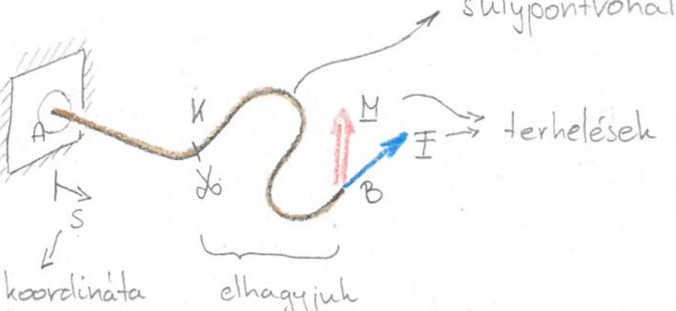
Statika – 8. gyakorlat

Igénybevételek

Kérdés: adott km.-ben mekkora belső erők és nyomatékok ébrednek?

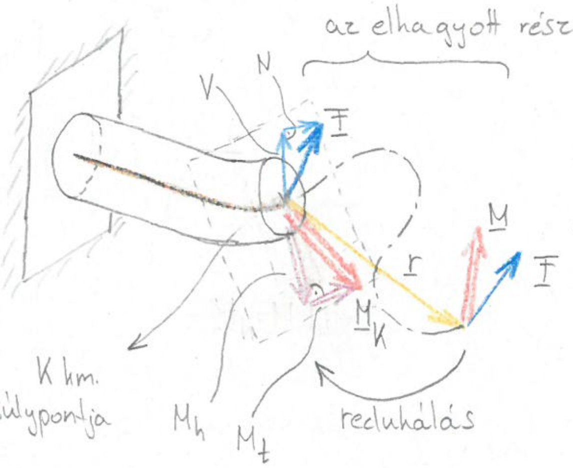
Térbeli rúd: a km. méretei << hosszméretek



$K = K(s)$ ⇓

lehetne több terhelés is: $\underline{F}_i, \underline{M}_j$

az elhagyott rész terheléseit redukáljuk a K km. súlypontjába.



$$\underline{M}_K = \underline{M} + \underline{r} \times \underline{F}$$

Az igénybevételek: $\underline{M}_K$ és $\underline{F}$ komponensei

	K km.-re merőleges	K km.-el párhuzamos
$\underline{M}_K$	$M_{cs} = M_t$	M_h
$\underline{F}$	N	V

az igbv.-ek skalárok!

Előjelkonvenciók: az igénybevétel skalár!

⊕ ↦ s

normál igbv.:

nyíró igbv.:

hajlító igbv.:

csavaró igbv.:

⇒ ⊕: húzás

⊖: nyomás

⊕: szomorúra hajlít

Igénybevételi fv.:

K függ az ívhossz koord.-tól: $K(s)$

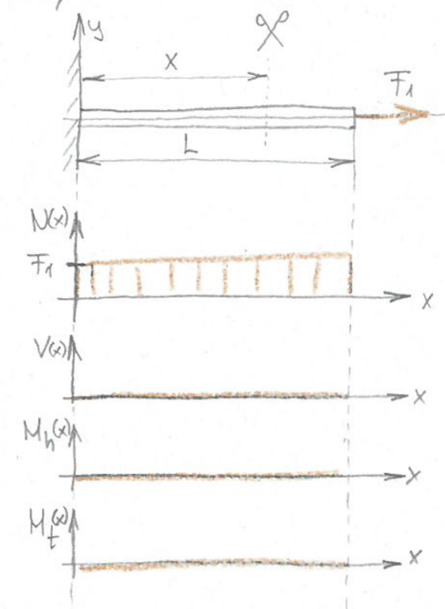
⇓

$M_{cs}(s)$, $M_h(s)$, $N(s)$, $V(s)$

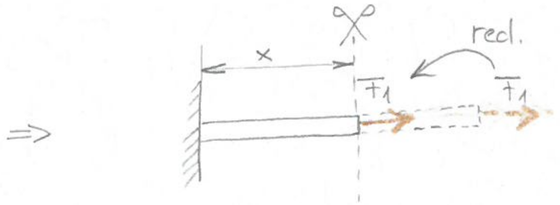
Miért kell?

