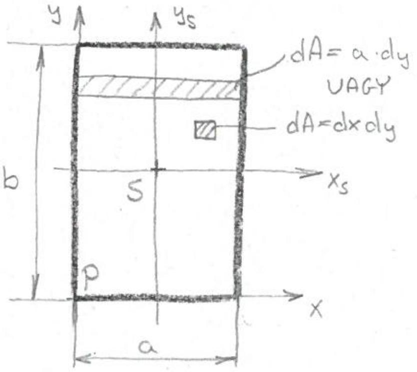
1, Téglalap másodrendű nyomatékai:



a, Az x–y krsz.-ben:

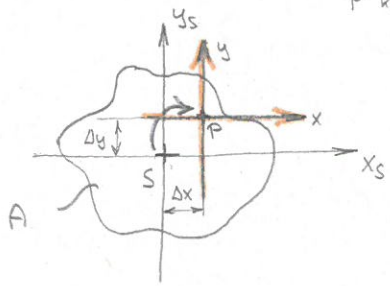
$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^b y^2 \cdot a\,dy = \left[\frac{ay^3}{3}\right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

$$I_y = \int_{(A)} x^2 dA = \int_0^a x^2 b\,dx = \left[\frac{bx^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3 b}{3}$$

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy\,dA = \int_0^a \int_0^b xy\,dy\,dx = \int_0^a x\,dx \cdot \int_0^b y\,dy =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a^2 b^2}{4}$$

Steiner-tétel:



P koordinátai az $\overbrace{x_s - y_s \text{ krsz.-ben}}^{\text{Csak súlyponti krsz. esetén működik!}}$: $P(\Delta x, \Delta y)$ – előjeles koordináta!

$$I_x = I_{xs} + \Delta y^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad I_{xs} \le I_x \text{, mert: } \overset{\ge 0}{\Delta y^2} \cdot \overset{>0}{A} \ge 0$$

$$I_y = I_{ys} + \Delta x^2 \cdot A$$

$$I_{xy} = I_{x_s y_s} + \Delta x \Delta y \cdot A$$

b, Az $x_s - y_s$ krsz.-ben most: $P(\underbrace{-\tfrac{a}{2}}_{\Delta x}, \underbrace{-\tfrac{b}{2}}_{\Delta y})$ és $A = a \cdot b$

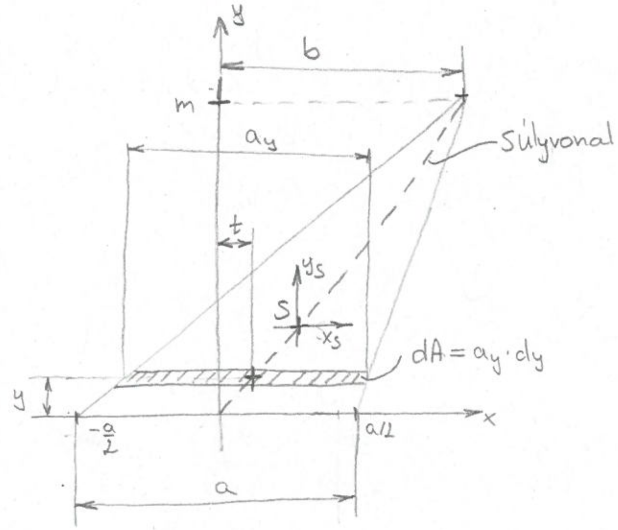
$$I_x = I_{x_s} + \Delta y^2 \cdot A \Rightarrow I_{x_s} = I_x - \Delta y^2 \cdot A = \frac{ab^3}{3} - \left(-\frac{b}{2}\right)^2 \cdot ab = \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^3}{4} = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_y = I_{ys} + \Delta x^2 \cdot A \Rightarrow I_{ys} = I_y - \Delta x^2 \cdot A = \frac{a^3 b}{3} - \left(-\frac{a}{2}\right)^2 ab = \frac{a^3 b}{3} - \frac{a^3 b}{4} = \frac{a^3 b}{12}$$

$$I_{xy} = I_{x_s y_s} + \Delta x \Delta y \cdot A \Rightarrow I_{x_s y_s} = I_{xy} - \Delta x \Delta y \cdot A = \frac{a^2 b^2}{4} - \left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{b}{2}\right) ab = \frac{a^2 b^2}{4} - \frac{a^2 b^2}{4} = 0$$

Persze, hogy 0, mert x_s és y_s is szimmetria tengely!

