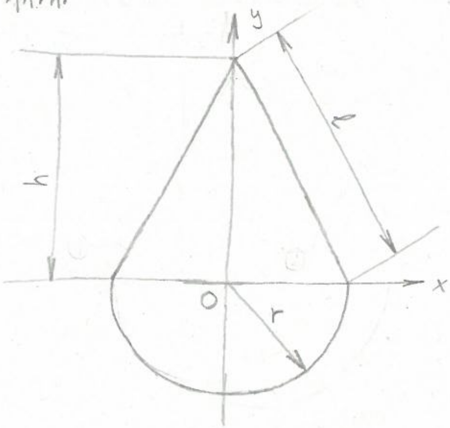
Statika - 11. gyakorlat

Súlypont számítás

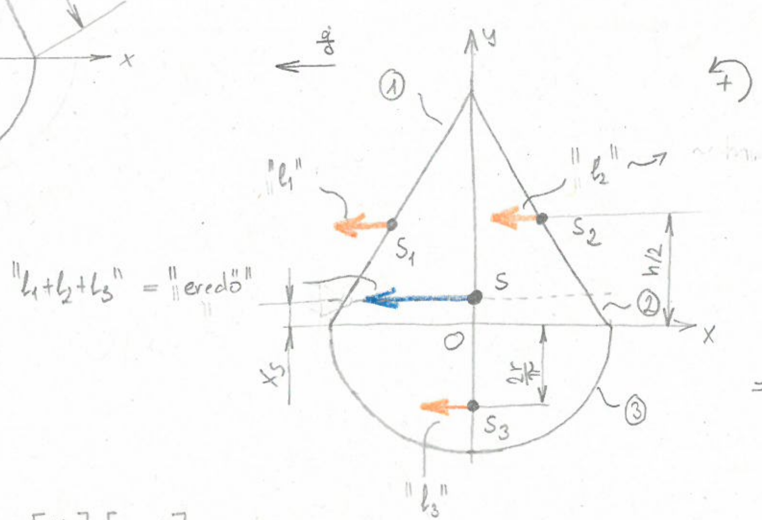
11.1.



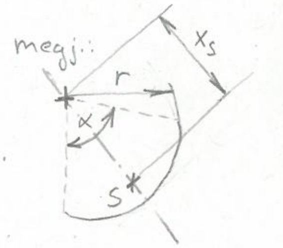
Adatok: $h = 1\,[m]$
$r = 0{,}5\,[m]$

Határozzuk meg a test súlypontját!

a, A test 2 egyenes és egy félkör alakú rúdból áll.
Tudjuk az egyes részek súlypontjának helyét.



megj.:



$$X_s = \frac{r \cdot \sin\alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_S \end{bmatrix}$$ ← szimmetria miatt

Súlypontok:

$$\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r/2 \\ h/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 \\ h/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{S3} = \begin{bmatrix} x_{S3} \\ y_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2r}{\pi} \end{bmatrix}$$

Hosszok (~ tömegek):

$$\ell_1 = \sqrt{r^2 + h^2} = 1{,}118\,[m]$$

$$\ell_2 = \ell_1$$

$$\ell_3 = r \cdot \pi = 1{,}571\,[m]$$

Az "eredő" nyomatéka az O pontra megegyezik az "erők" nyomatékainak összegével:

$$\circlearrowleft \quad y_S \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) = \overbrace{\frac{h}{2}}^{y_{S1}} \cdot \ell_1 + \overbrace{\frac{h}{2}}^{y_{S2}} \cdot \ell_2 \overbrace{- \frac{2r}{\pi}}^{y_{S3}} \cdot \ell_3$$

$$\Downarrow$$

$$y_S = \frac{\frac{h}{2} \cdot \ell_1 + \frac{h}{2} \cdot \ell_2 - \frac{2r}{\pi} \cdot \ell_3}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3} = \ldots = \underline{\underline{0{,}162\,[m]}}$$

megj.:
$$y_S \cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{(\ell_1+\ell_2+\ell_3) \cdot A}_{\Sigma V} \cdot \rho}_{\Sigma m} \cdot g}_{\Sigma F} = \frac{h}{2} \cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{\ell_1 \cdot A}_{V_1} \rho}_{m_1} g}_{F_1} + \frac{h}{2} \cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{\ell_2 A}_{V_2} \rho}_{m_2} g}_{F_2} - \frac{2r}{\pi} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\ell_3 A}_{V_3} \rho}_{m_3} g}_{F_3}$$

Tehát: csak azonos: • keresztmetszet: A
• sűrűség: ρ
mellett működik!