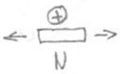
↳ „hol fog eltörni?"

8.1,



feltéve, hogy $F_1 > 0$



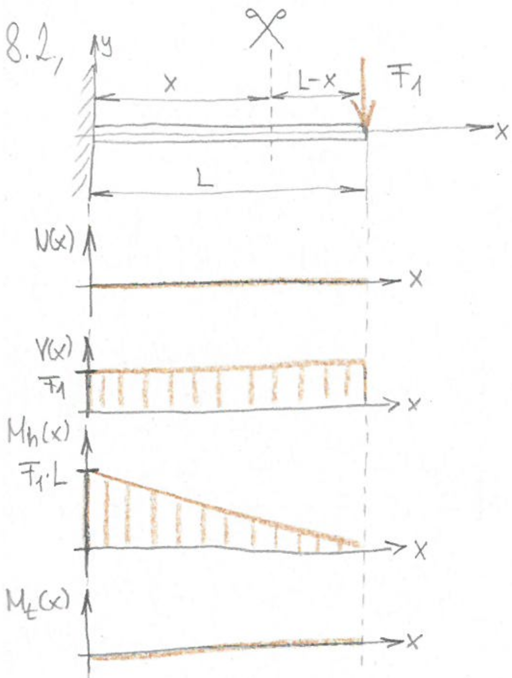


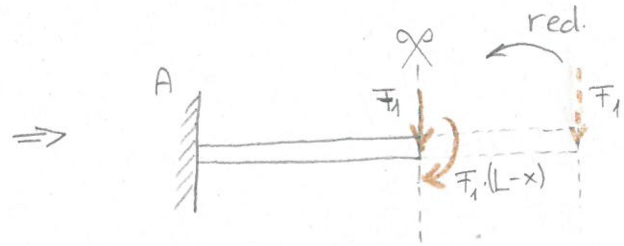
$N(x) = F_1$ $\qquad$ $M_h(x) = 0$

$V(x) = 0$ $\qquad$ $M_t(x) = 0$

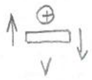
$x \in [0, L]$

8.2,



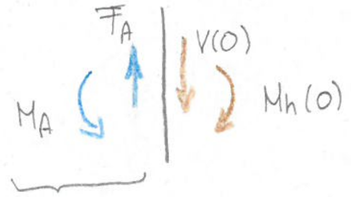


$N(x) = 0$ $\qquad$ $M_h(x) = F_1 \cdot (L-x)$



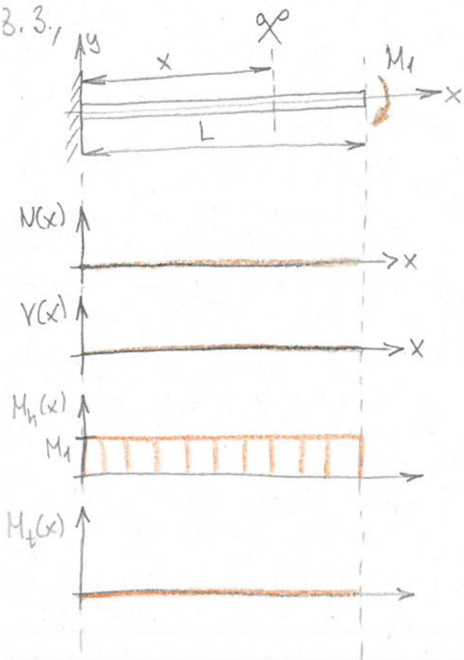
$V(x) = +F_1$ $\qquad$ $M_t(x) = 0$

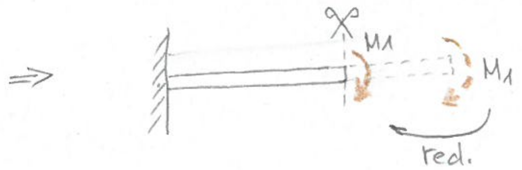
megj.: $x=0$ km.-ben: „km." egyensúlyban van



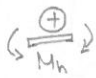
reakciók a <u>befogásban</u>: igbv.-ek ellentettjei

8.3,



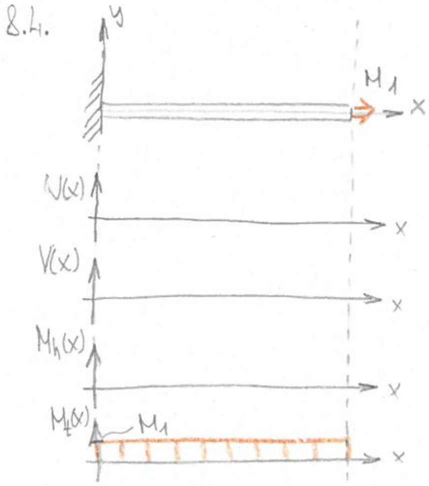


$N(x) = 0$ $\qquad$ $M_h(x) = M_1$

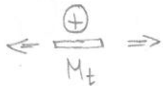


$V(x) = 0$ $\qquad$ $M_t(x) = 0$

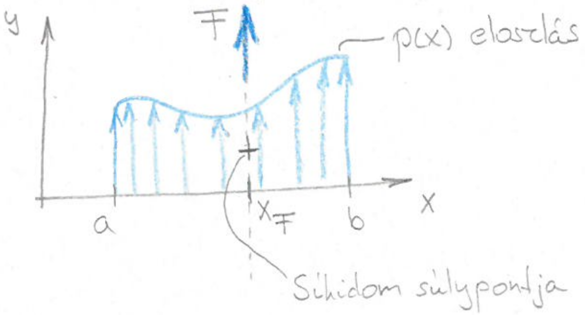
8.4.



$N(x) = 0$
$V(x) = 0$
$M_h(x) = 0$
$M_t(x) = M_1$



Vonalmenti megoszló erőrendszer:



Az eredő erő:

$$F = \sum p(x_i) \cdot \Delta x_i$$

határátmenet: $\Delta x_i \to 0$

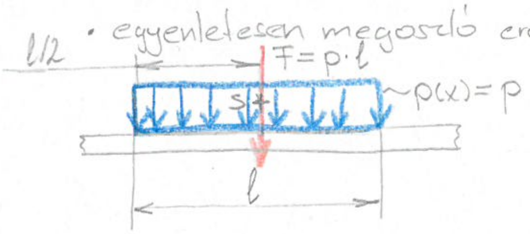
$$F = \int_a^b p(x)\, dx \rightarrow p(x) \text{ alatti terület}$$

Az eredő erő helye: a súlypontban

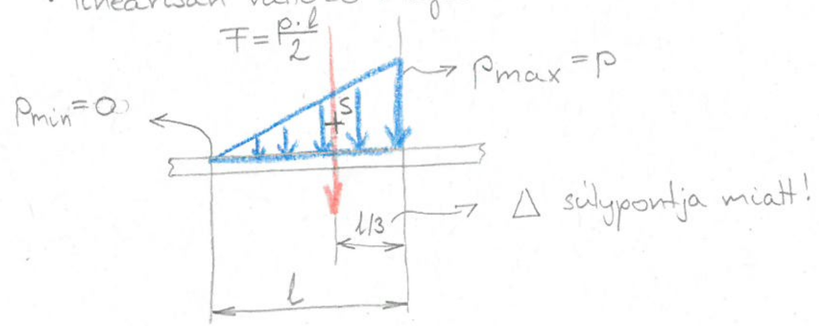
$$x_F = \frac{\int_a^b x \cdot p(x)\, dx}{F}$$

