Matek A1 / 8. gyakorlat: Teljes függvényvizsgálat

1. Adjuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+5}$ függvény aszimptotáit!

2. Vizsgáljuk meg a függvényeket!

   a) $3x^3 + 3x^2 - 18x$
   b) $3\cos(\dfrac{x-\pi}{2}) + 1$
   c) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4}$
   d) $\dfrac{x}{x^2-1}$
   e) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x+1}$
   f) $\dfrac{e^x}{x}$
   g) $x^2 \cdot \ln(x^2)$

7. gyak. / 6. e) Értelmezési tartomány?

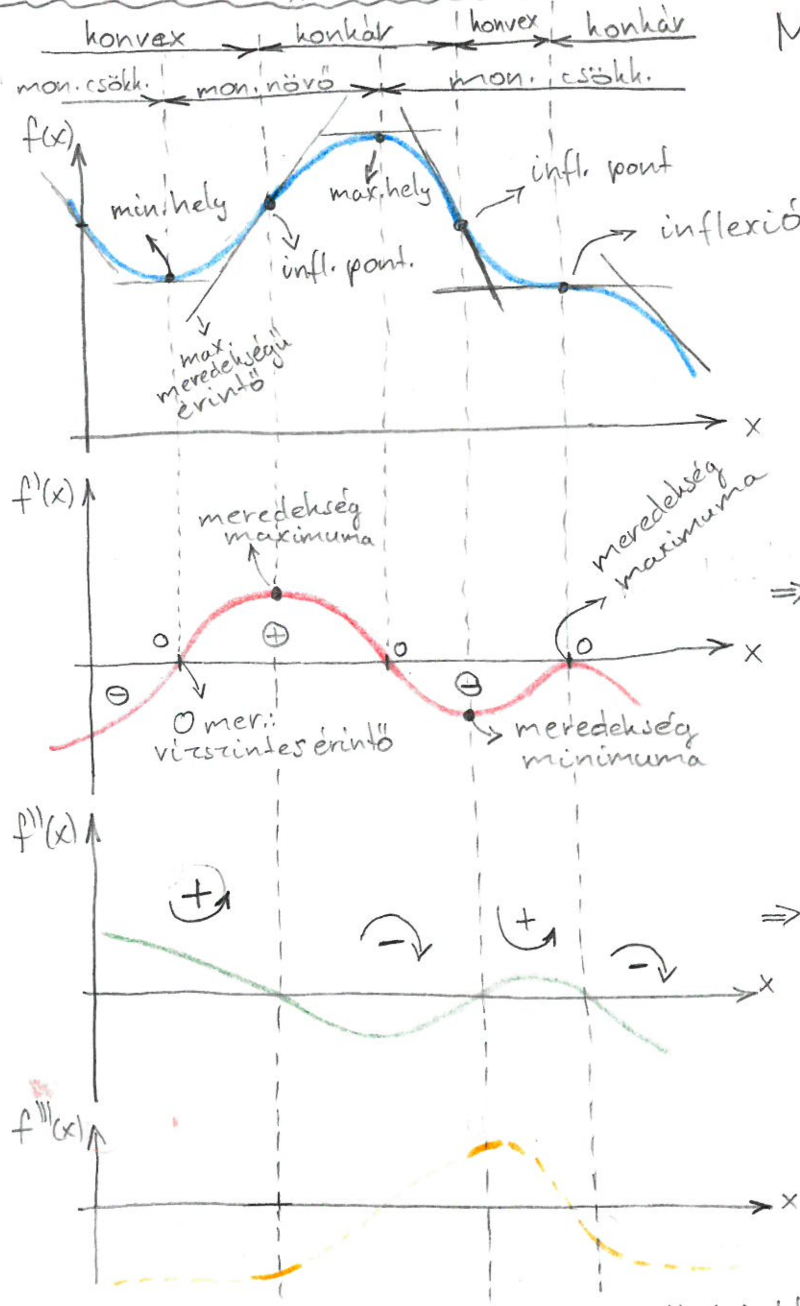
$f(x) = (x-2)^{-x+3}$

Kell: alap > 0 azaz: a^b esetén $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$

Most:

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x > 2\}$

Monotonitás, görbület vizsgálata



inflexiós pont: megváltozik a görbület

$\Rightarrow$ érintő meredeksége

$m = f'(x)$: ⊕ / ; ⊖ \ ; 0 — $\rightarrow$ érintők

$\Rightarrow$ érintő meredekségének változása merre forog?