2, Háromszög másodrendű nyomatéka:



$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^m y^2 \cdot \underbrace{a_y \cdot dy}_{dA} \overset{*}{=}$$

$$a_y(y) = a - \frac{a}{m} y \Rightarrow a_y(0) = a \text{ és } a_y(m) = 0$$

$$\overset{*}{=} \int_0^m y^2 \left(a - \frac{a}{m} y\right) dy = \int_0^m \left(a y^2 - \frac{a y^3}{m}\right) dy =$$

$$= \left[\frac{ay^3}{3} - \frac{ay^4}{4m}\right]_0^m = \frac{am^3}{3} - \frac{am^4}{4m} = \frac{am^3}{12}$$

$$I_x = I_{xs} + \underbrace{\Delta y^2}_{(-m/3)^2} \cdot \overset{am/2}{A} \Rightarrow I_{x_s} = I_x - \Delta y^2 \cdot A =$$

$$= \frac{am^3}{12} - \left(-\frac{m}{3}\right)^2 \cdot \frac{am}{2} = \frac{am^3}{12} - \frac{am^3}{18} =$$

$$= \frac{am^3}{36}$$

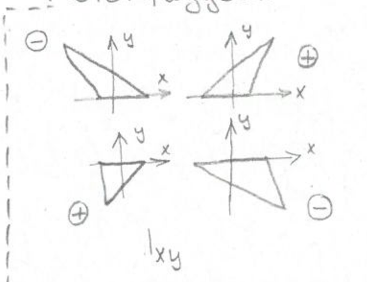
$$I_{xy}=\int_{(A)} xy\,dA=\int_0^m t\,y\,\overbrace{a_y\cdot dy}^{dA}=\int_0^m \frac{b}{m}y\cdot y\cdot\left(a-\frac{a}{m}y\right)dy=\int_0^m\left(\frac{aby^2}{m}-\frac{aby^3}{m^2}\right)dy=\left[\frac{aby^3}{3m}-\frac{aby^4}{4m^2}\right]_0^m=$$

$t=\frac{b}{m}y$

$$=\frac{abm^3}{3m}-\frac{abm^4}{4m^2}=\frac{abm^2}{3}-\frac{abm^2}{4}=\frac{abm^2}{12}$$

megj.:

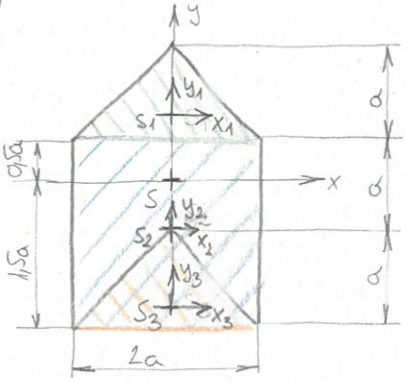
I_{xy} előjele változhat a harmadik csúcs helyzetétől függően:



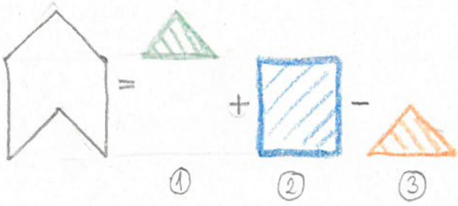
$$I_{x_Sy_S}=I_{xy}-\Delta x\Delta y A=\frac{abm^2}{12}-\underbrace{\left(-\frac{b}{m}\cdot\frac{m}{3}\right)}_{-2a/3}\cdot\left(-\frac{m}{3}\right)\frac{am}{2}=$$

$$=\frac{abm^2}{12}-\frac{abm^2}{18}=\frac{abm^2}{36}$$

7, Összetett km. másodrendű nyomatékai



A keresztmetszet:



a, Ix meghatározása:

$$I_{x_1}^{(1)}=\frac{2a\cdot a^3}{36}=\frac{a^4}{18}$$

síkidom ↗, tengely ↙

$$I_x^{(1)}=I_{x_1}^{(1)}+\overbrace{\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)^2}^{X \text{ és } X_1 \text{ távolsága}}\cdot\overbrace{\frac{2a\cdot a}{2}}^{\Delta \text{ területe}}=\frac{a^4}{18}+\frac{25a^2}{36}\cdot a^2=\frac{27a^4}{36}=\frac{3a^4}{4}$$

(1) saját súlyponti tengelyére számított másodr. nyom.!