Speciális megoszló erőrsz.:

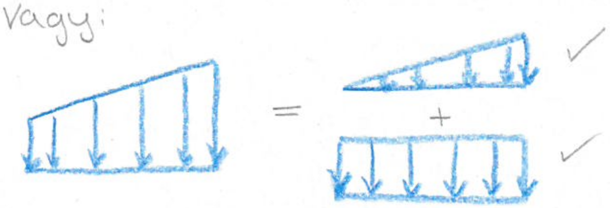
- egyenletesen megoszló erőrsz.:



- lineárisan változó megoszló terhelés:

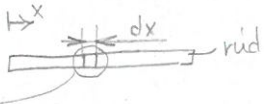


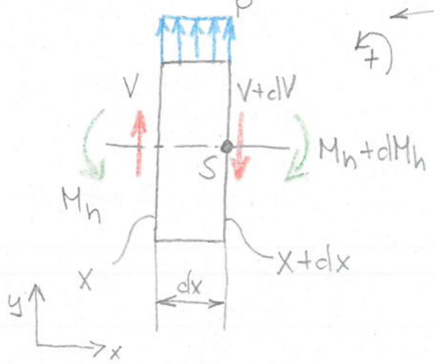
Vagy:



Kapcsolat az igbv.-i fv.-ek között

Vegyünk egy kicsiny rúdelemet:





$\sum F_y = 0$: $V - (V + dV) + p\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{p = \frac{dV}{dx}}$

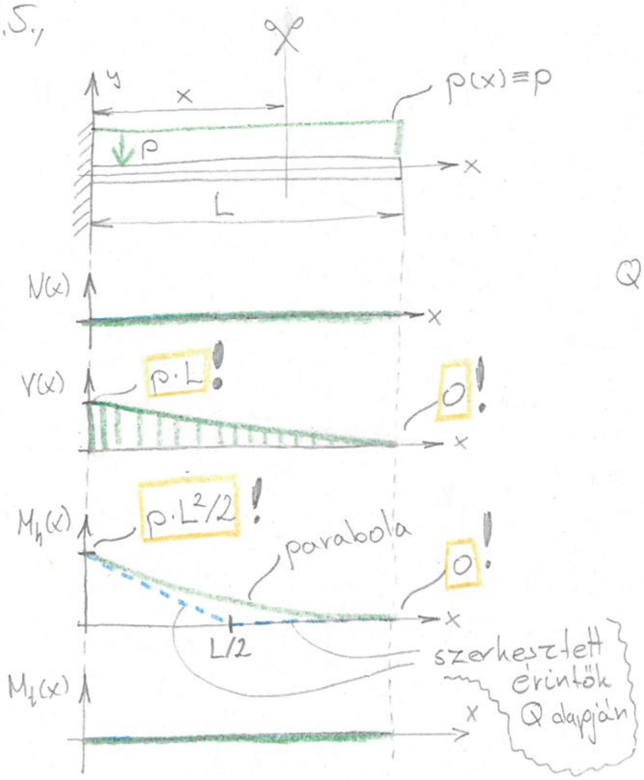
$\sum M_z = 0$: $-V\,dx + M_h - \underbrace{(p \cdot dx) \cdot \frac{dx}{2}}_{\approx 0,\ \text{másodrendben kicsiny}} - (M_h + dM_h) = 0$

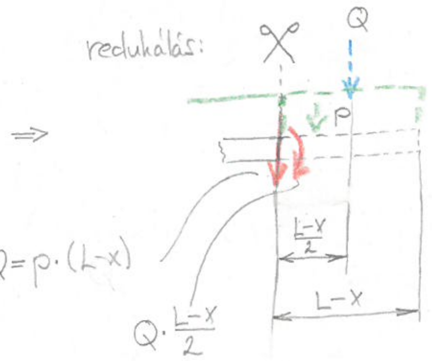
x+dx helyen lévő km. súlypontjára (S)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V = -\frac{dM_h}{dx}}$$

8.5.





$N(x)=0$

$V(x)=p\cdot(L-x)$

$M_h(x)=(p\cdot(L-x))\cdot\frac{L-x}{2}=$

$=p\cdot\frac{(L-x)^2}{2}$

$x\in[0,L]$

$M_t(x)=0$

Ellenőrzés:

$$V(x)=-\frac{dMh(x)}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(p\cdot\frac{(L-x)^2}{2}\right)=-p\cdot\frac{\cancel{2}(L-x)\cdot(-1)}{\cancel{2}}=$$

$=p\cdot(L-x)$ ⇒ ezt kaptuk előbb is!

$$p(x)=\frac{dV(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(p\cdot(L-x)\right)=-p$$

⇓

ez is jó, hiszen ⊖ irányú a terhelés

Ábrázoláshoz: • $V(0)=p\cdot L$

• $Mh(0)=\frac{pL^2}{2}$ $\quad Mh(L)=0$

Tudjuk, hogy $M_h(x)$ egy parabola, de hogy néz ki?

- Mik a végpontokban az érintők?

érintő ~ Mh(x) deriváltja

$\frac{dMh(x)}{dx}=-V(x)$ ⇒ Azaz az érintő meredeksége számolható.

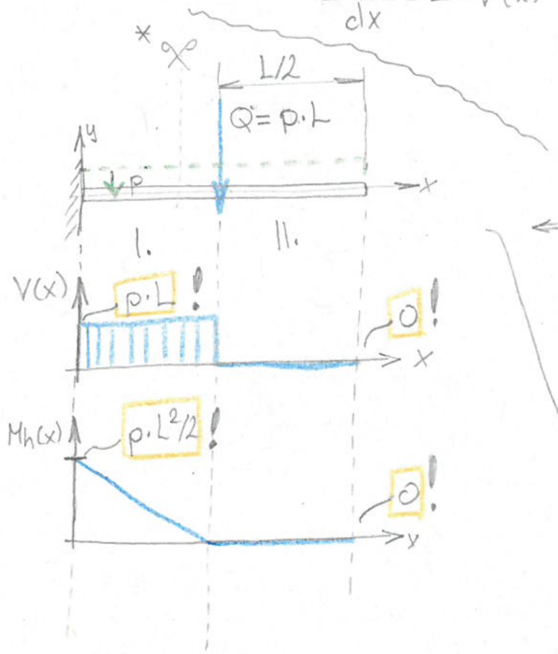
VAGY

Ha a megoszló terhelést helyettesítjük a Q koncentrált erővel, akkor V(x) a megoszló terhelés végpontjaiban nem változik.

⇒ A megoszló terhelés végpontjaiban:

1, Mh(x) érintője ugyanaz lesz p(x) és Q terhelés esetén is.

2, Mh(x) értéke ugyanaz lesz p(x) és Q terh. esetén is.



II. $L/2<x<L$:

$V(x)=0$

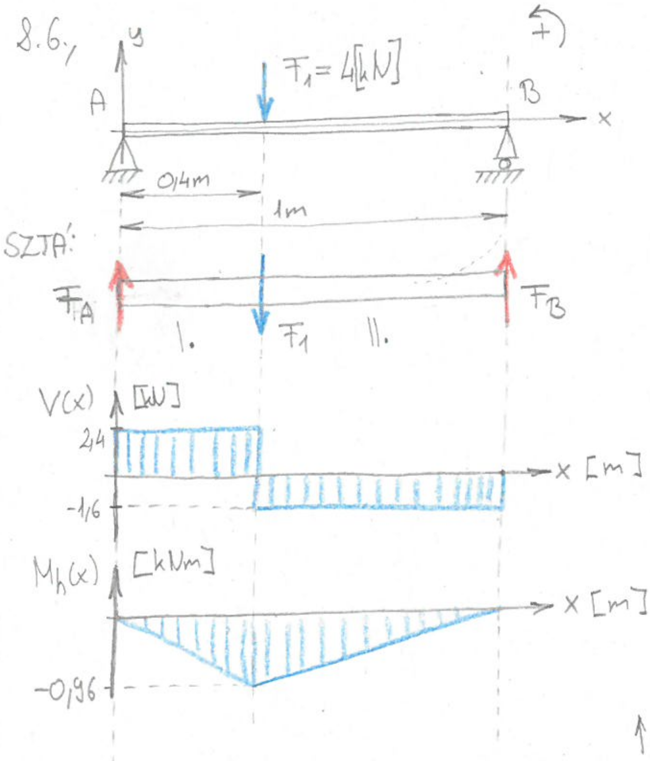
$M_h(x)=0$

* I. $0<x<L/2$

$V(x)=Q=p\cdot L$

$M_h(x)=Q\cdot(L/2-x)=p\cdot L\cdot\left(\frac{L}{2}-x\right)$

8.6.,



megj.: $F_{Ax} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = F_A$ → jelölés

Reakciók meghatározása:

$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot 0{,}4 + F_B \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow F_B = 1{,}6$ [kN]

$\sum F_y = 0: \quad F_A + F_B - F_1 = 0$

$F_A = 2{,}4$ [kN]

Igénybevételek:

$N(x) = 0$, $M_t(x) = 0$, $x \in [0;1]$ [m]

II. $0{,}4 < x < 1$ [m]

$V(x) = -F_B = -1{,}6$ [kN]

$M_h(x) = -F_B \cdot (1-x) = -1{,}6 + 1{,}6x$ [kNm]

I. $0 < x < 0{,}4$ [m]

$V(x) = -F_B + F_1 = 2{,}4$ [kN]

$M_h(x) = -F_B \cdot (1-x) + F_1 \cdot (0{,}4 - x) =$

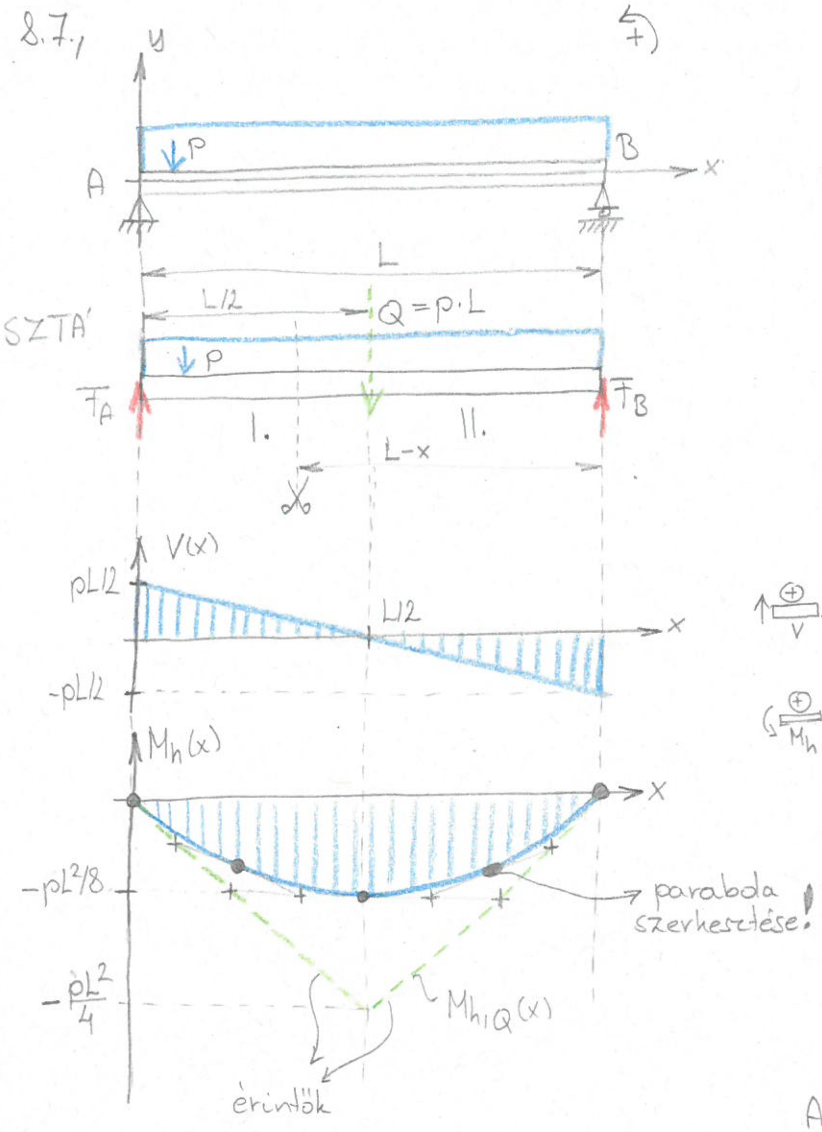
$= \ldots = -2{,}4x$ [kNm]

Ábrázoláshoz:

$M_h(0{,}4) = -1{,}6 + 1{,}6 \cdot 0{,}4 = -0{,}96$ [kNm]

$= -2{,}4 \cdot 0{,}4 = -0{,}96$ [kNm]

8.7.



$p = 4$ [kNm]
$L = 1$ [m]

Reakciók:

$$\left.\begin{aligned} \sum M_A = 0:&\ -Q\cdot\frac{L}{2} + F_B\cdot L = 0 \\ \sum F_y = 0:&\ F_A + F_B - Q = 0 \end{aligned}\right\} \quad F_A = F_B = \frac{Q}{2} = \frac{pL}{2} = 2\ [\text{kN}]$$

Igbv.-fv.-ek:

$N(x) = 0$

$M_t(x) = 0$

$$V(x) = -\underbrace{F_B}_{pL/2} + p\cdot(L-x) = \frac{pL}{2} - px$$

$$M_h(x) = -\underbrace{F_B}_{pL/2}\cdot(L-x) + [p\cdot(L-x)]\cdot\frac{L-x}{2} =$$

$$= -\frac{pL^2}{2} + \frac{pLx}{2} + p\cdot\frac{(L-x)^2}{2} = -\frac{pLx}{2} + \frac{px^2}{2}$$

Ell.: $\frac{dM_h(x)}{dx} = -\frac{pL}{2} + px = -V(x)$ ✓

$\frac{dV(x)}{dx} = -p = p(x)$ ✓

Ábrázoláshoz:

- $V(0) = \frac{pL}{2}$ $\quad V(L) = -\frac{pL}{2}$
- $M_h(0) = 0$ $\quad M_h(L) = 0$ $\quad M_h\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^2}{8}$

A parabolához: p(x) helyettesítése Q-val:

I. $0 < x < \frac{L}{2}$:

$$M_{h,Q}(x) = -F_A\cdot x = -\frac{pL}{2}\cdot x$$

II. $\frac{L}{2} < x < L$:

$$M_{h,Q}(x) = -F_B\cdot(L-x) = -\frac{pL^2}{2} + \frac{pL}{2}\cdot x$$

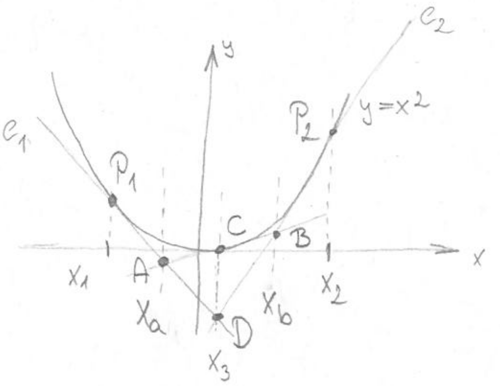
Ezzel:

$M_{h,Q}(0) = 0$

$M_{h,Q}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{pL^2}{4}$

$M_{h,Q}(L) = 0$

Parabola szerkesztése:



- Legyen $f(x)=x^2$
- Érintő egyenes $x=x_0$-ban:

$$f'(x)=2x \quad \Rightarrow \quad f'(x_0)=2x_0 = m \rightsquigarrow \text{érintő meredeksége}$$

Egyenes egyenlete:

$$y = \overbrace{\underbrace{y_0}_{f(x_0)} + \underbrace{m}_{f'(x_0)}(x-x_0)}^{e_{x_0}(x)} \quad \Rightarrow \quad y = e_{x_0}(x)$$

Most: $e_{x_0}(x) = x_0^2 + 2x_0\cdot(x-x_0) = 2x_0x - x_0^2$

- Két érintő: $x=x_1$-ben: $e_{x_1}(x) = 2x_1x - x_1^2$

  $x=x_2$-ben: $e_{x_2}(x) = 2x_2x - x_2^2$

A metszéspontjuk: $e_{x_1}(x) = e_{x_2}(x) \Rightarrow 2x_1x - x_1^2 = 2x_2x - x_2^2$

$$x = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2(x_1-x_2)} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{2(x_1-x_2)} = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Legyen: $x_3 = \underbrace{\frac{x_1+x_2}{2}}_{\text{átlag}}$ a mp.

átlag $\Rightarrow$ x_3 az x_1, x_2 felezőpontja

- Érintő szakaszok felezőpontjai: $A(x_a, y_a)$ és $B(x_b, y_b)$

$$x_a = \frac{x_1+x_3}{2}, \quad x_b = \frac{x_2+x_3}{2} \rightsquigarrow \text{átlagok} \Rightarrow x_a = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1+x_2}{4} = \frac{3x_1+x_2}{4}$$

$$x_b = \frac{x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{4} = \frac{x_1+3x_2}{4}$$

ÉS $y_a = e_{x_1}(x_a)$, $y_b = e_{x_2}(x_b)$

- Felezőpontokat (A és B) összekötő szakasz felezőpontja: $C(x_c, y_c)$

$$x_c = \frac{x_a+x_b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3x_1+x_2}{4} + \frac{x_1+3x_2}{4}\right) = \frac{x_1+x_2}{2} = x_3$$

$$y_c = \frac{e_{x_1}(x_a) + e_{x_2}(x_b)}{2} = \frac{\left(\cancel{2}x_1\cdot\frac{x_1+x_3}{\cancel{2}} - x_1^2\right) + \left(\cancel{2}x_2\frac{x_2+x_3}{\cancel{2}} - x_2^2\right)}{2} = \frac{x_1x_3 + x_2x_3}{2} =$$

$$= x_3\cdot\underbrace{\frac{x_1+x_2}{2}}_{x_3} = x_3^2 = x_c^2$$

Azaz $C(x_c, \underbrace{x_c^2}_{y_c})$ rajta van a parabolán.

Megj.: Amennyiben általánosabb parabolával van dolgunk, akkor is elvégezhető a szerkesztés.

Azaz: 1, Adott P_1 és P_2 pont a parabolán, és a hozzájuk tartozó e_1 és e_2 érintők.

2, e_1 és e_2 mp.-ja D

3, $\overline{P_1D}$ fp.-ja A és $\overline{P_2D}$ fp.-ja B.

4, $\overline{AB}$ érintője a parabolának. $\overline{AB}$ fp.-ja C, ami pontja a parabolának.

Példa:

• parabola pontja

o szerkesztési pont