VAGY inkább:

$$y_S \cdot \sum_{i=1}^{3} \ell_i = \sum_{i=1}^{3} y_{Si} \cdot \ell_i$$

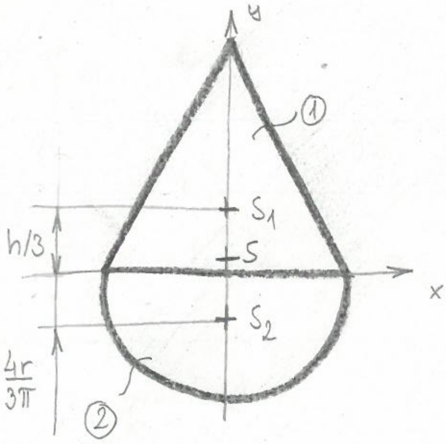
$$y_S = \frac{\sum_i y_{Si} \cdot \ell_i}{\sum_i \ell_i}, \qquad \text{és hasonlóan:} \quad x_S = \frac{\sum_i x_{Si} \cdot \overbrace{\ell_i}^{\text{arányos a tömeggel}}}{\sum_i \ell_i}$$

$$\circlearrowleft \quad x_S = \frac{\sum x_{Si} \cdot \ell_i}{\sum \ell_i} = \frac{-r/2 \cdot \sqrt{r^2+h^2} + r/2 \cdot \sqrt{r^2+h^2} + 0 \cdot r\pi}{2 \cdot \sqrt{r^2+h^2} + r\pi} = \underline{\underline{0\,[m]}}$$

Valóban, ha egy testnek van szimmetriasíkja, szimmetria tengelye, akkor a súlypontja erre illeszkedik.

Azaz: $\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}162 \end{bmatrix} [m]$

b, A test egy háromszög és egy félkör alakú lemezből áll.



Súlypontok:

$\underline{r}_{S1}=\begin{bmatrix}0\\h/3\end{bmatrix}$

$\underline{r}_{S2}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{4r}{3\pi}\end{bmatrix}$

Lemez területek: arányos a tömeggel

$$A_1=\frac{(2r)\cdot h}{2}=r\cdot h=0,5\ [m^2]$$

$$A_2=\frac{r^2\pi}{2}=0,393\ [m^2]$$

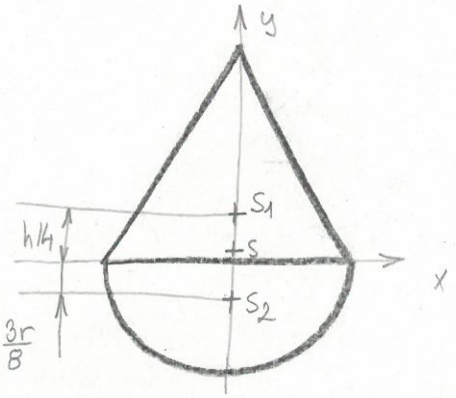
Hasonlóan, mint előbb:

$$x_S=\frac{\sum_{i=1}^{2}x_{Si}\cdot A_i}{\sum_{i=1}^{2}A_i}=\frac{x_{S1}\cdot A_1+x_{S2}\cdot A_2}{A_1+A_2}=\frac{0\cdot rh+0\cdot\frac{r^2\pi}{2}}{rh+\frac{r^2\pi}{2}}=\underline{\underline{0\ [m]}}$$

$$y_S=\frac{\sum_{i=1}^{2}y_{Si}\cdot A_i}{\sum_{i=1}^{2}A_i}=\frac{h/3\cdot r\cdot h-\frac{4r}{3\pi}\cdot\frac{r^2\pi}{2}}{rh+\frac{r^2\pi}{2}}=\underline{\underline{0,0933\ [m]}}$$

Azaz: $\underline{r}_S=\begin{bmatrix}0\\0,0933\end{bmatrix}[m]$

c, A test egy kúpból és egy félgömbből áll.