$f''(x)$: ⊕ ↶+ ; ⊖ −↷

Ha: • $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$-ban szélsőérték lehet

$f'(x)$ x_0-ban előjelet vált $\Rightarrow$ szé. van biztosan

$f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ előjelet vált $f'(x)$ x_0-ban $\Rightarrow$ szé. van biztosan

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ nem tudjuk ez alapján mi lehet

} szé. mon.

• $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$-ban inflexiós pont lehet

$f''(x)$ x_0-ban előjelet vált $\Rightarrow$ inflexiós pont van x_0-ban

1, Teljes függvényvizsgálat

1., Értelmezési tartomány : D_f
↳ (szakadási helyek)

2., Zérushely (ZH) : $f(x)=0$

3., Paritás

4., Periodicitás

5., Monotonitás } $f'(x)$ alapján

6., Szélsőértékek

7., Konvexitás } $f''(x)$ alapján

8., Inflexiós pontok

(5–8.: $f(x)$ „viselkedése" az értelmezési tartomány „belső" pontjaiban)

9., Határértékek: • $\pm\infty$-ben
• értelmezési tart. végpontjaiban
} $f(x)$ „viselkedése" a D_f „szélső" „pontjaiban"

10., Aszimptota keresése

11., Értékkészlet

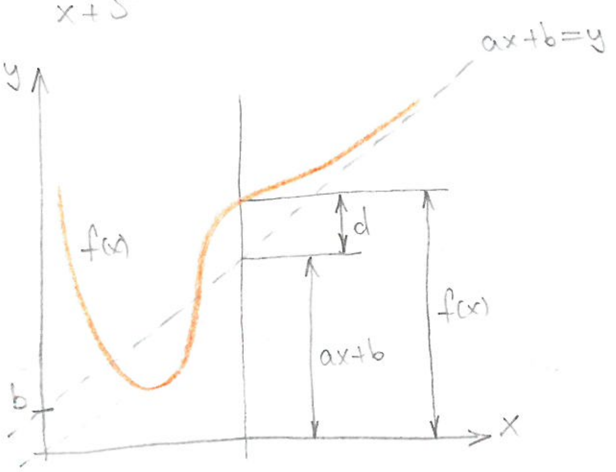
12., Rajz

1, Aszimptota keresés:

• szakadási helyen: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ függőleges

• végtelenben: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ vízszintes

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+5}$$



A két „görbe" távolsága:

$$d = f(x) - (mx+b)$$

Ha $y=mx+b$ aszimptota, akkor:

$$\lim_{x\to+\infty} d = 0$$

↙ lehetne $-\infty$ is

Azaz: $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)=0$$

A meredekség: (m)

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(mx+b)}{x}} = \frac{\lim(\dots)}{\lim(\dots)} = \text{„}\frac{0}{\infty}\text{"} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{mx+b}{x}}_{m} = 0 \Rightarrow m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

A tengelymetszet: (b)

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-b)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \underbrace{\lim_{x\to\infty} b}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$$

1. a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x+5}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+3}{x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2+5x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - \underbrace{m}_{1} \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3}{x+5} - \underbrace{1 \cdot x}_{\frac{x^2+5x}{x+5}} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+3-x^2-5x}{x+5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+3}{x+5} = -5$$

Az aszimptota $+\infty$-ben: $y = 1 \cdot x + (-5)$

$y = x - 5$

Aszimptota a szakadási helyen: $x = -5$ -ben $\leftrightarrow$ függőleges

Lehetne még vizsgálni $-\infty$-ben is! (Ott most ugyanez az egyenes lenne az aszimptota)

2. Teljes függvényvizsgálat

a) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$

1. D_f: $x \in \mathbb{R}$

2. Zérushely: $f(x) = 0 \Rightarrow$

$$3x^3+3x^2-18x=0$$
$$3x(x^2+x-6)=0$$
$$3x(x+3)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 2$$

3. Paritás:

$f(-x) = 3(-x)^3 + 3(-x)^2 - 18(-x) = -3x^3 + 3x^2 + 18x \neq \pm f(x) \Rightarrow$ nem páros, nem páratlan

