Matek A1 / 8. gyakorlat: Teljes függvényvizsgálat

1. Adott a $3x^2y^2 + \frac{24x}{y} = 0$ implicit alakban megadott $y(x)$ függvény.
   a) Ábrázoljuk a függvényt! Illeszkedik-e a $P_1(-1, 1)$ és a $P_2(8, -1)$ pont a függvény grafikonjára?
   b) Fejezzük ki az $y'(x)$ függvényt!
   c) Írjuk fel a függvény $x_0 = -1$ ponthoz tartozó érintőjét!
2. Adott a $x - \frac{1}{\pi}y + sin(x - y) = -1$ implicit alakban megadott $y(x)$ függvény.
   a) Illeszkedik-e a $P_1(0, \pi)$ és a $P_2(0, \pi/2)$ pont a függvény grafikonjára?
   b) Fejezzük ki az $y'(x)$ függvényt!
   c) Írjuk fel a függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjét!
3. Írjuk fel a paraméteres alakban adott függvények adott pontbeli érintőjét!
   a) $x(t) = t\cos(t),\ y(t) = t\sin(t)$
      $t_0 = 0$ és $t_1 = \pi/2$ pontokban
   b) $x(t) = (2 + \cos(5t))\cos(t),\ y(t) = (2 + \cos(5t))\sin(t)$
      $t_0 = 0$ pontban
4. Melyik az $\sqrt[n]{n}$ számok közül a legnagyobb (n pozitív egész szám)?
5. Egy 1 dm sugarú körlapból kúppalástot készítünk. Mekkora középponti szögű körcikket kell kivágnunk, hogy a kúp térfogata a lehető legnagyobb legyen?
6. Mekkora annak a hengernek a sugara, amelyik elfér egy 3 méter sugarú gömbben, és a térfogata a lehető legnagyobb?
7. Hogyan kell két pozitív számot megválasztani, ha azt szeretnénk, hogy köbeik összege maximális legyen, az összegük pedig 10?
8. Józsi bácsi ládikát készít. A nemes célra egy acéllemez áll rendelkezésre, amely 1x2 méter méretű. Mekkora méretei legyenek a ládikának, ha a lehető legtöbb dolgot szeretné Józsi bácsi a a ládikában elhelyezni? Mekkora méretei legyenek a ládikának, ha további követelmény, hogy egy 0,6x0,6 méter méretű tájképet is szeretne Józsi bácsi a ládikában elhelyezni szállítás céljából?

8. gyak.:

2/e.

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x+1}=\frac{(x-3)(x-2)}{x+1}$$

Próbáljuk szorzattá alakítani $\xleftarrow{ok}$
- zérushelyeket keresünk a deriváltaknál
- lehet, hogy egyszerűsíthető a tört (bár most pont nem)

$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

$x^2-5x+6=0$

$x_1=2,\ x_2=3$

1., $D_f=\{x\in\mathbb{R},\ x\neq -1\}$

$x+1\neq 0 \rightarrow$ 0-val nem tudunk osztani

2., Zh: $f(x)=0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$

a számláló lehet csak 0

$x_1=2 \quad x_2=3$

3., Paritás:

$$f(-x)=\frac{(-x-3)(-x-2)}{-x+1}=-\frac{(x+3)(x+2)}{x-1}\neq \pm f(x)$$

nem páros, nem páratlan

4., Nem periodikus

5.-6.,

$$f'(x)=\frac{((x-3)(x-2))'\cdot(x+1)-(x-3)(x-2)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(1\cdot(x-2)+1\cdot(x-3))\cdot(x+1)-(x-3)(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{(2x-5)(x+1)-(x-3)(x-2)}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-3x-5-x^2+5x-6}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-11}{(x+1)^2}=0$$

, mert $f'(x)=0$ érdekel

$x^2+2x-11=0$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+44}}{2}=-1\pm\sqrt{\frac{48}{4}}=-1\pm\sqrt{3\cdot 2^2}=-1\pm 2\underbrace{\sqrt{3}}_{\approx 1{,}71}$$

$\approx -4{,}4$

$\approx 2{,}4$

x	$]-\infty,-1-2\sqrt{3}[$	$-1-2\sqrt{3}$	$]-1-2\sqrt{3},-1[$	-1	$]-1,-1+2\sqrt{3}[$	$-1+2\sqrt{3}$	$]-1+2\sqrt{3},+\infty[$
$f'(x)$	$\frac{+}{+}=+$	0	$\frac{-}{+}=-$	$\nexists$	$\frac{-}{+}=-$	0	$\frac{+}{+}=+$
$f(x)$	↗ szig. mon. nő	lok. max.	↘ szig. mon. cs.	$\nexists$	↘ szig. mon. nő	lok. min.	↘ szig. mon. csökk.

$f(-1-2\sqrt{3})=(\dots)=-7-4\sqrt{3}$

$f(-1+2\sqrt{3})=(\dots)=-7+4\sqrt{3}$

7.-8.,

$$f''(x)=\frac{(x^2+2x-11)'\cdot(x+1)^2-(x^2+2x-11)\cdot((x+1)^2)'}{(x+1)^4}=$$ ↗ érdemes szorzat alakban hagyni

⇓

később tudunk egyszerűsíteni

$$=\frac{(2x+2)\cdot(x+1)^2-(x^2+2x-11)\,2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=$$

$$=2\cdot\frac{\cancel{(x+1)}(x+1)^2-(x^2+2x-11)\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}3}}=2\cdot\frac{x^2+2x+1-x^2-2x+11}{(x+1)^3}=$$

$$=2\cdot\frac{12}{(x+1)^3}=\frac{24}{(x+1)^3}=0$$, mert $f''(x)=0$

Most ennek nincs megoldása

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,+\infty[$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	konkáv	$\nexists$	konvex

9., Határértékek:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ⇐ $\pm\infty$-ben
- $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2-5x+6}{x+1}="\frac{1-5+6}{-1^-+1}=\frac{2}{0^-}"=-\infty$ ⇐ szakadási helyeken

  $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2-5x+6}{x+1}="\frac{2}{-1^++1}=\frac{2}{0^+}"=+\infty$

10., Aszimptoták: <u>Ferde</u>:

- $+\infty$-ben: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{x+1}\cdot\frac{1}{x}=1$

  $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6}{x+1}-\frac{(x+1)\cdot x}{x+1}=$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6-x^2-x}{x+1}=-6$

- $-\infty$-ben: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

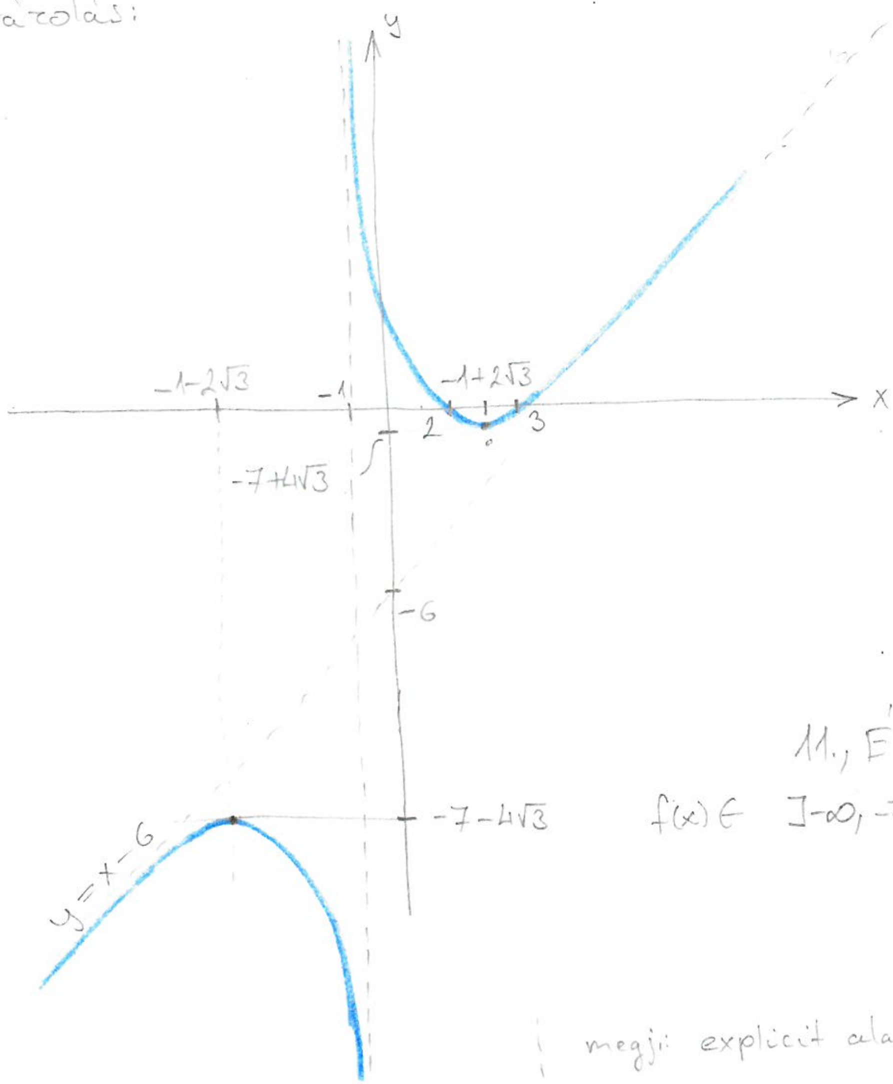
  $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=(\ldots)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-6x-6}{x+1}=-6$

Azaz $+\infty$-ben és $-\infty$-ben is ugyanaz az aszimptota:

$y=mx+b=x-6$

<u>Függőleges</u>: $x=-1$

12., Ábrázolás:



11., Értékkészlet:

$f(x) \in \left]-\infty, -7-4\sqrt{3}\right] \cup \left[-7+4\sqrt{3}, +\infty\right[$

megj.: explicit alak: $y(x) = \underbrace{2x + \ln x^2 \cdot e^x + 1}_{\text{csak } x \text{ van benne, } y \text{ nincs}}$

9. gyak/1., $3x^2y^2 + \frac{24x}{y} = 0$ $y(x)$: implicit alakban megadva

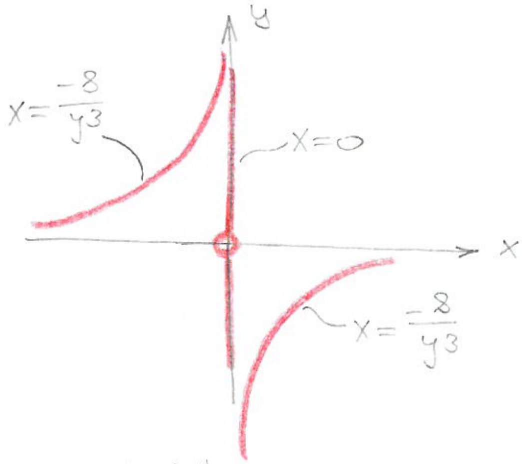
a, Ábrázolás (nem mindig működik így): $y \neq 0$

$$3x^2y^2 + \frac{24x}{y} = 0$$

$$3x\left(xy^2 + \frac{8}{y}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ vagy } xy^2 + \frac{8}{y} = 0$$

$$x = \frac{-8}{y^3}$$

$$y = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}} = -2 \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$



„Annyira azért nem is függvény"

$P_1 = (-1, 1)$: $3 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 + \frac{24 \cdot (-1)}{1} \neq 0 \Rightarrow$ nem illeszkedik

$P_2 = (8, -1)$: $3 \cdot 8^2 \cdot (-1)^2 + \frac{24 \cdot 8}{-1} = 0 \Rightarrow$ igaz, illeszkedik a görbére b, I. $3x^2y^2 + \dfrac{24x}{y} = 0 \quad / \cdot y \quad$ / Tudjuk, hogy $y \neq 0$

$3x^2y^3 + 24x = 0 \quad / \dfrac{d}{dx} \quad \Rightarrow$ megj: $\dfrac{dy}{dx} = y'$

$(3x^2)' \cdot y^3 + 3x^2 \cdot (y^3)' + (24x)' = 0$

$6x \cdot y^3 + 3x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2xy^3 + 3x^2y^2 \cdot y' + 8 = 0$