Súlypontok:

$\underline{r}_{S1}=\begin{bmatrix}0\\h/4\end{bmatrix}$

$\underline{r}_{S2}=\begin{bmatrix}0\\-3r/8\end{bmatrix}$

Térfogatok: arányos a tömeggel

$$V_1=\frac{(r^2\pi)\cdot h}{3}=0,262\ [m^3]$$

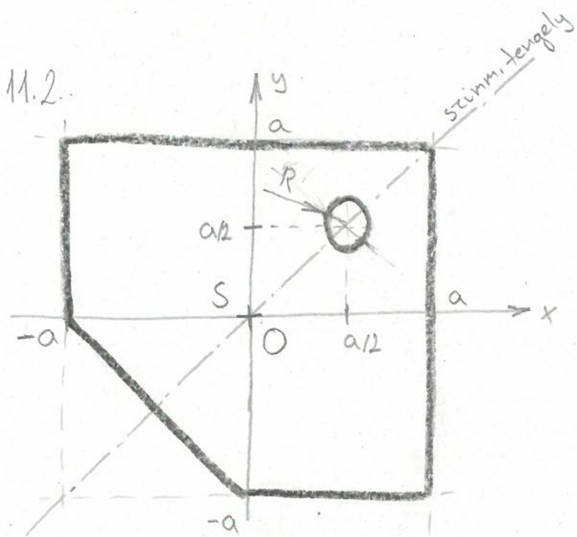
$$V_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{4r^3\pi}{3}=0,524\ [m^3]$$

Hasonlóan a korábbiakhoz:

$$x_S=\frac{\sum x_{Si}\cdot V_i}{\sum V_i}=\frac{0+0}{\sum V_i}=\underline{\underline{0\ [m]}}$$

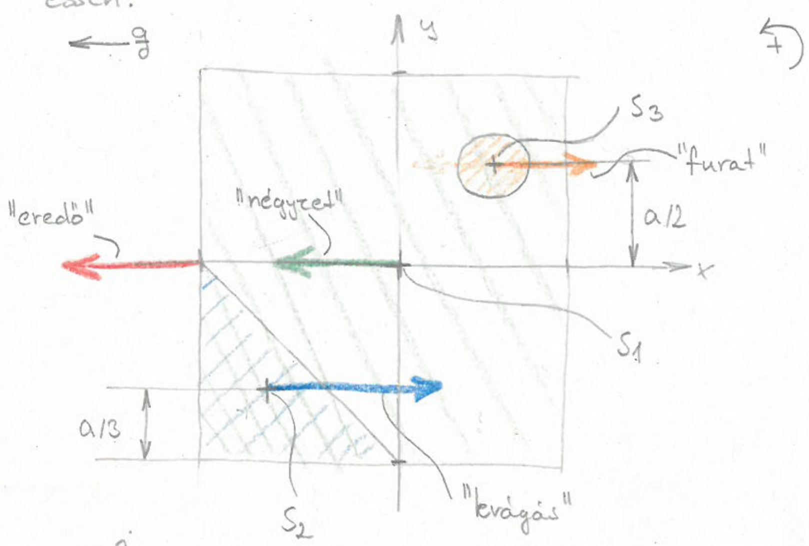
$$y_S=\frac{\sum y_{Si}\cdot V_i}{\sum V_i}=\frac{h/4\cdot\frac{r^2\pi h}{3}-\frac{3r}{8}\cdot\frac{2r^3\pi}{3}}{\frac{r^2\pi h}{3}+\frac{2r^3\pi}{3}}=\underline{\underline{0,03125\ [m]}}$$

11.2.



$\underline{r}_S=\underline{0}$

Mekkora legyen R, hogy a lemez súlypontja az origóba essen?



A kivágásokat negatív előjellel vesszük figyelembe!

Súlypontok: Területek:

négyzet: $\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A_1 = (2a)^2 = 4a^2$

levágás: $\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} -2a/3 \\ -2a/3 \end{bmatrix}$ $A_2 = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$

furat: $\underline{r}_{S3} = \begin{bmatrix} a/2 \\ a/2 \end{bmatrix}$ $A_3 = R^2\pi$

A "nyomatékok" egyenlősége: ② és ③ kivágás!

$$\underbrace{y_S}_{0\text{, mert } S \equiv O} \cdot (A_1 - A_2 - A_3) = y_{S1} \cdot A_1 - y_{S2} \cdot A_2 - y_{S3} \cdot A_3$$ ⇒ Figyeljünk a ⊖ előjelekre!

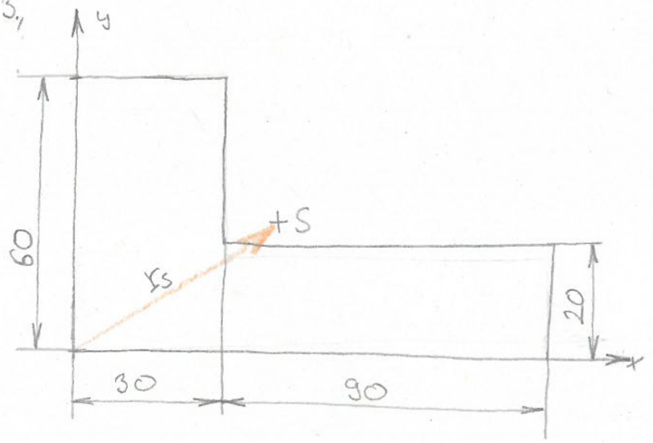
$$0 = \underbrace{0 \cdot 4a^2}_{0} \underbrace{- \left(-\frac{2a}{3}\right) \cdot \frac{a^2}{2}}_{+\frac{a^3}{3}} - \frac{a}{2} \cdot R^2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3}{3} = \frac{a}{2} R^2\pi$$

$$R = \sqrt{\frac{2a^2}{3\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot a = \underline{\underline{0{,}46\, a}}$$

Megj.: De x_S valóban zérus lesz így?

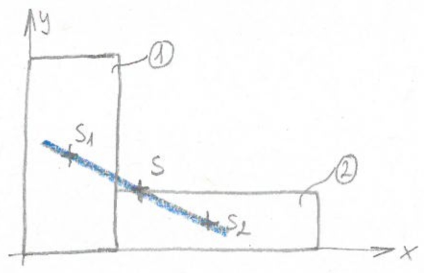
$$x_S = \frac{x_{S1} \cdot A_1 - x_{S2} \cdot A_2 - x_{S3} \cdot A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{0 \cdot 4a^2 - \left(-\frac{2a}{3}\right) \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{2a^2}{3\cancel{\pi}} \cancel{\pi}}{(\ldots)} = \frac{0}{(\ldots)} = 0$$

11.3,



Határozzuk meg a súlypont helyét! $\underline{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix}$

a,



Súlypontok: $\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix}$ $\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} 30+45 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 10 \end{bmatrix}$ Területek: $A_1 = 30 \cdot 60 = 1800$

$A_2 = 90 \cdot 20 = 1800$

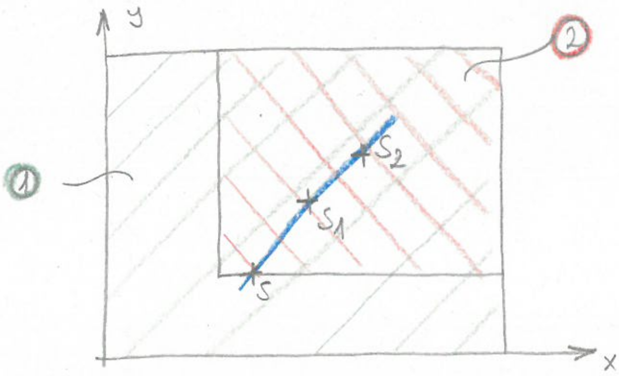
Így:

$$x_S = \frac{x_{S1} \cdot A_1 + x_{S2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{15 \cdot 1800 + 75 \cdot 1800}{1800 + 1800} = 45$$

$$y_S = \frac{y_{S1} \cdot A_1 + y_{S2} \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{30 \cdot 1800 + 10 \cdot 1800}{1800 + 1800} = 20$$

