} = -12$ [kNm] → előjel!

Igénybevételi függvények:

○ jobbról:



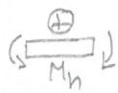
$V(x) = -F_{Ay} + p_1 \cdot (L-x) = -9 + 3(4-x) = 3 - 3x$ [kN]



~ megmaradó rész

$M_h(x) = -F_{Ay} \cdot (L-x) + p_1 \cdot (L-x) \cdot \frac{L-x}{2} - M_A$

$= -F_{Ay} \cdot (L-x) + p_1 \cdot \frac{(L-x)^2}{2} - M_A$

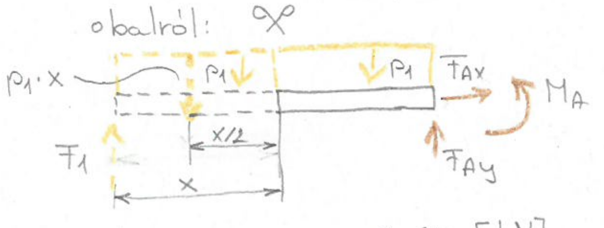


$= -9(4-x) + 3\,\frac{(4-x)^2}{2} - (-12)$

$= 0 - 3x + 1{,}5x^2$ [kNm]

Ellenőrzés: $\frac{dMh(x)}{dx} = -3 + 3x = -V(x)$ → jó!

○ balról:



$V(x) = F_1 - p_1 \cdot x = 3 - 3x$ [kN]

$M_h(x) = -F_1 \cdot x + p_1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -F_1 \cdot x + \frac{p_1 x^2}{2}$

$= -3x + 1{,}5x^2$ [kNm]

} ua. mint előbb

○ $M_h(x)$ ábrázolása:

• Mint egy fv.-t:

x [m]	0	1	2	3	4
Mh(x) [kNm]	0	-1,5	0	4,5	12

} de ehhez sok pont kell, hogy szép legyen

VAGY

• V(x) értéke és Mh(x) értéke, érintője nem változik a tartó két pontjában, ha a két pont között a megoszló terhelést egy koncentrált erővel helyettesítjük.

1, Koncentrált erővel való helyettesítéssel:

Mh(x) lineáris szakaszokból fog állni

$M_h(0) = 0$ [kNm]; $M_h(4) = 12$ [kNm]

$M_h(2) = -F_1 \cdot 2 = -6$ [kNm]

→ Az érintők ismertek

2, Eredeti terhelés esetén:

- parabola szerkesztése 1, alapján (felezőpontos módszer)
- $V(x) = 0$ esetén $M_h(x)$ érintője vízszintes, mert $M_h'(x) = -V(x)$

VAGY

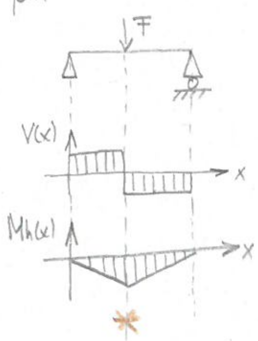
• $M_h'(x) = -V(x)$ alapján érintők berajzolása

Megjegyzések:

1., Egy adott szakaszon a tartón:

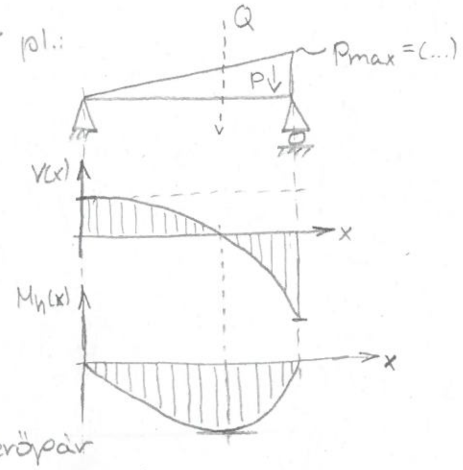
p(x)	0	konst.	lin.
V(x)	konst.	lin.	másodf.
Mh(x)	lin.	másodf.	harmadf.

pl.:



pl.: 9.1.

pl.:



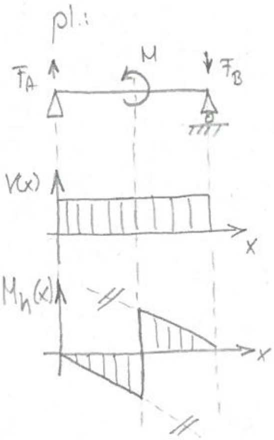
2., Ha a rúd <u>végén</u> nincsen koncentrált erőpár (mint terhelés, vagy reakció), akkor ott Mh zérus lesz.

3., Egy adott x helyen a terhelés (akár reakció):

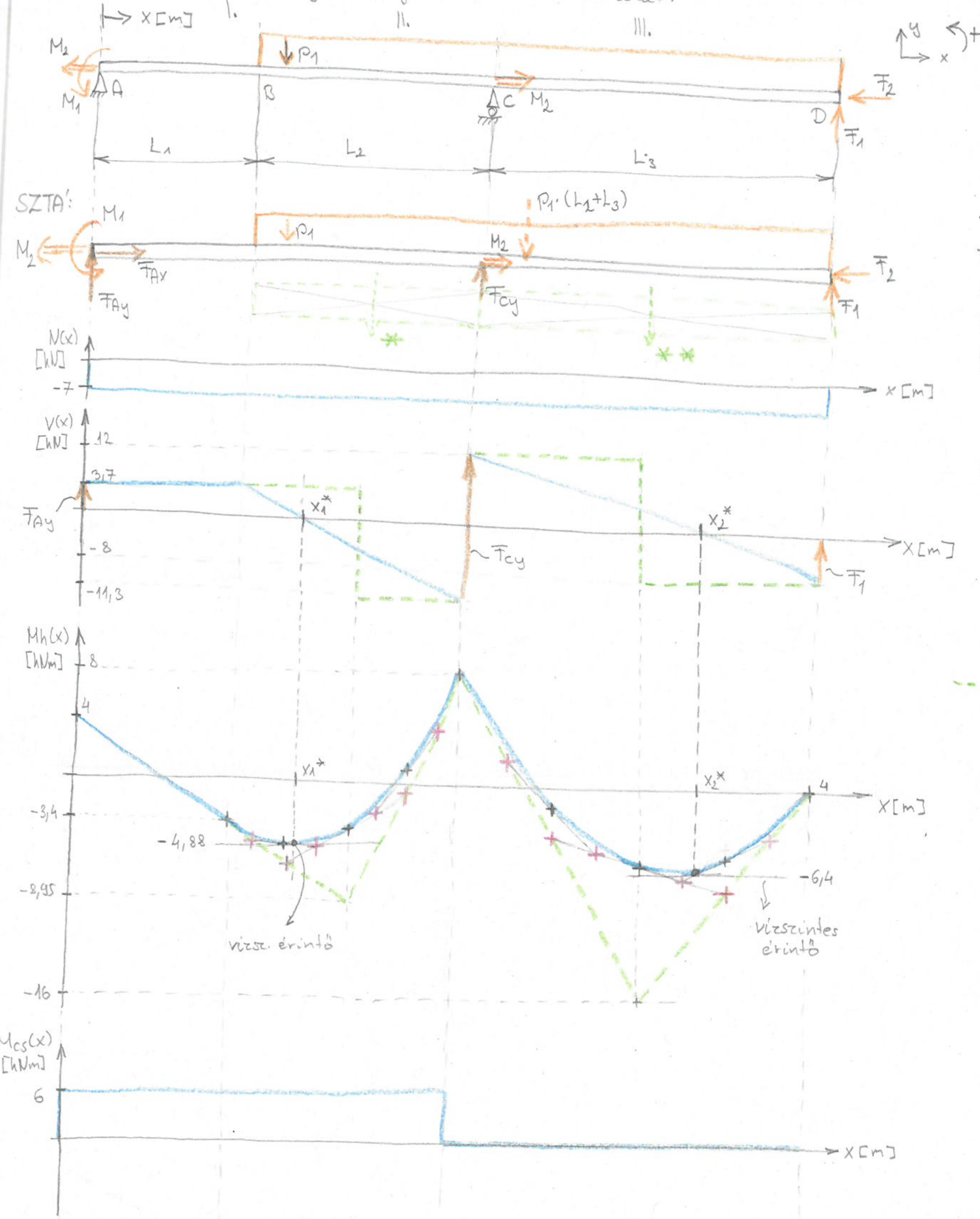
terhelés	F	M	F és M
V(x)	ugrása van	–	ugrása van
Mh(x)	az érintő megváltozik (megtörik a görbe)	ugrása van, de a két oldali érintők párh.	ugrása van, és a két oldali érintők sem párhuzamosak

pl: *

pl.:



9.2. Határozzuk meg az igbv. fv.-eket és ábrákat!



Adatok:

$L_1 = 2$ [m]

$L_2 = 3$ [m]

$L_3 = 4$ [m]

$F_1 = 8$ [kN]

$F_2 = 7$ [kN]

$M_1 = 4$ [kNm]

$M_2 = 6$ [kNm]

$p_1 = 5$ [kN/m]

Ábrázolás:

- N(x):
- V(x):
  - fv. értékek
  - szakaszok rajzolása
- Mh(x):
  - fv. értékek
  - lin. szakaszok rajzolása
  - $V^*(x)$ rajzolása
  - $Mh^*(x)$ értékeinek számolása
  - $Mh^*(x)$ rajzolása
  - $V(x^*) = 0$ egy. mo.-sa ⇓ Mh(x) szélsőért.
  - parabola szakaszok szerkesztése
- Mcs(x)

Reakció erők:

$\sum F_x = 0$: $\quad F_{Ax} - F_2 = 0 \implies F_{Ax} = F_2 = \underline{7\ [kN]}$

$\sum F_y = 0$: $\quad F_{Ay} + F_{cy} + F_1 - p_1 \cdot (L_2 + L_3) = 0$

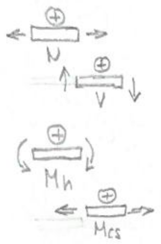
$\sum M_A = 0$: $\quad F_{cy} \cdot (L_1 + L_2) + F_1 \cdot (L_1 + L_2 + L_3) - p_1 \cdot (L_2 + L_3) \cdot \dfrac{L_1 + (L_1 + L_2 + L_3)}{2} + M_1 = 0$

$$F_{cy} = p_1 \cdot \frac{(L_2 + L_3)}{L_1 + L_2} \cdot \frac{2L_1 + L_2 + L_3}{2} - F_1 \cdot \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_1 + L_2} - \frac{M_1}{L_1 + L_2} = \underline{23{,}3\ [kN]}$$

$$F_{Ay} = p_1 (L_2 + L_3) - F_1 - F_{cy} = \underline{3{,}7\ [kN]}$$

Az igbv. fv.-ek.:

I. szakasz: $0 < x < L_1$



$N(x) = -F_{Ax} = -7\ [kN]$ $\qquad$ Ell.: $\dfrac{dMh(x)}{dx} = -F_{Ay} \to$ jó

$V(x) = F_{Ay} = 3{,}7\ [kN]$

$Mh(x) = -F_{Ay} \cdot x + M_1 = -3{,}7x + 4\ [kNm]$

$M_{cs}(x) = M_2 = 6\ [kNm]$

II. szakasz: $L_1 < x < L_1 + L_2$ $\qquad$ Ell.: $\dfrac{dMh(x)}{dx} = -F_{Ay} + p_1 (x - L_1)$ jó

$N(x) = -F_{Ax} = -7\ [kN]$

$V(x) = F_{Ay} - p_1 \cdot (x - L_1) = 13{,}7 - 5x\ [kN]$

$Mh(x) = -F_{Ay} \cdot x + M_1 + p_1 \cdot (x - L_1) \cdot \dfrac{x - L_1}{2} = -F_{Ay} x + M_1 + p_1 \cdot \dfrac{(x - L_1)^2}{2} = \ldots$

$M_{cs}(x) = M_2 = \ldots$

III. szakasz: $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$

$N(x) = -F_{Ax}$ $\qquad$ Ell.: $\dfrac{dMh(x)}{dx} = -F_{Ay} + p_1 \cdot (x - L) - F_{cy}$ jó

$V(x) = F_{Ay} - p_1 \cdot (x - L_1) + F_{cy}$

$Mh(x) = -F_{Ay} \cdot x + M_1 + p_1 \cdot \dfrac{(x - L_1)^2}{2} - F_{cy} \cdot (x - L_1 - L_2)$

$M_{cs}(x) = M_2 - M_2 = 0$

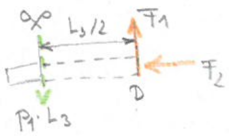
Ábrázoláshoz:

	I. szakasz:	II. szakasz:	III. szakasz:
$V(x)$	$V(0) = 3{,}7\ [kN]$	$V(L_1) = 3{,}7\ [kN]$	$V(L_1 + L_2) = 12\ [kN]$
	$V(L_1) = 3{,}7\ [kN]$	$V(L_1 + L_2) = -11{,}3\ [kN]$	$V(L_1 + L_2 + L_3) = -8\ [kN]$
$M_h(x)$	$M_h(0) = 4\ [kNm]$		
	$M_h(L_1) = -3{,}4\ [kNm]$	$Mh(L_1 + L_2) = 8\ [kNm]$	$Mh(L_1 + L_2 + L_3) = 0\ [kNm]$

• megoszló erőrsz. helyettesítése:

$M_h^*(L_1 + \frac{L_2}{2}) = -F_{Ay} \cdot (L_1 + \frac{L_2}{2}) + M_1 = -8{,}95\ [kNm]$ * helyettesítés

$Mh^*(L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}) = -F_1 \cdot \frac{L_3}{2} = -16\ [kNm]$ ** helyettesítés



• szélsőértékek a parabola szakaszon

$Mh'(x) = -V(x)$ alapján

Kellene: $Mh'(x) = 0 \iff V(x) = 0$

Így: II. szakasz: $\qquad$ III. szakasz:

$F_{Ay} - p_1 \cdot (x - L_1) = 0$ $\qquad$ $F_{Ay} - p_1 \cdot (x - L_1) + F_{cy} = 0$

$x_1^* = L_1 + \dfrac{F_{Ay}}{p_1} = 2{,}74\ [m]$ $\qquad$ $x_2^* = \dfrac{F_{Ay} + F_{cy}}{p_1} + L_1 = 7{,}4\ [m]$

$M_h(x_1^*) = \ldots = -4{,}88\ [kNm]$ $\qquad$ $M_h(x_2^*) = \ldots = -6{,}4\ [kNm]$