II. y' kifejezése: $\quad y' = -\dfrac{8 + 2xy^3}{3x^2y^2}$

III. Ha lehet egyszerűsítés: $\quad$ most: $3x^2 \cdot y^2 = -\dfrac{24x}{y}$

$$y' = -\frac{8 + 2xy^3}{-\frac{24x}{y}} = \frac{4 + xy^3}{\frac{12x}{y}} = \frac{4y + xy^4}{12x}$$

c, $x_0 = -1$

Függvényérték: $3 \cdot (-1)^2 \cdot y^2 + \dfrac{24 \cdot (-1)}{y} = 0 \quad / \cdot y, \quad y \neq 0$

$3y^3 - 24 = 0$

$y^3 = 2 \Rightarrow y_0 = 2$

$$y'(-1) \underset{x_0, y_0}{\overset{}{=}} \frac{4 \cdot 2 + (-1) \cdot 2^4}{12 \cdot (-1)} = \frac{8 - 16}{-12} = \frac{8}{12} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Érintő:

$y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = 2 + \frac{2}{3} \cdot (x - (-1)) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

megj: $y' = \left(-2 \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)' = \left(+2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \underset{x_0 = -1}{=} \frac{2}{3}$

2, $x - \frac{1}{\pi}y + \sin(x - y) = -1$

a, $P_1(0, \pi)$: $\quad 0 - \frac{1}{\pi} \cdot \pi + \overbrace{\sin(0 - \pi)}^{0} = -1$ ✓ $\quad$ illeszkedik a görbére

$P_2(0, \frac{\pi}{2})$: $\quad 0 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin(0 - \frac{\pi}{2})}_{-1} \neq -1 \quad$ nem illeszkedik

b,

$x - \frac{1}{\pi}y + \sin(x - y) = -1 \quad / \frac{d}{dx}(\ldots)$

$1 - \frac{1}{\pi}y' + \cos(x - y) \cdot (1 - y') = 0$

$(1 + \cos(x - y)) + y'\left(-\frac{1}{\pi} - \cos(x - y)\right) = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{1 + \cos(x - y)}{\frac{1}{\pi} + \cos(x - y)}$

c, P_1: $x_0 = 0$, $y_0 = \pi$

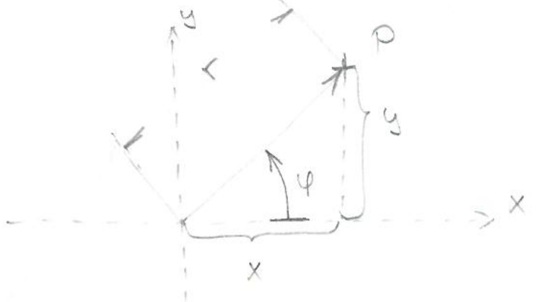
$$y' \underset{x_0, y_0}{=} \frac{1 + \cos(0 - \pi)}{\frac{1}{\pi} + \cos(0 - \pi)} = \frac{1 + (-1)}{\frac{1}{\pi} + (-1)} = 0$$

Érintő: $\quad y \underset{y' = 0}{=} y_0 = \pi$

5., Polár koordináták:

r és φ

$\uparrow$ sugár, $\uparrow$ szög



$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

a, Spirál:

$r = t$

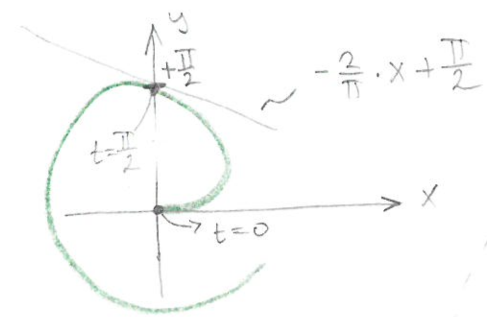
$\varphi = t$

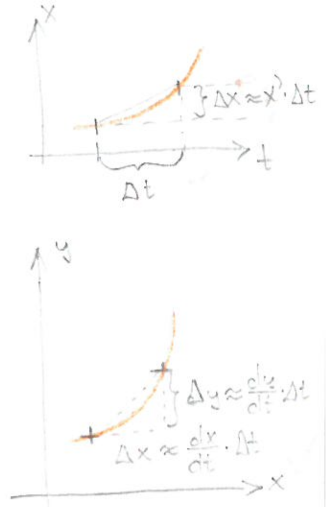
$\Downarrow$

$x(t) = t \cdot \cos t$

$y(t) = t \cdot \sin t$

$t \in [0, +\infty[$





Érintő meredeksége:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t}{1 \cdot \cos t - t \cdot \sin t}$$

- $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{\overbrace{\sin 0}^{0} + \overbrace{0 \cdot \cos 0}^{0}}{\underbrace{\cos 0}_{1} - \underbrace{0 \cdot \sin 0}_{0}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = (0,0)$$

- $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\pi/2) - \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\pi/2)}{\cos(\frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \cdot 1} = \frac{-2}{\pi} \approx \frac{-2}{3}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$P_{\frac{\pi}{2}} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

érintő: $y = mx + b = -\frac{2}{\pi} \cdot x + \frac{\pi}{2}$

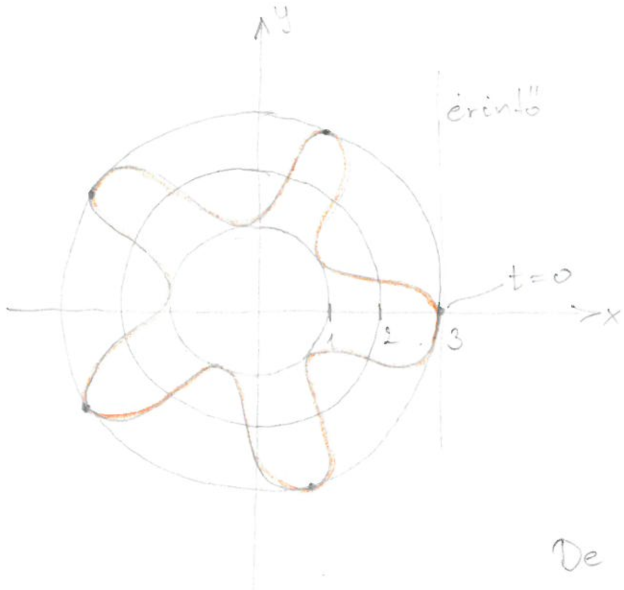
b, Virág:

$r = 2+\cos(5\varphi)$

$\varphi = t$

$\Rightarrow x(t) = (2+\cos(5t))\cdot\cos t$

$y(t) = (2+\cos(5t))\cdot\sin t$



$x'(t) = -5\cdot\sin(5t)\cdot\cos t - (2+\cos(5t))\cdot\sin t$

$y'(t) = -5\sin(5t)\cdot\sin t + (2+\cos(5t))\cdot\cos t$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{y'(0)}{x'(0)} =$$

$$= \frac{-5\cdot\sin(0)\cdot\sin(0)+(2+\cos(0))\cdot\cos(0)}{-5\cdot\sin(0)\cdot\cos(0)-(2+\cos(0))\cdot\sin(0)} =$$

$$= \frac{(2+1)\cdot 1}{0} = \frac{3}{0} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \nexists$$

De $\frac{dx}{dy} = 0$ létezik!

Ok: függőleges az érintő

4, $\sqrt[n]{n} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ függvényt vizsgáljuk

· D_f: $x>0 \Rightarrow$ alap   megj: $a^b \Rightarrow a>0$, $b\in\mathbb{R}$

$x\neq 0 \Rightarrow$ kitevő

$x>0$

· Szélsőérték keresése:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(-\ln x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = +1 \Rightarrow x = e$$

$x = e$ lehet szélsőérték

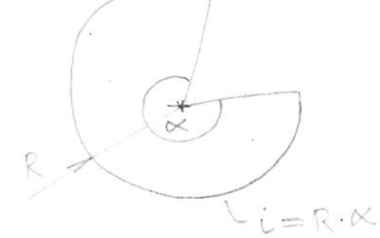
X	$]0,e[$	e	$]e,+\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	lok. max	↘

De: $n\in\mathbb{N}^+ \Rightarrow$ 2 vagy 3 a szélsőérték

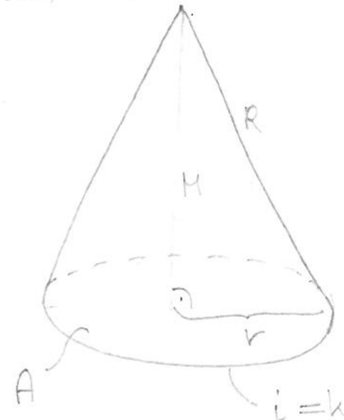
$\sqrt[2]{2}\approx 1{,}41$ $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}71$

$\sqrt[3]{3}$ a legnagyobb ilyen szám.

5, α: radiánban , $\alpha \in \left]0, 2\pi\right[$



$\Rightarrow$



$A = r^2\pi$

$M = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$

Cél: V-ben legyen R és α

$i = k = 2r\pi \Rightarrow R \cdot \alpha = r \cdot 2\pi$

$r = R \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$

A térfogat:

$$V(\alpha) = \frac{A \cdot M}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R^2 \cdot \alpha^2}{4\pi^2} \cdot \pi \cdot \frac{R}{2\pi} \cdot \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} \overset{*}{=}$$

$$A = r^2\pi = R^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \cdot \pi$$

$$\overset{*}{=} \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

Szélső érték keresése:

$V'(\alpha) = 0$

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \left(2\alpha \cdot (4\pi^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2}(4\pi^2 - \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2\alpha)\right) =$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha \, \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \left(2 \cdot (4\pi^2 - \alpha^2) - \alpha^2\right) =$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \alpha \, \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} \cdot \left(8\pi^2 - 3\alpha^2\right) = 0$$

$\alpha = 0$

$8\pi^2 - 3\alpha^2 = 0$

$8\pi^2 = 3\alpha^2$

$\alpha = \sqrt{\frac{8}{3}}\,\pi$

Mivel $\alpha \in \left]0, 2\pi\right[$, így csak $+\sqrt{2}\,\pi$ számít.

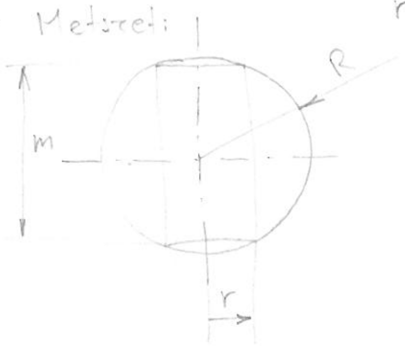
α	$\left]0, \sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right[$	$\sqrt{\frac{8}{3}}\pi$	$\left]\sqrt{\frac{8}{3}}\pi, 2\pi\right[$
$V'(\alpha)$	$\oplus$	0	$\ominus$
$V(\alpha)$	↗	lok. max.	↘

$$V\left(\sqrt{\tfrac{8}{3}}\pi\right) = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{\tfrac{8}{3}}\pi\right)^2}_{\frac{8}{3}\pi^2} \cdot \sqrt{\underbrace{4\pi^2 - \left(\sqrt{\tfrac{8}{3}}\pi\right)^2}_{\underbrace{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2}_{\frac{4}{3}\pi^2}}} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{8\pi^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2}{3}} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \frac{R^3}{9} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}\,\pi \approx 0{,}403 \text{ dm}^3$$

R = 1 dm

6, Metszet: $\quad r \in [0, R]$



$V = r^2\pi \cdot m$

$V(r) = ? \quad \Rightarrow \quad V'(r) = 0 \quad \Rightarrow$ optimális r érték, hogy V max.

$\left(\frac{m}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow m = 2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$

Így: $V(r) = 2\pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$

$V'(r) = 2\pi \cdot \left(2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2} + r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot (-2r)\right) =$

$= 2\pi \cdot 2r \cdot \left(\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{R^2 - r^2}}\right) = 2\pi \cdot 2r \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}\left(R^2 - \frac{3r^2}{2}\right)$

$V'(r) = 0$:

I. $r = 0$ $\qquad$ II. $R^2 - \frac{3r^2}{2} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{2R^2}{3}$

$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$

Kérdés: valóban szé.?

r	0	$\left]0, \sqrt{\frac{2}{3}}R\right[$	$\sqrt{\frac{2}{3}}R$	$\left]\sqrt{\frac{2}{3}}R, R\right[$	R
$V'(r)$	0	$\oplus$	0	$\ominus$	$\nexists$
$V(r)$	0	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	0

$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = 12\sqrt{3} \cdot \pi$

$\uparrow$
$R = 3$

$R = 3$ eset: $\nearrow$ $r \in]0, 3[$

$m = 2 \cdot \sqrt{9 - r^2}$

$V(r) = 2\pi r^2 \cdot \sqrt{9 - r^2}$

$V'(r) = 2\pi\left(2r \cdot \sqrt{9 - r^2} + r^2 \frac{1}{2\sqrt{9 - r^2}} \cdot (-2r)\right) =$

$= 4\pi r\left(\sqrt{9 - r^2} - \frac{r^2}{2\sqrt{9 - r^2}}\right)$

$= \frac{4\pi r}{\sqrt{9 - r^2}}\left(9 - r^2 - \frac{r^2}{2}\right) =$

$= \frac{4\pi r}{\sqrt{9 - r^2}}\left(9 - \frac{3r^2}{2}\right)$

$V'(r) = 0$

$\Downarrow$

$r = 0 \qquad 9 - \frac{3r^2}{2} = 0$

$3 \cdot 2 = r^2$

$r = \sqrt{6}$

$V''(r) =$ konyolult

$\Downarrow$

inkább táblázat

$V(\sqrt{6}) =$

$= 2\pi \cdot 6 \cdot \sqrt{9 - 6} =$

$= 12\sqrt{3}\,\pi$

8, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a^3 + b^3$ minimális, ha $a + b = 10$? $\hookrightarrow b = 10 - a$

$f(a) = a^3 + b^3 = a^3 + (10 - a)^3$

Szé.: $f'(a) = 3a^2 + 3(10 - a)^2 \cdot (-1)$

$f''(a) = 6a + 6 \cdot (10 - a)$

$f'(a) = 0 \Rightarrow a^2 - (10 - a)^2 = 0 \qquad /a > 0$

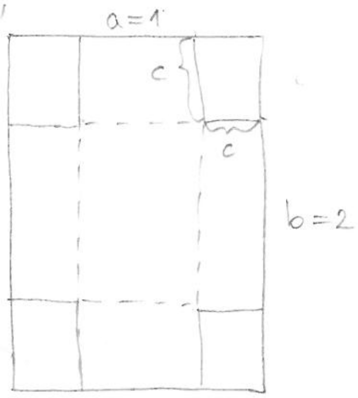
$a = 10 - a$

$a = 5$

$f''(5) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot (10 - 5) = 60 > 0 \Rightarrow$ valóban minimum

Azaz $a = 5$, $b = 5$.

a, a,



V maximális? $\quad c \in \,]0; 0{,}5[$

$$V(c) = c\cdot(b-2c)(a-2c) = 4c^3 - (2a+2b)c^2 + abc$$

$$V(c) = 4c^3 - 6c^2 + 2c$$

$$V'(c) = 12c^2 - 12c + 2$$

$$V'(c) = 0 \qquad 6c^2 - 6c + 1 = 0$$

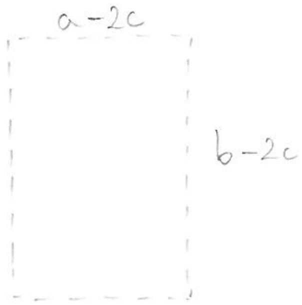
$$c = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \begin{cases} \approx 0{,}79 \rightarrow \text{nincs az ért. tart.-ban} \\ \approx 0{,}21 \end{cases}$$

$$V''(c) = 24c - 12 = 12(2c-1)$$

$$\downarrow$$

$$V''(0{,}21) = 12(2\cdot 0{,}21 - 1) < 0 \Rightarrow c = 0{,}21 \text{ max. hely}$$

b,



$$\left.\begin{aligned} 1-2c \geq 0{,}6 &\Rightarrow c \leq 0{,}2 \\ 2-2c \geq 0{,}6 &\Rightarrow c \leq 0{,}7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c \in \,]0; 0{,}2]$$

c	$]0; 0{,}2]$
$V'(c)$	+
$V(c)$	↗

Maximum hely: intervallum végpontja: $c = 0{,}2$