Azaz a súlypont: $\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 45 \\ 20 \end{bmatrix}$

b, Másik megoldás, más felosztással:



A súlypontok:

$$\underline{r}_{S1}=\begin{bmatrix}60\\30\end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{S2}=\begin{bmatrix}30+45\\20+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75\\40\end{bmatrix}$$

A területek:

$$A_1=120\cdot 60=7200$$

$$A_2=90\cdot 40=3600$$

A közös súlypont:

$$x_S=\frac{x_{S1}\cdot A_1-x_{S2}\cdot A_2}{A_1-A_2}=\frac{60\cdot 7200-75\cdot 3600}{7200-3600}=45$$

$$y_S=\frac{y_{S1}\cdot A_1-y_{S2}\cdot A_2}{A_1-A_2}=\frac{30\cdot 7200-40\cdot 3600}{7200-3600}=20$$

Megj.: Két síkidom közös súlypontja:

$$\begin{bmatrix}x_S\\y_S\end{bmatrix}=\left(A_1\cdot\begin{bmatrix}x_{S1}\\y_{S1}\end{bmatrix}\pm A_2\begin{bmatrix}x_{S2}\\y_{S2}\end{bmatrix}\right)\frac{1}{A_1\pm A_2}\quad\Longleftrightarrow\quad \underline{r}_S=\frac{A_1\cdot\underline{r}_{S1}\pm A_2\cdot\underline{r}_{S2}}{A_1\pm A_2}=\frac{(A_1\pm A_2)\underline{r}_{S1}\pm A_2\cdot(\underline{r}_{S2}-\underline{r}_{S1})}{A_1\pm A_2}$$

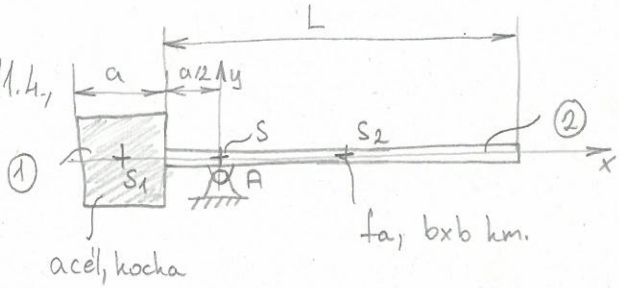
előjel: hozzáadás vagy kivágás?

$$=\underline{r}_{S1}\pm\frac{A_2}{A_1\pm A_2}\left(\underline{r}_{S2}-\underline{r}_{S1}\right)$$

$\Downarrow$

Azaz S_1, S_2 és S egy egyenesen helyezkednek el!

11.4.,



$a=12\,cm$, $\rho_{acél}=7800\,kg/m^3=\rho_1$

$b=40\,mm$, $\rho_{fa}=600\,kg/m^3=\rho_2$

Mekkora legyen L, hogy a sorompó egyensúlyban legyen?

Ami kell: S legyen A fölött

Súlypontok: $x_{S1}=-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=-a$

$x_{S2}=-\frac{a}{2}+\frac{L}{2}=\frac{L-a}{2}$

Tömegek: $m_1=\rho_1\cdot a^3$

$m_2=\rho_2\cdot b^2\cdot L$

A közös súlypontra:

$$\underbrace{\underbrace{x_S}_{0}\cdot(m_1+m_2)}_{0}=x_{S1}\cdot m_1+x_{S2}\cdot m_2\quad\Rightarrow\quad 0=-a\cdot\rho_1 a^3+\frac{L-a}{2}\cdot\rho_2 b^2 L$$

$$0=\frac{\rho_2 b^2}{2}\cdot L^2-\frac{a\rho_2 b^2}{2}\cdot L-\rho_1 a^4$$

$\swarrow$

$L=(\ldots)=1{,}89663\ [m]$

$\uparrow$ egyetlen $\oplus$ gyök van