4. Nem periodikus

5, 6. Monotonitás, szél.:

$f'(x) = 9x^2 + 6x - 18$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2+6x-18=0$

$3x^2+2x-6=0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \overbrace{\sqrt{4+4\cdot 6\cdot 3}}^{2\cdot\sqrt{1+18}}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \begin{cases} 1{,}1 \\ -1{,}8 \end{cases}$$

Táblázat: $f'(x)=0$ és szakadási helyek alapján

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}\right)$	$-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}$	$\left(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{19}}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}\right)$	$-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}$	$\left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{19}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.: $f(x) \approx 24{,}6$	$\searrow$	lok. min. $f(x) \approx -12{,}2$	$\nearrow$

7., 8., Konvexitás, infl. pontok:

$f''(x) = 18x + 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 18x + 6 = 0$

$x = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$

x	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	konkáv	inflexiós pont $f(x) = \frac{56}{9} \approx 6,2$	konvex

9., Határértékek:

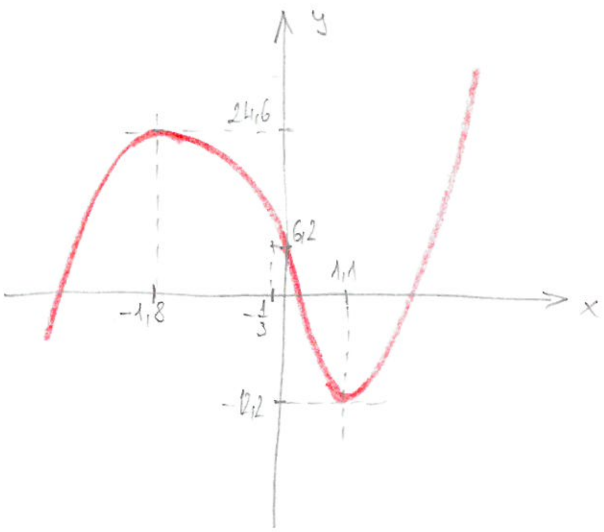
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x^3 + 3x^2 - 18x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (\ldots) = -\infty$

10., Aszimptota:

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \nexists m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nincs aszimptota

12.,

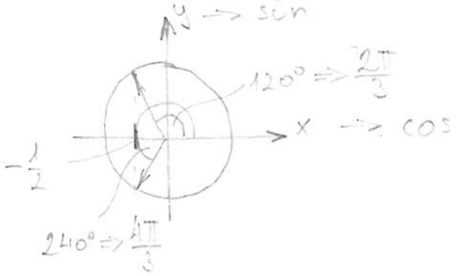


11., Értékkészlet: R_f: $f(x) \in \mathbb{R}$

b, $f(x) = 2\cdot\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + 1$

1, D_f: $x \in \mathbb{R}$

2, ZH: $f(x) = 0 \Rightarrow 2\cdot\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$



$k \in \mathbb{Z}$

$\frac{x-\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$ $\qquad$ $\frac{x-\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + k\cdot 2\pi$

$x = \underbrace{\frac{4\pi}{3} + \pi}_{\frac{7\pi}{3}} + 4k\pi$ $\qquad$ $x = \underbrace{\frac{8\pi}{3} + \pi}_{\frac{11\pi}{3}} + 4k\pi$

Azaz: $x_1 = \frac{7\pi}{3} + 4k\pi$ $\qquad$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi$

k helyére (k−1)

3, Paritás

$f(-x) = 2\cdot\cos\left(\frac{-x-\pi}{2}\right) + 1 = 2\cdot\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + 1 \neq \pm f(x)$

nem páros, nem páratlan

4, Periodicitás:

$\cos(x)$: 2π periodikus

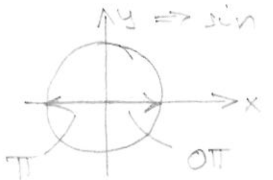
$$\left(\frac{(x+p)-\pi}{2}\right) - \left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 2\pi$$

$p = 4\pi \Rightarrow f(x)$ $p = 4\pi$-vel periodikus

A periodikusság miatt elég lesz egy 4π hosszú intervallumot tetszőleges! vizsgálni. Legyen ez: $x \in [0, 4\pi]$

5,6, $f'(x) = -2\cdot\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 0$



$\underbrace{\frac{x-\pi}{2} = 0 + 2k\pi \qquad \frac{x-\pi}{2} = \pi + 2k\pi}$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{x-\pi}{2} = k\pi \Rightarrow x - \pi = 2k\pi \Rightarrow x = \underbrace{\pi + 2k\pi}$

$\ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

1 periódus

x	0	$]0,\pi[$	π	$]\pi, 3\pi[$	3π	$]3\pi, 4\pi[$	4π	$]4\pi, 5\pi[$	5π
$f'(x)$	⊖	⊖	0	⊕	0	⊖	⊖	⊖	0
$f(x)$	↘	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘	↘	↘	lok. min.

$f(x) = -1$ $\qquad$ $f(x) = 3$

7., 8., Konvexitás, infl.:

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad x = 2\pi + 2k\pi = 2(k+1)\pi$$

vagy:

$x = 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

1 periódus

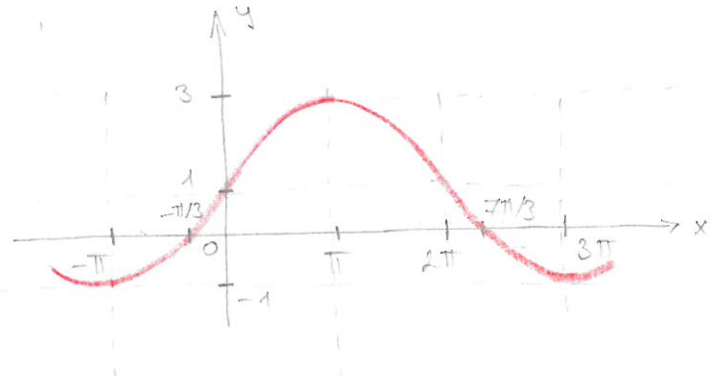
x	0	$]0, 2\pi[$	2π	$]2\pi, 4\pi[$	4π
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
	infl.	☹	infl.	☺	infl.

9., Határértékek:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \nexists \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \nexists$

10., Aszimptota nincs

12.,



11., Értékkészlet: R_f: $f(x) \in [-1; 3]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x-4}$

Próbáljuk meg egyszerűsíteni!

$f(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-4)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x-4} \quad , x \neq -1$

1, D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$

Ok: $x-4 \neq 0 \qquad x+1 \neq 0$

$x \neq 4 \qquad x \neq -1$

2, Zérushely: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x-2}{x-4} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

3, Paritás

$f(-x) = \dfrac{-x-2}{-x-4} = + \dfrac{x+2}{x+4} \neq \pm f(x)$

nem páros, nem páratlan

4, Nem periodikus

5-6, $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x-4) - (x-2) \cdot 1}{(x-4)^2} = \dfrac{-2}{(x-4)^2} = -2 \cdot \dfrac{1}{(x-4)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ nincs ilyen x

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 4[$	4	$]4, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\searrow$ sz. m. cs.	$\nexists$	$\searrow$ sz. m. cs.	$\nexists$	$\searrow$ sz. m. cs.

Szélsőértéke tehát nincs

7-8, $f''(x) = -2 \cdot \dfrac{0 \cdot (x-4)^2 - 1 \cdot 2 \cdot (x-4)}{(x-4)^4} = 4 \cdot \dfrac{x-4}{(x-4)^4} = 4 \cdot \dfrac{1}{(x-4)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ nincs m.o.

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 4[$	4	$]4, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\frown$ konkáv	$\nexists$	$\frown$ konkáv	$\nexists$	$\smile$ konvex

9., $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{-1-2}{-1-4} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \frac{4-2}{4^+-4} = \frac{4-2}{0^+} = +\infty$

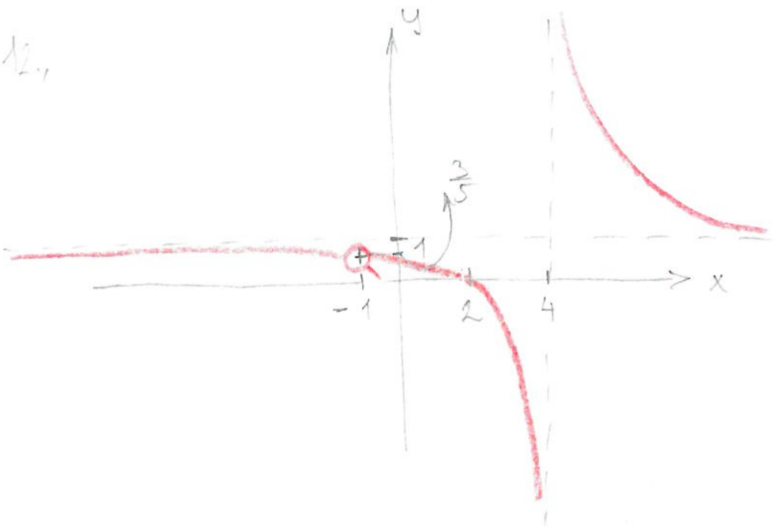
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{4-2}{4^--4} = \frac{4-2}{0^-} = -\infty$

10., Asszimptota:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-4}\cdot\frac{1}{x} = 0 = m \\ &\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-4} - 0\right) = 1 = b \end{aligned}\right\} y = 1$$

$\lim_{x\to-\infty}$ esetén adódik: $y = 1$

12.,



11., R_f: $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{5}\}$

d) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

1., Df: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$x^2-1 \neq 0$

$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

2., Zérushely: $f(x)=0$ $\quad \frac{x}{x^2-1}=0 \Rightarrow x=0$

3., Paritás:

$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-1}=\frac{-x}{x^2-1}=-f(x) \Rightarrow$ páratlan fv.

Csak a $[0, +\infty[$ intervallumot vizsgáljuk, a $]-\infty, 0]$ ebből már következik

4., Nem periodikus

5.-6., $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ $\oplus$ $\oplus$

$f'(x)=0 \Rightarrow \quad -x^2-1=0$

$x^2=-1$ nincs $x \in \mathbb{R}$ mo.

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$\ominus$	$\nexists$	$\ominus$	$\nexists$	$\ominus$
$f(x)$	$\searrow$ sz.m.cs.	$\nexists$	$\searrow$ sz.m.cs.	$\nexists$	$\searrow$ sz.m.cs.

7.-8., $f''(x)=-\frac{2x\cdot(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$

$=-2x\cdot\cancel{(x^2-1)}\cdot\frac{(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=$

$=-2x\cdot\frac{-x^2-3}{(x^2-1)^3}=2x\cdot\frac{x^2+3}{(x^2-1)^3}$ $\oplus$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f''(x)$	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$
$f(x)$	$\frown$ konkáv	$\nexists$	$\smile$ konvex		$\frown$ konkáv	$\nexists$	$\smile$ konvex

$\ominus\cdot\frac{\oplus}{\oplus}$ $\quad \ominus\cdot\frac{\oplus}{\ominus}$ $\quad \oplus\cdot\frac{\oplus}{\ominus}$ $\quad \oplus\cdot\frac{\oplus}{\oplus}$

9., Határértékek

- $\pm\infty$-ben: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

- Szakadási helyeken: $x_0 = -1$: $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{(-1^-)^2-1} = \frac{-1}{1^+-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{-1}{(-1^+)^2-1} = \frac{-1}{1^--1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

  $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{(1^-)^2-1} = \frac{1}{1^--1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

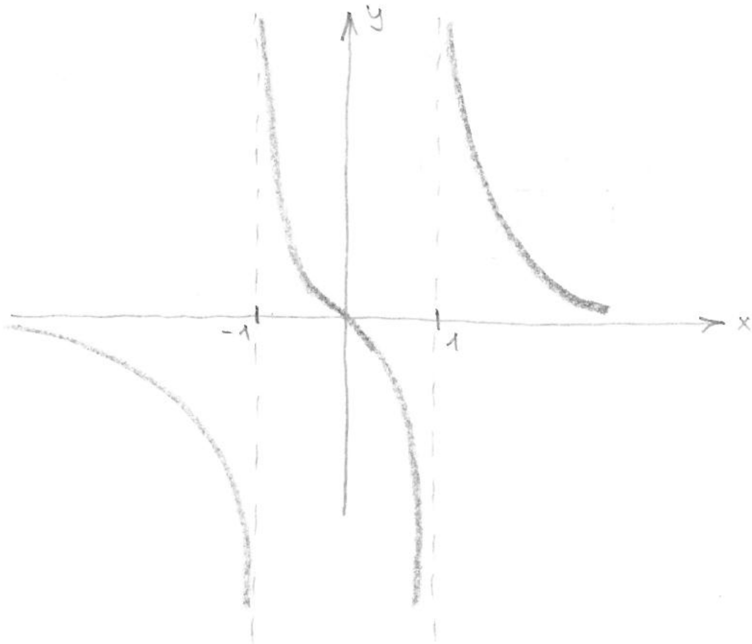
  $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{(1^+)^2-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

10., Aszimptota:

$\pm\infty$-ben: $y=0$ $\Rightarrow$ vízszintes

$x=\pm1$-ben: $\Rightarrow$ függőleges

12.,



11., R_f: $f(x) \in \mathbb{R}$

f, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

1., D_f: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$x\neq 0$

2., ZH: $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{e^x}{x}=0 \Rightarrow e^x=0$
nincs mo.

3., Paritás: $f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{-x}=-\dfrac{1}{x\cdot e^x}\neq \pm f(x) \Rightarrow$ nem ps.
nem ptln.

4., Nem periodikus

5.-6., $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=e^x\cdot\dfrac{x-1}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \underbrace{e^x}_{>0}\cdot\dfrac{x-1}{x^2}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$\oplus\cdot\frac{\ominus}{\oplus}=\ominus$	$\nexists$	$\oplus\cdot\frac{\ominus}{\oplus}=\ominus$	0	$\oplus\cdot\frac{\oplus}{\oplus}=\oplus$
$f(x)$	$\searrow$ szig. m. cs.	$\nexists$	$\searrow$ szig. m. cs.	lok. min. $f(1)=e$	$\nearrow$ szig. m. n.

7.-8., $f''(x)=e^x\cdot\underbrace{\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)'}+e^x\cdot\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)=e^x\cdot\left(\dfrac{-x+2}{x^3}+\dfrac{x^2-x}{x^3}\right)=e^x\cdot\dfrac{x^2-2x+2}{x^3}$

$\dfrac{1\cdot x^2-(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{x-2x+2}{x^3}=\dfrac{-x+2}{x^3}$

$f''(x)=0 \Rightarrow x^2-2x+2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{+2\pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2}=\dfrac{+2\pm\sqrt{-4}}{2}\notin\mathbb{R} \Rightarrow$ 

x	$]-\infty,0[$	0	$]0,+\infty[$
$f''(x)$	$\oplus\cdot\frac{\oplus}{\ominus}=\ominus$	$\nexists$	$\oplus\cdot\frac{\oplus}{\oplus}=\oplus$
$f(x)$	$\frown$ konkáv	$\nexists$	$\smile$ konvex

9., Határértékek:

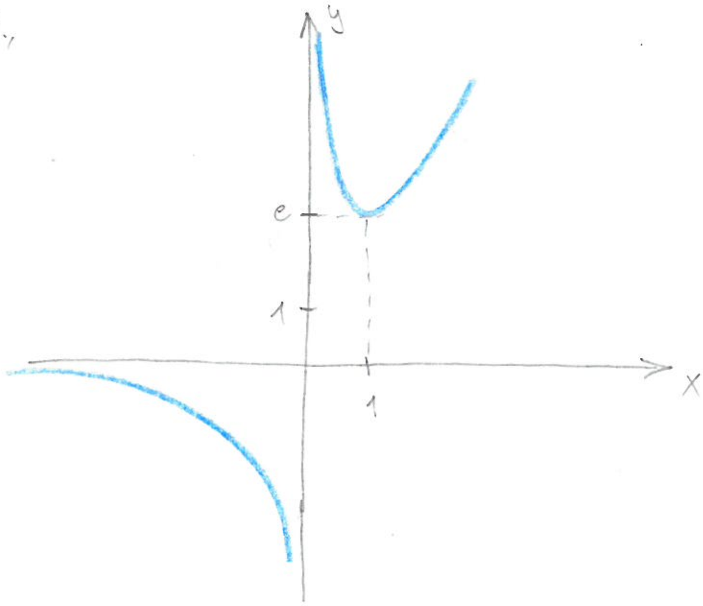
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{0}{-\infty}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^0}{0^-}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^0}{0^+}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

10., Vízszintes: $y=0$ $\quad -\infty$-ben
Függőleges: $x=0$
Ferde: nincs

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty\notin\mathbb{R}\Rightarrow$ nincs

12.,



11., Értékkészlet: R_f: $f(x) \in]-\infty,0[\cup [e,+\infty[$

g, $f(x) = x^2 \cdot \ln(x^2)$

1., D_f: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x^2 > 0$ (ln miatt) $\Rightarrow$ $x \neq 0$

2., ZH: $x^2 \cdot \ln(x^2) = 0$

$x^2 = 0$
$x = 0$

$\ln(x^2) = 0$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$

3., Paritás:
$f(-x) = (-x)^2 \cdot \ln((-x)^2) = x^2 \cdot \ln(x^2) = f(x)$

$\hookrightarrow$ páros $\Rightarrow$ elég $x > 0$ tartományt vizsgálni, mert a görbe y tengelyre szimm.

4., Nem periodikus

5., 6., $f'(x) = 2x \cdot \ln(x^2) + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2x(1 + \ln(x^2)) = 0$

$2x = 0$
$x = 0$

$1 + \ln(x^2) = 0$
$\ln(x^2) = -1 \quad / e^{(\dots)}$
$x^2 = \frac{1}{e}$
$x = \pm 1/\sqrt{e} \approx 0{,}6$

x	$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0[$	0	$]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$
$f'(x)$	$\ominus \cdot \oplus = \ominus$	0	$\ominus \cdot \ominus = \oplus$	$\nexists$	$\oplus \cdot \ominus = \ominus$	0	$\oplus \cdot \oplus = \oplus$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min. $f(x) = -\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	lok. min $f(x) = -\frac{1}{e}$	$\nearrow$

7;8.) $f''(x) = 2\cdot(1+\ln(x^2)) + \underbrace{2x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}_{2\cdot 2} = 2\cdot\overbrace{(3+\ln(x^2))}^{\text{ennek az előjele számít}} = 0$

$$3+\ln(x^2)=0$$
$$\ln(x^2) = -3 \qquad /e^{(\ldots)}$$
$$x^2 = e^{-3}$$
$$x = \pm e^{-\frac{3}{2}} \approx \pm 0{,}22$$

x	$]-\infty, -e^{-\frac{3}{2}}[$	$-e^{-\frac{3}{2}}$	$]-e^{-\frac{3}{2}}, 0[$	0	$]0, e^{-\frac{3}{2}}[$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$]e^{-\frac{3}{2}}, +\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	infl.	$\cap$	$\nexists$	$\cap$	infl.	$\cup$

9.) Hé-ek:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\cdot\ln(x^2) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot\ln(x^2) =_{\text{"}} 0\cdot(-\infty)\text{"} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{x^{-2}} \overset{LH}{=}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-2\cdot x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -x\cdot x^3 = \lim_{x\to 0} -x^4 = 0$$

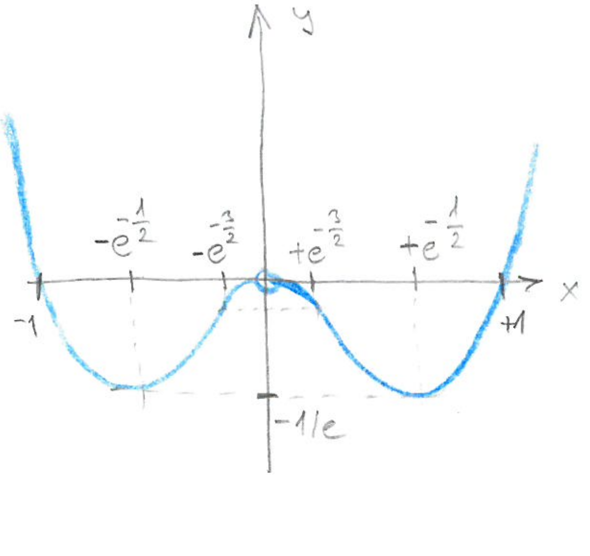
10.) Aszimptota:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\ln(x^2) =_{\text{"}} (-\infty)\cdot(+\infty)\text{"} \notin \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ nincs asz.

12.)



R_f: $f(x) \in [-1/e, +\infty[$