$$I_{x_2}^{(2)}=\frac{2a\cdot(2a)^3}{12}=\frac{16a^4}{12}=\frac{4a^4}{3}$$

$$I_x^{(2)}=I_{y_2}^{(2)}+\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot(2a)^2=\frac{4a^4}{3}+a^4=\frac{7a^4}{3}$$

$$I_{x_3}^{(3)}=I_{x_1}^{(1)}=\frac{a^4}{18}$$

↑ ua. a síkidom

$$I_x^{(3)}=I_{x_3}^{(3)}+\underbrace{\left(\frac{3a}{2}-\frac{a}{3}\right)^2}_{7a/6}\cdot\frac{2a\cdot a}{2}=\frac{a^4}{18}+\frac{49a^4}{36}=\frac{17a^4}{12}$$

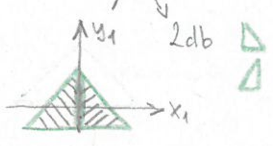
Végül az egy tengelyre számított másodr. nyomatékok összegezhetőek:

$$I_x=I_x^{(1)}+I_x^{(2)}-I_x^{(3)}=\frac{3a^4}{4}+\frac{7a^4}{3}-\frac{17a^4}{12}=\frac{20a^4}{12}=\frac{5a^4}{3}$$

b, Iy meghatározása:

$$I_y^{(1)}=I_{y_1}^{(1)}=2\cdot\frac{a\cdot a^3}{12}=\frac{a^4}{6}$$

2db



$$I_y^{(3)}=I_{y_3}^{(3)}=I_{y_1}^{(1)}=\frac{a^4}{6}$$

azonos síkidom

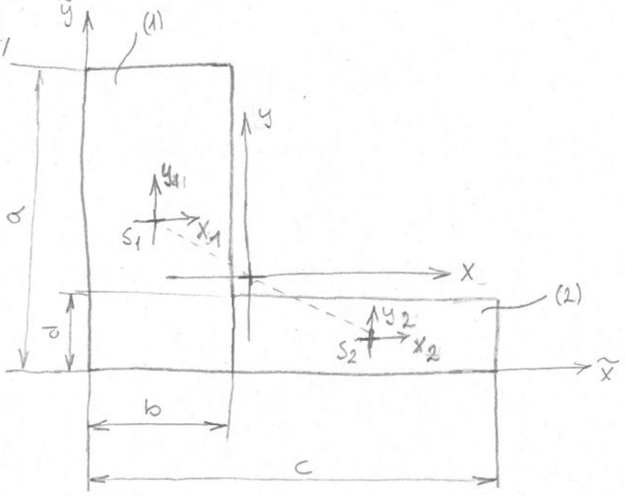
$$I_y^{(2)}=I_{y_2}^{(2)}=\frac{(2a)^4}{12}=\frac{4a^4}{3}$$

$$I_y=\underbrace{I_y^{(1)}+I_y^{(2)}-I_y^{(3)}}_{\text{ezek egyenlőek...}}=I_y^{(2)}=\frac{4a^4}{3}$$

c, Mivel az y tengely szimmetria tengelye a síkidomnak, ezért: $I_{xy}=0$

Statika – 13. gyakorlat

1,



Adatok: $a = 40$ [mm]
$b = 20$ [mm]
$c = 80$ [mm]
$d = 10$ [mm]

Feladatok: I_x, I_y, I_{xy}, I_p

a) Súlypont meghatározása: $\tilde{x}, \tilde{y}$ krsz.-ben

Síkidomok: - súlypont: $\tilde{r}_{S_1} = \begin{bmatrix} b/2 \\ a/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ [mm] $\qquad \tilde{r}_{S2} = \begin{bmatrix} (b+c)/2 \\ d/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 5 \end{bmatrix}$ [mm] $\quad \tilde{x}_{S2}, \ \tilde{y}_{S2}$

- terület: $A_1 = a \cdot b = 800$ [mm²] $\qquad A_2 = d \cdot (c-b) = 600$ [mm²]

- előjel: + $\qquad$ +

A közös súlypont koordinátái:

$$\tilde{x}_S = \frac{\tilde{x}_{S1} A_1 + \tilde{x}_{S2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 800 + 50 \cdot 600}{800 + 600} = 27{,}14 \text{ [mm]}$$

$$\tilde{y}_S = \frac{\tilde{y}_{S1} A_1 + \tilde{y}_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = \ldots = 13{,}57 \text{ [mm]}$$

b) Másodrendű nyomatékok meghatározása

b1) • $I_{x_1}^{(1)} = \frac{a^3 b}{12}$ és $I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + (\tilde{y}_{S1} - \tilde{y}_S)^2 \cdot A_1 = 106{,}\dot{6} \cdot 10^3 + (20 - 13{,}57)^2 \cdot 800 = 139{,}741 \cdot 10^3$ [mm⁴]

Rossz megoldás: ne így!

$I_{\tilde{x}}^{(1)} = \frac{ba^3}{3}$ és $I_x^{(1)} \neq \underbrace{I_{\tilde{x}}^{(1)}} + \tilde{y}_S^2 \cdot A_1 = \frac{20 \cdot 40^3}{3} + 13{,}57^2 \cdot 800 = 437{,}522 \cdot 10^3$ [mm⁴] → rossz!

Nem súlyponti tengelyre van számítva, nem alkalmazható a Steiner-tétel!

• $I_{x_2}^{(2)} = \frac{d^3 (c-b)}{12} = \ldots = 5000$ [mm⁴] és $I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + (\tilde{y}_S - \tilde{y}_{S2})^2 \cdot A_2 =$

$= 5000 + (13{,}57 - 5)^2 \cdot 600 = 49{,}067 \cdot 10^3$ [mm⁴]

• $I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = \ldots = 188{,}809 \cdot 10^3$ [mm⁴]

b2) • $I_{y_1}^{(1)} = \frac{b^3 a}{12}$ és $I_y^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + (\tilde{x}_S - \tilde{x}_{S1})^2 A_1 = \frac{20^3 \cdot 40}{12} + (27{,}14 - 10)^2 \cdot 800 = 261{,}690 \cdot 10^3$ [mm⁴]

• $I_{y_2}^{(2)} = \frac{(c-b)^3 \cdot d}{12}$ és $I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + (\tilde{x}_{S2} - \tilde{x}_S)^2 \cdot A_2 = \frac{(80-20)^3 \cdot 10}{12} + (50 - 27{,}14)^2 \cdot 600 = 493{,}548 \cdot 10^3$ [mm⁴]

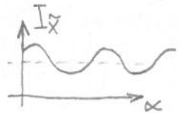
• $I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = \ldots = 755{,}238 \cdot 10^3$ [mm⁴]

b3) • A szimmetriák miatt: $I_{x_1 y_1}^{(1)} = 0$ és $I_{x_2 y_2}^{(2)} = 0$

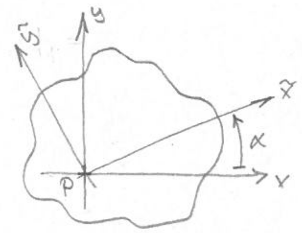
• $I_{xy}^{(1)} = I_{x_1 y_1}^{(1)} + (\tilde{x}_S - \tilde{x}_{S1})(\tilde{y}_S - \tilde{y}_{S1}) \cdot A_1 = 0 + (27{,}14 - 10) \cdot (13{,}57 - 20) \cdot 800 = -88{,}168 \cdot 10^3$ [mm⁴]

$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2 y_2}^{(2)} + (\tilde{x}_S - \tilde{x}_{S2})(\tilde{y}_S - \tilde{y}_{S2}) \cdot A_2 = 0 + (27{,}14 - 50) \cdot (13{,}57 - 5) \cdot 600 = -117{,}546 \cdot 10^3$ [mm⁴]

$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = \ldots = -205{,}714 \cdot 10^3$ [mm⁴] b4, $I_p = I_x + I_y = \ldots = 944{,}048 \cdot 10^3$ [mm⁴]



c, Fómásodrendű nyomatékok: $I_1 \geq I_2$



Belátható: $I_{\tilde{x}} = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha - 2I_{xy} \cdot \sin\alpha\cos\alpha$

Enneh szélsőértékei:

$$\frac{dI_{\tilde{x}}}{d\alpha} \overset{\circledast}{=} 0 \Rightarrow \alpha^* \text{ megadható (több mo. is van)}$$

$\Downarrow$

A szé. értékei: $$I^*_{\tilde{x}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right)^2}$$

megj.: $I_x - I_y = 0$ is lehetséges lenne

ekkor $\circledast$: $-\underbrace{(I_x - I_y)}_{0} \cdot \sin 2\alpha - 2I_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$

$\Downarrow$

$\underbrace{2I_{xy}}_{\text{Ha ez nem 0,}} \cdot \underbrace{\cos 2\alpha}_{\text{akkor ez 0}} = 0$

$\Downarrow$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \underbrace{k}_{:=0} \cdot \pi$

$\alpha = 45°$

Tehát a lényeg most:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} \oplus \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^{②}} = \ldots = 822{,}065 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]}$$

kitevő...

I_1 a nagyobb

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} \ominus \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \ldots = 121{,}985 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]}$$

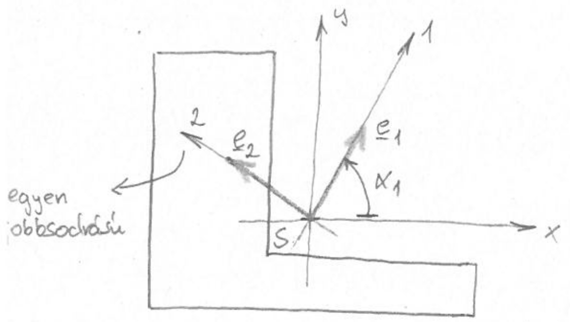
I_2 a kisebb

megj.: $I_{12} = 0 \Leftarrow$ a főtengelypárra számított másodr. nyom. zérus

A főirányok:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right) = \ldots = 1{,}2567 \text{ [rad]} = 72°$$

$\oplus$ és $\ominus$ is lehet $\Rightarrow$ forgásszög



A főirányok egységvektora:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}309 \\ 0{,}951 \end{bmatrix} [-]$$

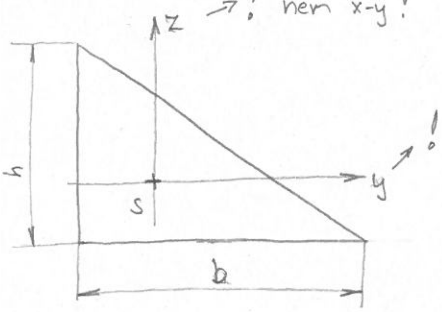
$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1 + 90°) \\ \sin(\alpha_1 + 90°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}951 \\ 0{,}309 \end{bmatrix} [-]$$

2, Háromszög másodrendű nyomatékai

b = 75 [mm]

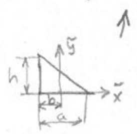
h = 30 [mm]

! nem x-y !



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad \text{és} \quad I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

$$I_{yz} = -\frac{b \cdot \frac{b}{2} \cdot h^2}{36} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$



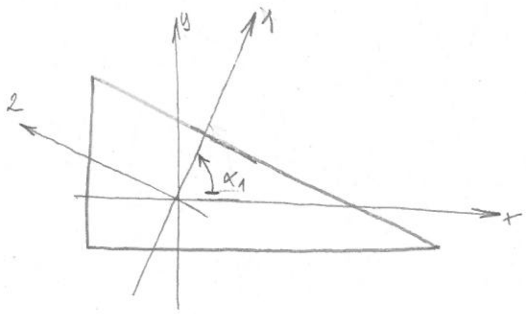
Főmásodrendű nyomatékok:

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_y - I_z)^2 + I_{yz}^2} = 367{,}4 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]}$$

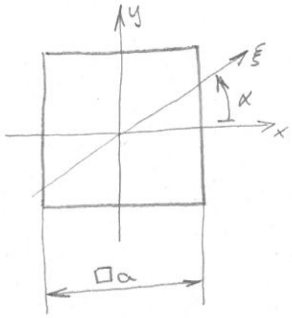
$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_y - I_z)^2 + I_{yz}^2} = 40{,}4 \cdot 10^3 \text{ [mm}^4\text{]}$$

A főirányok: $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{I_y - I_1}{I_{yz}}\right) = 77{,}27°$

$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}22 \\ 0{,}98 \end{bmatrix}$ [-]



3.,



$I_\xi = ?$

Tudjuk, hogy: • $I_x = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$ és $I_y = \frac{a^4}{12}$

• A szimm. miatt: $I_{xy} = 0$

Azaz: $I_\xi = I_x \cdot \cos^2\alpha + \underbrace{I_y}_{I_x} \cdot \sin^2\alpha - 2\underbrace{I_{xy}}_{0} \cdot \sin\alpha\cos\alpha$

$= I_x \cdot \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} = I_x$, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén.