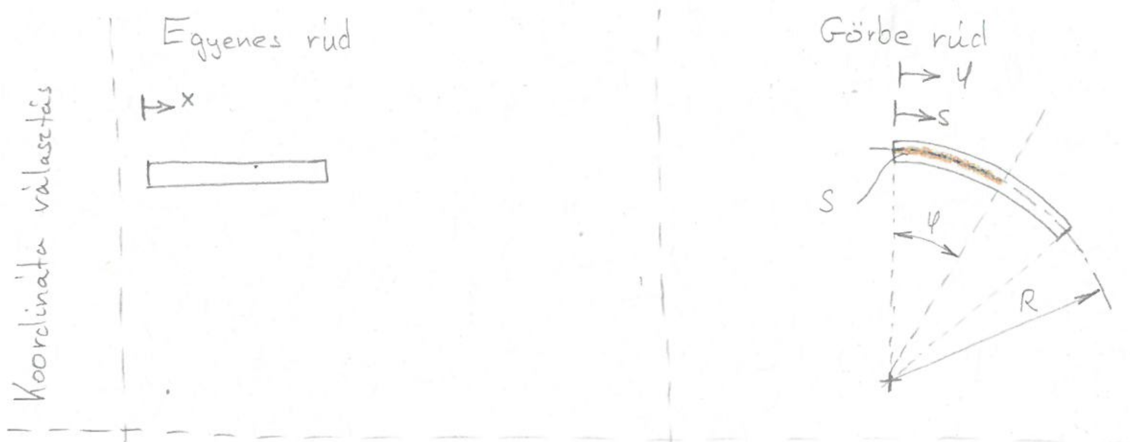
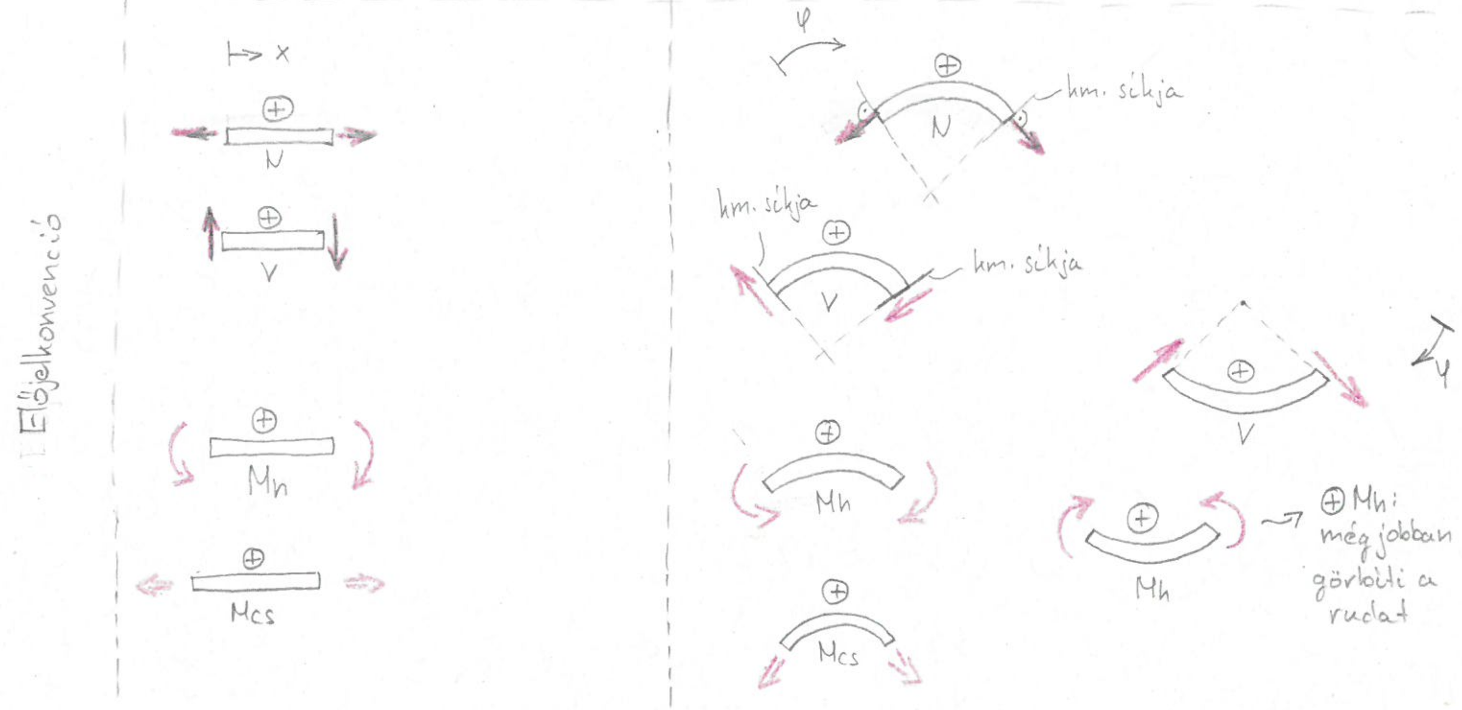
Statika - 10. gyakorlat

Síkgörbe rudak igénybevételei



$$\boxed{s = \underbrace{K}_{2R\pi} \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = 2R\pi \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = R \cdot \varphi}$$

φ me.: [rad]



Megj.: 1., Koordináta választás: - szögkoordináta: φ [rad]

- ívhosszkoordináta: x és s

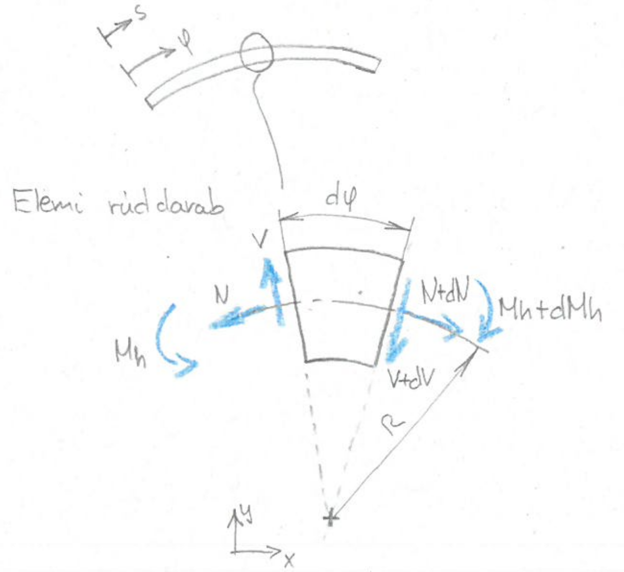
2., Összefüggés az igbv. fv.-ek között:

∘ $\boxed{\frac{dM_h}{ds} = -V}$ ⇐ (3) miatt

↳ Ívhossz koordinátával működik!

∘ De: $s = R \cdot \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{s}{R} \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$

$$V = -\frac{dM_h(\varphi(s))}{ds} = -\frac{dM_h(\varphi)}{d\varphi} \cdot \underbrace{\frac{d\varphi(s)}{ds}}_{1/R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dM_h}{d\varphi}$$



⇒ Egyensúlyi egyenletek: $\sum F_x = 0$ (1)

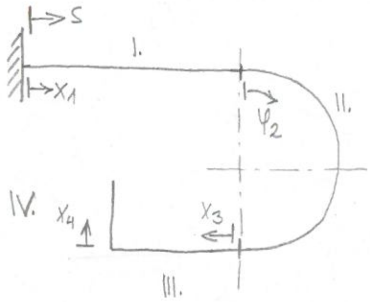
$\sum F_y = 0$ (2)

$\sum M_z = 0$ (3)

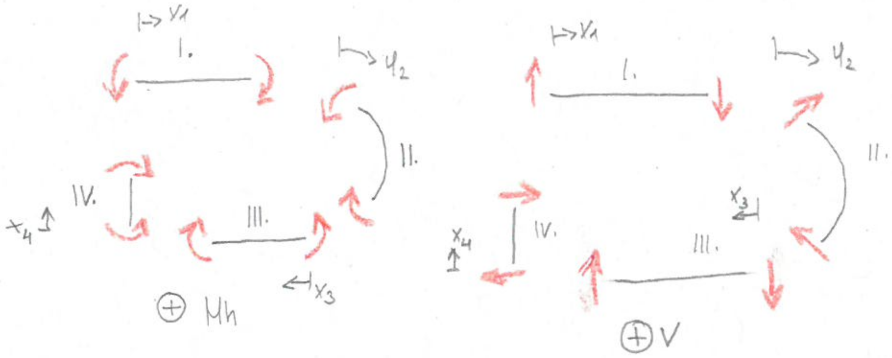
∘ Ha φ iránya ellentétes: φ

$$\frac{dM_h}{ds} = +V$$

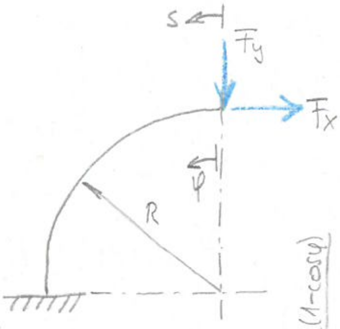
Rúdszerkezetek igénybevétele:



Az előjelkonvenció fordul a koordinátával:

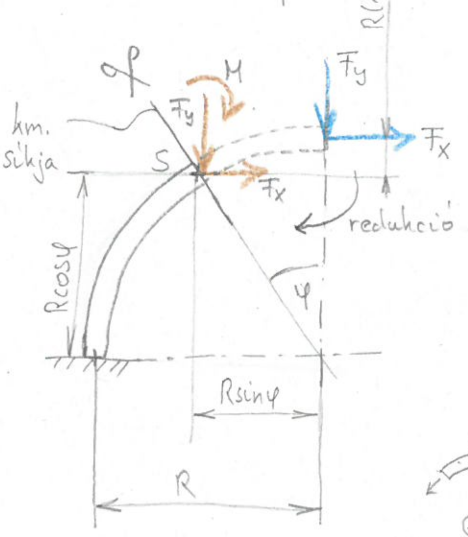


10.1.



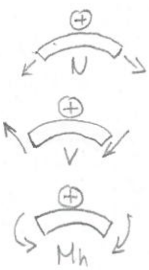
Írjuk fel az igbv.-fv.-eket!

Megj.: jobbról írva fel az igbv.-ket nem kellenek a reakciók!



Erők felbontása a km.-re merőleges és azzal párhuzamos erőkre:

Az igbv.-i fv.-ek: $0 \le \varphi \le \pi/2$



$$N(\varphi) = -N_{F_y} + N_{F_x} = -F_y \cdot \sin\varphi + F_x \cdot \cos\varphi$$

$$V(\varphi) = V_{F_y} + V_{F_x} = F_y \cdot \cos\varphi + F_x \cdot \sin\varphi$$

$$Mh(\varphi) = F_y \cdot R \cdot \sin\varphi + F_x \cdot R(1-\cos\varphi)$$

Ellenőrzés:

- $\dfrac{dMh}{ds} = \dfrac{dMh}{d\varphi} \cdot \underbrace{\dfrac{d\varphi}{ds}}_{1/R} = \left(F_y \cdot R \cdot \cos\varphi + F_x \cdot R \cdot \sin\varphi\right) \cdot \dfrac{1}{R} = F_y \cdot \cos\varphi + F_x \cdot \sin\varphi$

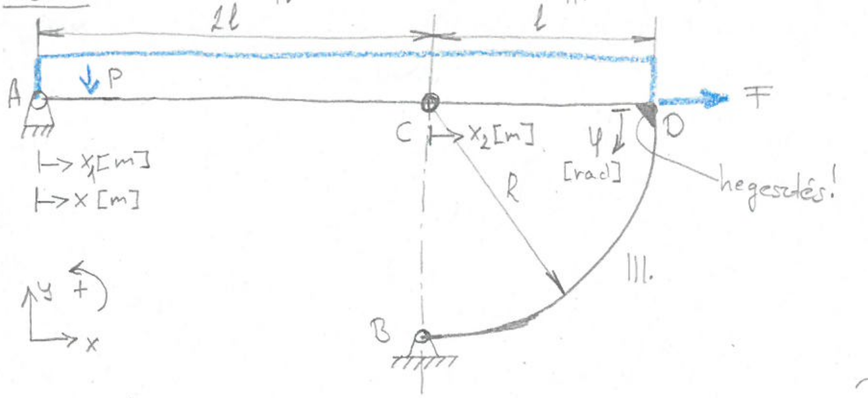
Most: $\dfrac{dMh}{ds} = V$, mert φ iránya:

- megj.: $\dfrac{dN}{d\varphi} = -F_y \cdot \cos\varphi - F_x \cdot \sin\varphi = -V$

$\dfrac{dV}{d\varphi} = -F_y \cdot \sin\varphi + F_x \cdot \cos\varphi = N$

(előjel oka: φ iránya)

10.2.



$l = R = 1$ [m]

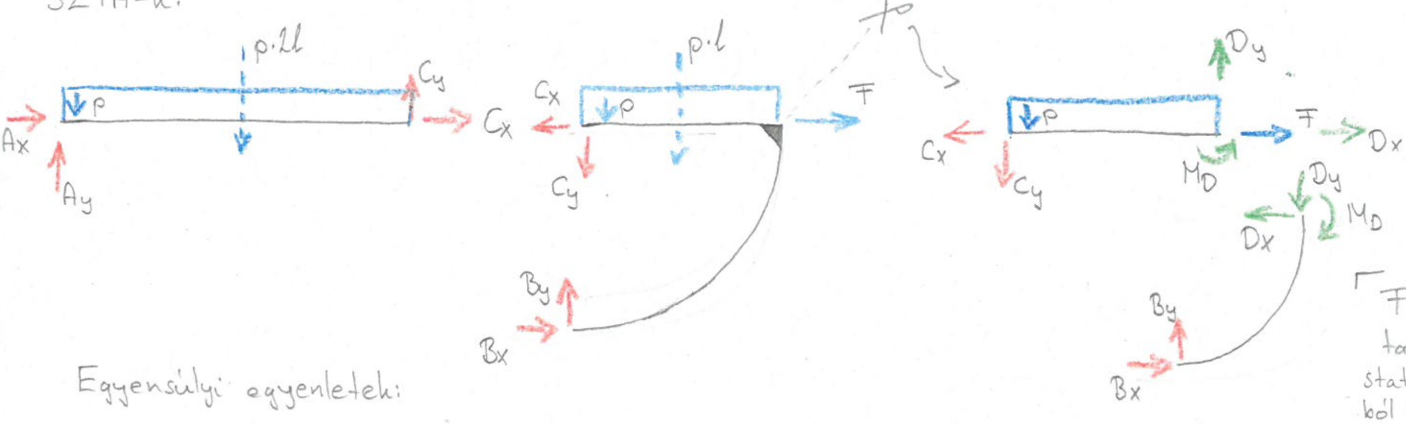
$p = 2$ [kN/m]

$F = 2$ [kN]

Határozzuk meg a tartó igénybevételi ábráit!

SZTA'-k:

Szétbontás a hegesztésnél (~befogás): 2erő és 1 nyomaték (síkban)



F hova tartozik? statikai szempontból mindegy

Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0: \quad A_x + C_x = 0$ (1) $\qquad \sum F_x = 0: \quad -C_x + B_x + F = 0$ (4)

$\sum F_y = 0: \quad A_y - p \cdot 2l + C_y = 0$ (2) $\qquad \sum F_y = 0: \quad -C_y + B_y - p \cdot l = 0$ (5)

$\sum M_c = 0: \quad -A_y \cdot 2l + p \cdot 2l \cdot l = 0$ (3) $\qquad \sum M_c = 0: \quad B_x \cdot l - p \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$ (6)

A reakciók:

(6): $B_x = \frac{pl}{2} = 1$ [kN]

(4): $C_x = B_x + F = 3$ [kN]

(1): $A_x = -C_x = -3$ [kN]

(3): $A_y = p \cdot l = 2$ [kN]

(2): $C_y = p \cdot 2l - A_y = 2$ [kN]

(5): $B_y = C_y + pl = 4$ [kN]

$\Rightarrow \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ [kN] $\quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ [kN] $\quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ [kN]

Az igénybevételi függvények:

I. szakasz: $0 < x_1 < 2l$ megj.: $x = x_1$ $\qquad \boxed{x = x_1\,!}$

$N(x_1) = -A_{x_1} = 3$ [kN]

$V(x_1) = A_y - p \cdot x_1 = 2 - 2x_1$ [kN]

$Mh(x_1) = -A_y \cdot x_1 + p x_1^2/2 = -2x_1 + x_1^2$ [kNm

ell.: $\frac{dMh}{dx_1} = -A_y + p x_1 = -V$ $\Rightarrow$ ez jónak tűnik

II. szakasz: $0 < x_2 < l$ vagy $2l < x < 3l$

$N(x_2) = C_x = 3$ [kN]

$V(x_2) = -C_y - p x_2 = -2 - 2x_2$ [kN]

$M_h(x_2) = +C_y \cdot x_2 + p \frac{x_2^2}{2} = 2x_2 + x_2^2$ [kNm]

vagy

$N(x) = C_x \overset{(1) \text{ miatt}}{=} -A_x = 3$ [kN]

$V(x) = -C_y - p \cdot (x - 2l) \underset{(2) \text{ miatt}}{=} A_y - p \cdot 2l - p \cdot (x - 2l) = A_y - px$

$= 2 - 2x$ [kN]

$Mh(x) = -C_y - p \cdot \frac{(x-2l)^2}{2} \underset{\sum M_{p_x} = 0 \text{ miatt AC rúdra}}{=} \dots = -A_y \cdot x + \frac{px^2}{2} = -2x + x^2$ [kNm]

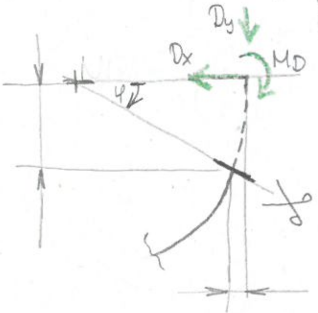
II. szakasz:

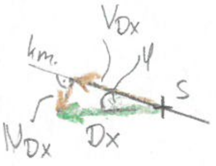
ellenőrzés: koord. transzformáció: $x_2 = x - 2l \Rightarrow x = x_2 + 2l = x_2 + 2$ [m]

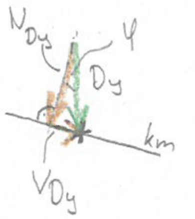
$$M_h(x) = -2x + x^2 \text{ [kNm]}$$

$$M_h(x_2) = -2(x_2+2) + (x_2+2)^2 = +2x_2 + x_2^2 \text{ [kNm]}$$ ⇝ és valóban!

III. szakasz: $0 < \varphi < \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{90^\circ}$







De mi D_x, D_y, M_D? *

⇓

A II. szakasz igbv.-i alapján:

$N(x)|_{x=3l} = D_x + F \Rightarrow D_x = 1$ [kN]

$V(x)|_{x=3l} = -D_y \Rightarrow D_y = 4$ [kN]

$M_h(x)|_{x=3l} = -M_D \Rightarrow M_D = -3$ [kNm]

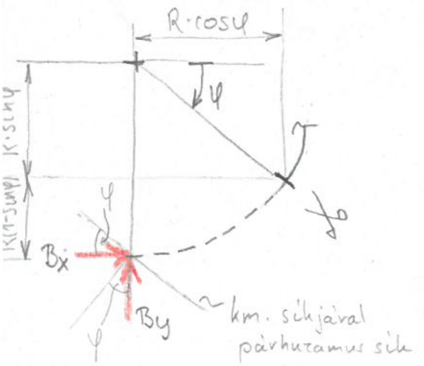
Ezekkel: $N(\varphi) = \overbrace{-D_x \cdot \sin\varphi}^{N_{Dx}} \overbrace{- D_y \cdot \cos\varphi}^{N_{Dy}} = -\sin\varphi - 4\cos\varphi$ [kN]

$V(\varphi) = \underbrace{-D_x \cdot \cos\varphi}_{V_{Dx}} + \underbrace{D_y \cdot \sin\varphi}_{V_{Dy}} = -\cos\varphi + 4\sin\varphi$ [kN]

$$M_h(\varphi) = -M_D + D_x \cdot R \cdot \sin\varphi - D_y \cdot R(1-\cos\varphi) = 3 + \sin\varphi - 4(1-\cos\varphi) = -1 + \sin\varphi + 4\cos\varphi \text{ [kNm]}$$

ell: $\frac{dM_h}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dM_h}{d\varphi} = \frac{1}{1} \cdot (\cos\varphi - 4\sin\varphi) = -V(\varphi)$ ⇝ jó!

VAGY:



$N(\varphi) = -B_x \cdot \sin\varphi - B_y \cdot \cos\varphi = -\sin\varphi - 4\cos\varphi$ [kN]

$V(\varphi) = -B_x \cdot \cos\varphi + B_y \cdot \sin\varphi = -\cos\varphi + 4 \cdot \sin\varphi$ [kN]

$M_h(\varphi) = -B_x \cdot R(1-\sin\varphi) + B_y \cdot R \cdot \cos\varphi =$

$= -1 + \sin\varphi + 4\cos\varphi$ [kNm]

megj.: De mi D_x, D_y, M_D? *

Egyensúlyi egyenletek csak a görbe rúdra:

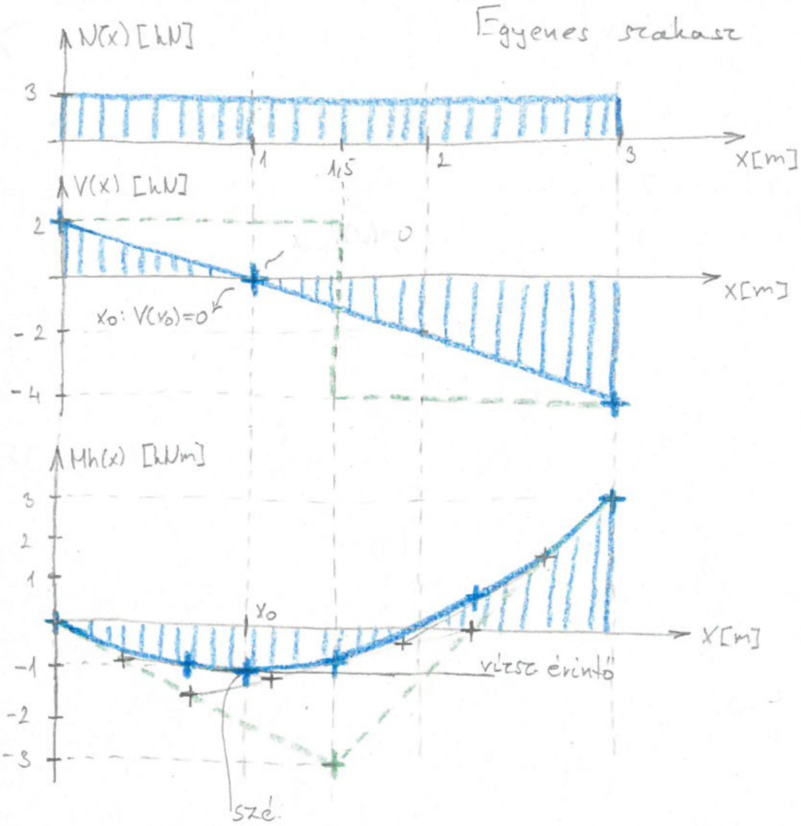
$\Sigma F_x = 0$: $B_x - D_x = 0 \Rightarrow D_x = B_x = 1$ [kN]

$\Sigma F_y = 0$: $B_y - D_y = 0 \Rightarrow D_y = B_y = 4$ [kN]

$\Sigma M_D = 0$: $-M_D + B_x \cdot R - B_y \cdot R = 0 \Rightarrow M_D = R(B_x - B_y) = -3$ [kNm]

Igénybevételi ábrák: I. és II. szakaszt egyben ábrázolhatjuk

Egyenes szakasz



Ábrázoláshoz: I. és II.

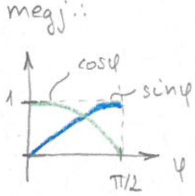
- $V(0) = A_y = 2$ [kN]
  $V(3l) = A_y - p\cdot 3l = -4$ [kN]
- $Mh(0) = 0$ [kNm]
  $Mh(3l) = \ldots = 3$ [kNm]
  - esetleg: $Mh(x)$ szélsőértéke:
    $Mh'(x_0)=0 \Leftrightarrow -V(x_0)=0$
    $A_y - p x_0 = 0$
    $x_0 = \frac{A_y}{p} = 1$ [m]
    $Mh(x_0) = -1$ [kNm]
  - ha p-t helyettesítjük egy koncentrált erővel
    $Mh^*\left(\frac{3l}{2}\right) = -A_y\cdot\frac{3l}{2} = -3 \Rightarrow +$

— o —

Ábrázoláshoz: III.

- $N(0) = -4$ [kN]
  $N(\pi/2) = -1$ [kN]
- $V(0) = -1$ [kN]
  $V(\pi/2) = 4$ [kN]

megj.:



$V(\varphi)$ zh.:

$V(\varphi)=0 \Rightarrow 0 = -\cos\varphi_0 + 4\sin\varphi_0$

$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{4}$

$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = 0{,}25$ [rad] $= 14°$

megj.: $\frac{dN}{d\varphi} = V \Rightarrow \varphi_0$ $N(\varphi)$ szé. helye

$V(\varphi_0) = 4{,}12$ [kN]

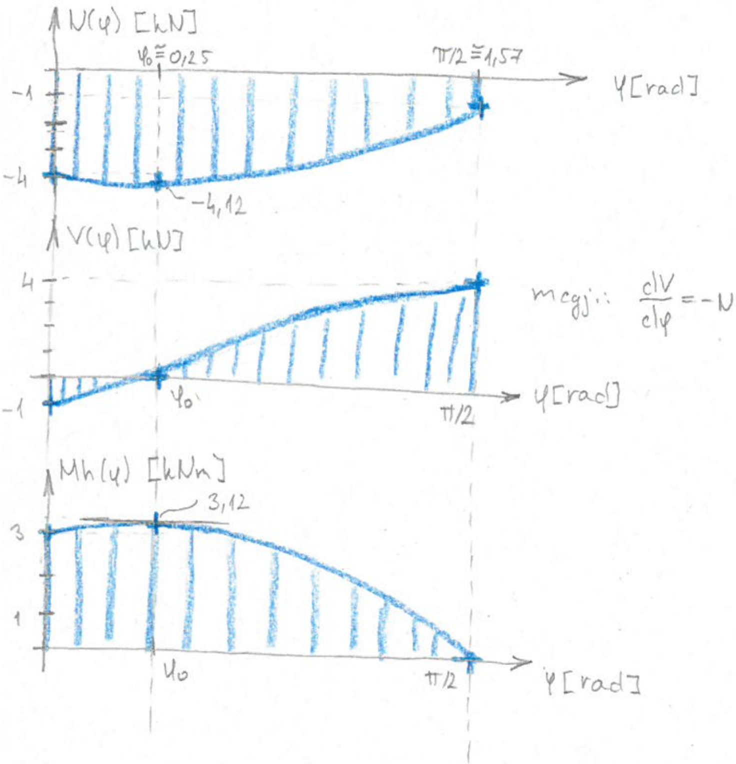
- $Mh(0) = 3$ [kNm]
  $Mh(\pi/2) = 0$ [kNm]

$Mh(\varphi)$ szé.-e:

$\frac{dMh}{ds} = 0 \Leftrightarrow V(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi_0 = \ldots$

$Mh(\varphi_0) = 3{,}12$ [kNm]

Görbe szakasz



Vagy egy másik ábrázolásimód: