Matek A1 / 7. gyakorlat: Differenciálszámítás és alkalmazásai

1. Adjuk meg az $f(x) = x^2 + 4x - 2$ függvényt $x_0 = 0$-ban merőlegesen metsző egyenes egyenletét!

2. A konstansok megfelelő megválasztásával tegyük differenciálhatóvá az alábbi függvényeket!

   a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{, ha } x \geq 1 \\ ax + b & \text{, ha } x < 1 \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} ax^2 + c & \text{, ha } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{, ha } x > 1 \end{cases}$

   c) $h(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{, ha } x \geq 0 \\ (x-b)^2 - 1 & \text{, ha } x < 0 \end{cases}$

3. Deriváljuk a következő kifejezéseket x szerint!

   a) x^x

   b) $(arsh\ x)^{2\cos(x)}$

   c) $(\sqrt{x})^{\cosh(\ln x)}$

   d) $(x + 3\tan x)^{\cos^2 x}$

4. Adjuk meg a függvények inverzeit, számítsuk ki deriváltjaikat, és rajzoljuk fel a grafikonjaikat!

   a) $f(x) = 2x + 3$

   b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

   c) $f(x) = -1 + 2^{x+1}$

   d) $f(x) = 1 + \cos(2x + \pi)$

   e) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

5. Számítsuk ki a következő határértékeket!

   a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^5)}{x - 1}$

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4^x}{x^2}$

   c) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \arctan(\frac{1}{x})$

   d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

6. Adjuk meg az értelmezési tartományát!

   a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

   b) $f(x) = \ln(2x + 3)$

   c) $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$

   d) $f(x) = \arcsin(\sqrt{x - 1})$

7. Vizsgáljuk meg a függvényeket paritás szempontjából!

   a) $f(x) = e^{-x^2}$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}\cos(x)$

   c) $f(x) = x^3 \cdot \sin(x) + 1$

   d) $f(x) = x^3 \cdot \cos(x) + 1$

8. Vizsgáljuk neg a függvényeket periodikusság szempontjából!

   a) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x + \frac{\pi}{6})$

   b) $f(x) = 3\tan(\frac{x}{2} - \pi) + 5$

9. Vizsgáljuk a függvények monotonitását és szélsőértékét!

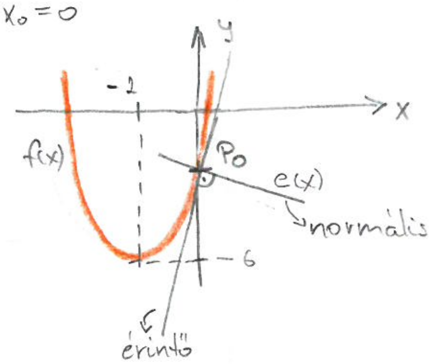
   a) $f(x) = x^2 + 3$

   b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

   c) $f(x) = 2 \cdot \sin(3x + \pi) + 2$

1, $f(x) = x^2+4x-2 = x^2+4x+4-6 = (x+2)^2-6$

$x_0 = 0$



$e(x)$-hez kell: P_0, m

- $P_0(x_0, y_0)$

$y_0 = f(x_0) = f(0) = \ldots = -2$

- $m = -\dfrac{1}{f'(x_0)} = -\dfrac{1}{4}$

$f'(x) = 2x+4$

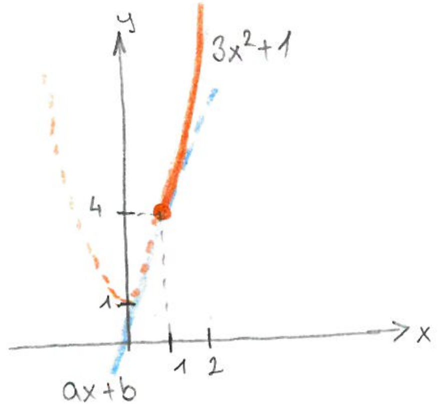
$f'(x_0) = f'(0) = 4$

A normális egyenlete:

$$e(x) = y = \underbrace{-2}_{y_0} + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{4}\right)}_{m}(x - \underbrace{0}_{x_0}) = -2 - \frac{x}{4}$$

10p.

2, a, $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & , \text{ha } x \geq 1 \\ ax+b & , \text{ha } x < 1 \end{cases}$



Folytonossághoz:

- $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ → most $x \to 1^-$ az érdekes

$3 \cdot 1^2 + 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} ax+b$

I. $4 = a \cdot 1 + b$

Differenciálhatósághoz:

- $(3x^2+1)'|_{x=1} = (ax+b)'|_{x=1}$

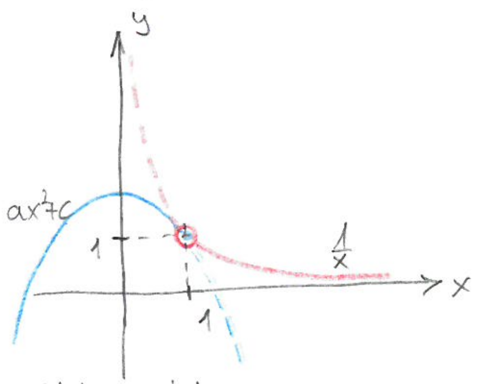
$(6x)|_{x=1} = (a)|_{x=1}$

II. $6 \cdot 1 = a$

II.: $a = \underline{\underline{6}}$

I.: $b = 4 - a = 4 - 2 = \underline{\underline{-2}}$

b, $g(x) = \begin{cases} ax^2+c & , x \leq 1 \\ 1/x & , x > 1 \end{cases}$



Folytonossághoz:

$(ax^2+c)|_{x=1} = \lim\limits_{x\to 1+} \frac{1}{x} \Rightarrow$ I. $a \cdot 1^2 + c = \frac{1}{1}$

Diffhatósághoz:

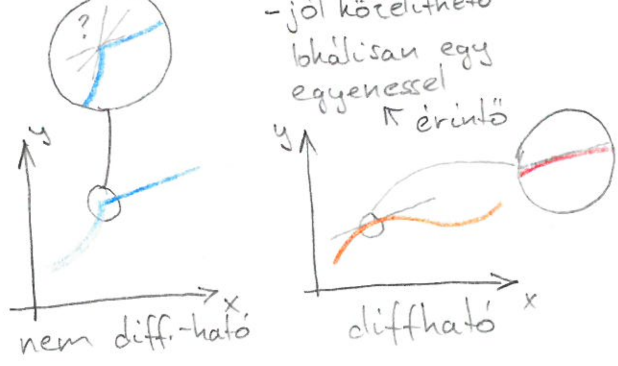
$(ax^2+c)'|_{x=1} = \left(\frac{1}{x}\right)'|_{x=1} \Rightarrow$ II. $(2ax)|_{x=1} = \left(\frac{-1}{x^2}\right)|_{x=1}$

Megjegyzés:

differenciálható fv.: - „sima" fv.

↑ nem törik meg

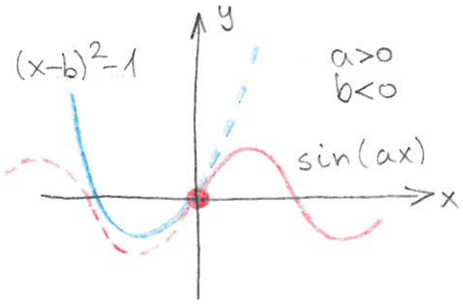
- jól közelíthető lokálisan egy egyenessel ↖ érintő

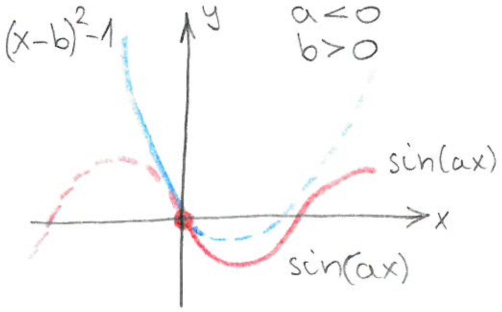


I. $a + c = 1 \Rightarrow c = 1 - a = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

II. $2a = -1 \Rightarrow a = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

c, $h(x) = \begin{cases} \sin(ax) & x \geq 0 \\ (x-b)^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$





Jellegre ez a kettő megoldás van.

• Folytonossághoz:

$$h(0) = \lim_{x \to 0^-} h(x)$$

$$(\sin(ax))|_0 = \lim_{x\to 0^-} \left((x-b)^2 - 1\right)$$

$$\sin(0) = -b^2 - 1$$

$$1 = -b^2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -1 \ , \ b_2 = +1$$

• Diffhatósághoz:

$$(\sin(ax))'|_{x=0} = \left((x-b)^2-1\right)'|_{x=0}$$

$$(a\cdot\cos(ax))|_{x=0} = (2(x-b))|_{x=0}$$

$$a\cdot\cos(0) = -2b$$

$$a = -2b \quad \Rightarrow \quad a_1 = +2$$

$$a_2 = -2$$

20p

3, Logaritmikus deriválás:

a, $(x^x)' = ?$ NEM exp, NEM polinom fv.!

$$\neq x \cdot x^{x-1}$$

$$\neq x^x \cdot \ln(x)$$

!

Felhasználjuk, hogy: • $a = e^{\ln a}$
• $\ln(a^b) = b\cdot\ln a$ $\Big\}$ $a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b\cdot \ln a}$

Exponenciális függvényt készítünk.

ez már exp. fv.

Most:

$$(x^x)' = \left(e^{\ln(x^x)}\right)' = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = \underbrace{e^{x\cdot\ln x}}_{x^x} \cdot \underbrace{(x\cdot\ln x)'}_{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1} =$$

$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

b, $$\left((\operatorname{arsh}x)^{2\cos x}\right)' = \left(e^{\ln\left((\operatorname{arsh}x)^{2\cos x}\right)}\right)' = \left(e^{2\cos x\cdot\ln(\operatorname{arsh}x)}\right)' =$$

cél: exp. fv. legyen

ez így már exp. fv.

$$= \underbrace{e^{2\cos x\cdot\ln(\operatorname{arsh}x)}}_{(\operatorname{arsh}x)^{2\cos x}} \cdot \underbrace{\left(2\cos x\cdot\ln(\operatorname{arsh}x)\right)'}_{-2\sin x\cdot\ln(\operatorname{arsh}x) + 2\cos x\cdot\frac{1}{\operatorname{arsh}x}\cdot\underbrace{(\operatorname{arsh}x)'}_{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}} =$$

$$= (\operatorname{arsh}x)^{2\cos x} \cdot \left(-2\sin x \cdot \ln(\operatorname{arsh}x) + 2\cos x \frac{1}{\operatorname{arsh}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

c) $$\left((\sqrt{x})^{\mathrm{ch}(\ln x)}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2} \mathrm{ch}(\ln x)}\right)' \underset{\uparrow}{=} \left(e^{\ln\left(x^{\frac{1}{2} \mathrm{ch}(\ln x)}\right)}\right)' =$$

hatványt csinálunk belőle: $\sqrt{x}=x^{1/2}$

cél: exp. fv. legyen

$$= \left(e^{\frac{1}{2} \mathrm{ch}(\ln x)\cdot \ln x}\right)' = \underbrace{e^{\frac{1}{2} \mathrm{ch}(\ln x)\cdot\ln x}}_{(\sqrt{x})^{\mathrm{ch}(\ln x)}} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathrm{ch}(\ln x)\cdot \ln x\right)' =$$

ez már exp. fv.!

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \mathrm{ch}(\ln x)\cdot\ln x}\cdot\left(\underbrace{\mathrm{sh}(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}_{(\mathrm{ch}(\ln x))'}\cdot \ln x + \mathrm{ch}(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{x})^{\mathrm{ch}(\ln x)}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\mathrm{sh}(\ln x)\cdot\ln x + \mathrm{ch}(\ln x)\right)$$

d) $$\left((x+3\,\mathrm{tg}x)^{\cos^2 x}\right)' \underset{\uparrow}{=} \left(e^{\ln\left((x+3\,\mathrm{tg}x)^{\cos^2 x}\right)}\right)' =$$

cél: exp. fv. legyen

$$= \left(e^{\cos^2 x\cdot\ln(x+3\,\mathrm{tg}x)}\right)' = \overbrace{e^{\cos^2 x\cdot\ln(x+3\,\mathrm{tg}x)}}^{\text{ez az eredeti: } (x+3\,\mathrm{tg}x)^{\cos^2 x}}\cdot\underbrace{\left(\cos^2 x\cdot\ln(x+3\,\mathrm{tg}x)\right)'}_{} =$$

ez már exp. fv.

$$\underbrace{2\cos x\cdot\underbrace{(\cos x)'}_{-\sin x}}_{-\sin 2x=-2\cos x\sin x}\cdot\ln(x+3\,\mathrm{tg}x) + \cos^2 x\cdot\frac{1}{x+3\,\mathrm{tg}x}\cdot\underbrace{(x+3\,\mathrm{tg}x)'}_{1+3\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= (x+3\,\mathrm{tg}x)^{\cos^2 x}\cdot\left(-\sin 2x\cdot\ln(x+3\,\mathrm{tg}x)+\frac{\cos^2 x+3}{x+3\,\mathrm{tg}x}\right)$$

25p

4,a, $f(x)=2x+3$

Inverz keresése: Tudom $y=f(x)$-et. Akkor mi lehetett x?

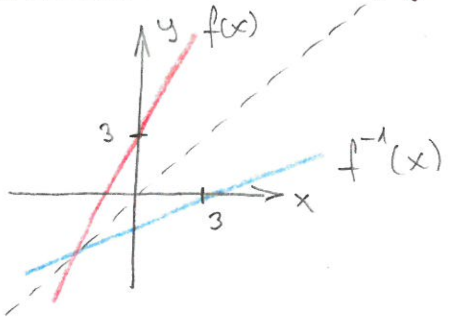
$y=2x+3 \quad \Rightarrow \quad y-3=2x \quad \Rightarrow \quad x=\frac{y}{2}-\frac{3}{2}$

1, A't kell rendezni: $x=(\ldots)$

2, y és x kicserélése, hiszen nekünk $\underset{\text{ide } x \text{ kell}}{f^{-1}(x)}$ kell

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$

Ábrázolva:



y=x egyenes

erre kell tükrözni } ok: kicseréljük
a grafikont x, y koordinátat
pl.: (3,2)-ből lesz (2,3)

b, $f(x)=x^2-4x+5 \quad = x-4x+4+1=(x-2)^2+1$

- Inverz keresése:

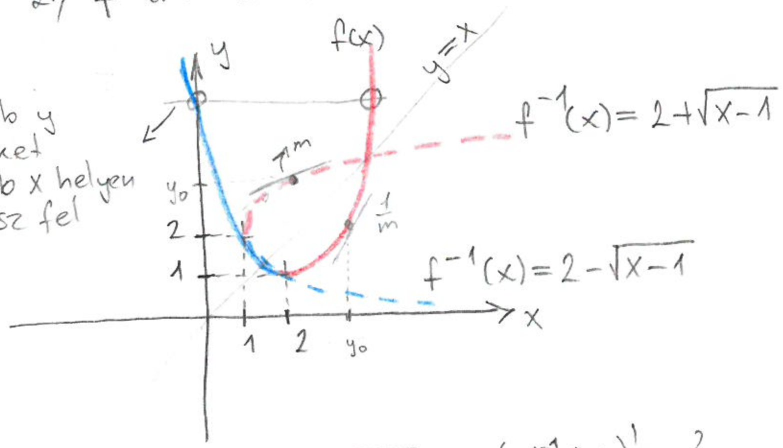
1, $y=x^2-4x+5 \quad \Rightarrow \quad 0=x^2-4x+(5-y)$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot(5-y)}}{2}=2\pm\sqrt{4-(5-y)}=2\pm\sqrt{y-1}$$

Az inverz nem egyértelmű!!
OK: f(x) nem monoton a teljes értelmezési-tartományon

2, $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-1}$ VAGY $f^{-1}(x)=2-\sqrt{x-1}$

1 db y értéket 2 db x helyen vesz fel



$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)'=x \quad / \frac{d}{dx}(\ldots)$$

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot f^{-1\,'}(x)=1$$

$$f^{-1\,'}(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

- Ha $f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-1}$, $\left(f^{-1}(x)\right)'=?$

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(x)}_{y_0})} \Rightarrow \left(2+\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{2\cdot f^{-1}(x)-4}=\frac{1}{2(2+\sqrt{x-1})-4}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$f'(x)=2x-4$

"Rendesen" deriválva is ezt kapjuk.

$f(x) = -1 + 2^{x+1}$

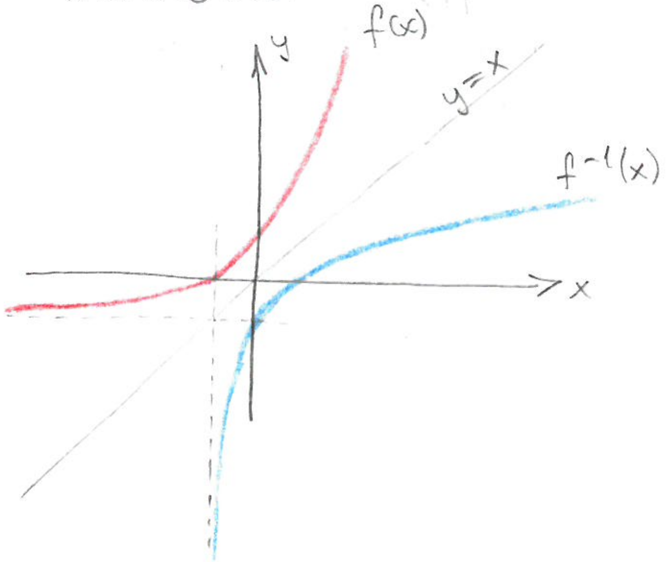
∘ Inverz keresése:

1., $y = -1 + 2^{x+1} \Rightarrow y+1 = 2^{x+1} \Rightarrow \log_2(y+1) = x+1$

$\Rightarrow x = -1 + \log_2(y+1)$

2., $f^{-1}(x) = -1 + \log_2(x+1)$

∘ Ábrázolva:



∘ Inverz deriváltja:

$$\left(-1 + \log_2(x+1)\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverz fv.} \\ \text{deriv. szab.}}}{=} \frac{1}{\ln(2) \cdot 2^{-1+\log_2(x+1)+1}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot (x+1)}$$

$f'(x) = 2^{x+1} \cdot \ln 2$

d, $f(x) = 1 + \cos(2x + \pi) \Rightarrow f'(x) = -2\sin(2x+\pi)$

∘ Inverz keresése:

1., $y = 1 + \cos(2x+\pi) \Rightarrow y - 1 = \cos(2x+\pi)$

$\Rightarrow \arccos(y-1) = 2x + \pi$

$\frac{1}{2}\arccos(y-1) - \frac{\pi}{2} = x$

$y = f(x)$-nél:

$\cos(\ldots) \in [-1, 1]$

$\hookrightarrow y - 1 \in [-1, 1]$

$-1 \le y - 1 \le 1$

$0 \le y \le 2$

$2x + \pi \in [0, 2\pi]$

$0 < 2x + \pi < \pi$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$

2., $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arccos(x-1) - \frac{\pi}{2}$

∘ Deriválása:

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-2\sin\Big(\underbrace{2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \arccos(x-1) - \frac{\pi}{2}\right) + \pi}_{\arccos(x-1)}\Big)} =$$

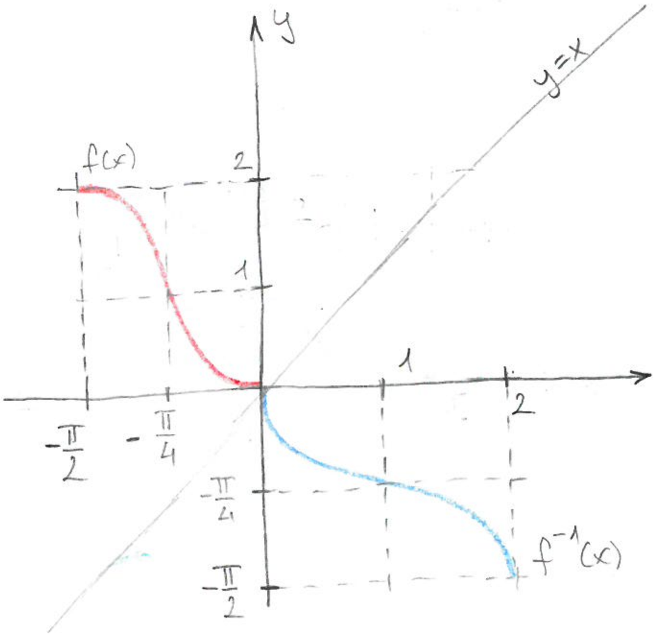
$$= \frac{1}{-2\sin(\arccos(x-1))} = \frac{1}{-2\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x-1))}} \overset{*}{=}$$

$\sin x^2 + \cos x^2 = 1 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{-2\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$f(x) = 1 + \cos(2x+\pi) = 1 + \cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

∘ Ábrázolva:



e, $f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 1 \quad \Rightarrow f'(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

∘ Inverz meghat:

1, $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - 1 \Rightarrow \quad y+1 = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \quad \arcsin(y+1) = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \arcsin(y+1) - \frac{\pi}{4}$

Ha: $\quad -1 \leq y+1 \leq 1$ és $\quad -\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

$-2 \leq y \leq 0 \qquad -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

2, $f^{-1}(x) = \arcsin(x+1) + \frac{\pi}{4}$

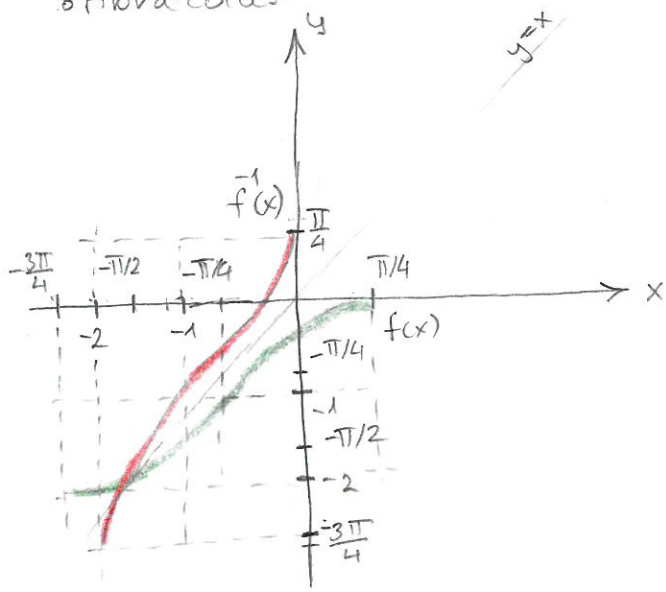
∘ Inverz deriváltja

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)+\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x+1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x+1))} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x+1))}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$$

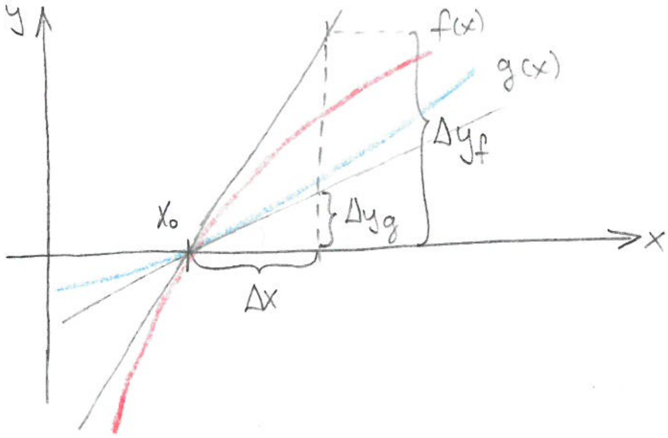
∘ Ábrázolás:



L'Hospital szabály:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ +\infty \\ -\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{ha } „\frac{0}{0}" \text{ vagy } „\frac{\infty}{\infty}" \text{ típusú a hé.}$$

Szemléletesen $\lim\limits_{x \to x_0} (\dots)$ esetén:



$f(x) \approx \Delta y_f$

$g(x) \approx \Delta y_g$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_f}{\Delta y_g} = \frac{\overbrace{m_f}^{f'(x_0)} \cdot \cancel{\Delta x}}{\underbrace{m_g}_{g'(x_0)} \cdot \cancel{\Delta x}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^5)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{5 \ln x}{x-1} = „\frac{0}{0}" \underset{LH}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(5 \cdot \ln x)'}{(x-1)'} =$$

A számlálót és a nevezőt külön deriváljuk!

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5 \cdot \frac{1}{x}}{1} = 5$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{4^x}{x^2} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{LH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \cdot \ln 4}{2x} = „\frac{\infty}{\infty}" \underset{LH}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{4^x \cdot (\ln 4)^2}{2} = \infty$$

c) $$\lim_{x \to \infty} x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = „\infty \cdot 0" = \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = „\frac{0}{0}" \underset{LH}{=}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^2}_{\to 0}} = 1$$

d) $$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x \overset{„\infty^0"}{=} \lim_{x \to 0^+} e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^x\right)} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \cdot \ln \frac{1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln \frac{1}{x}} = „e^{0 \cdot \infty}" = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} \underset{LH}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x} = e^0 = 1$$

6, a, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

Ami kell: Gyök alatt nemnegatív legyen, nevező ne legyen 0

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} x+3 \geq 0 & & \sqrt{x+3} \neq 0 \\ x \geq -3 & \text{és} & x+3 \neq 0 \\ & & x \neq -3 \end{array}}_{x>3}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

b, $f(x) = \ln(2x+3)$

Ami kell: ln-be csak pozitív szám lehet

$2x+3 > 0$

$2x > -3$

$x > -\frac{3}{2}$ $\qquad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\}$

c, $f(x) = \ln(x^2+3x)$

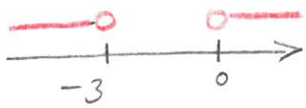
Hasonlóan, mint előbb:

$x^2+3x > 0$

$x(x+3) > 0 \Rightarrow$ I. $\underbrace{\begin{array}{l} x>0 \text{ és } x+3>0 \\ \qquad\qquad x>-3 \end{array}}_{x>0}$ VAGY II. $\underbrace{\begin{array}{l} x<0 \text{ és } x+3<0 \\ \qquad\qquad x<-3 \end{array}}_{x<-3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus [0;-3]\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ vagy } x < -3\}$



d, $f(x) = \arcsin(\sqrt{x-1})$

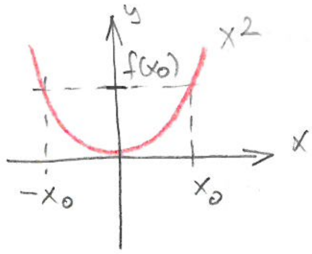
Kell: arcsin-ban $[-1;1]$-beli szám, és $\sqrt{\ }$ alatt nemnegatív

$$\underbrace{\begin{array}{l} -1 \leq \underbrace{\sqrt{x-1}}_{\geq 0} \leq 1 \\ \quad\Downarrow \\ 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \\ 0 \leq x-1 \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{array} \qquad \text{és} \qquad \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{array}}_{1 \leq x \leq 2}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

$D_f: x \in [1, 2]$

Paritás vizsgálat

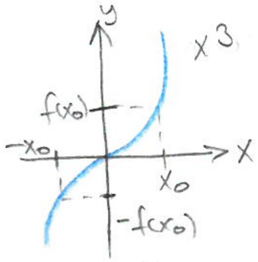


páros

$f(x_0) = f(-x_0)$

$\Downarrow$

y tengelyre tükrös

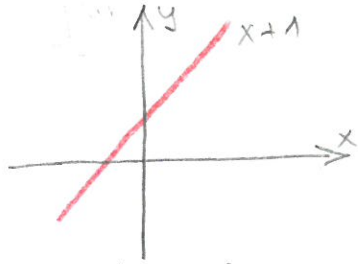


páratlan

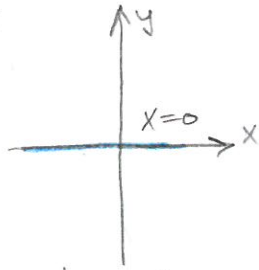
$f(-x_0) = -f(x_0)$

$\Downarrow$

origóra tükrös



nem páros és nem páratlan



páros és páratlan is

↳ csak az $f(x) = 0$

a) $f(x) = e^{-x^2}$

Amit kell mindig vizsgálni: $f(-x) = ?$

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \Rightarrow$ páros

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} \cdot \cos x$

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x\text{, mert cos páros}} = \frac{-1}{x^3} \cdot \cos x = -f(x) \Rightarrow$ páratlan

c) $f(x) = x^3 \cdot \sin x + 1$

$f(-x) = (-x)^3 \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x\text{, mert sin páratlan}} + 1 = -x^3 \cdot (-\sin x) + 1 = x^3 \cdot \sin x + 1 = f(x)$

$\Downarrow$

páros

d) $f(x) = x^3 \cdot \cos x + 1$

$f(-x) = \underbrace{(-x)^3}_{-x^3} \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} + 1 = -x^3 \cdot \cos x + 1 \neq \pm f(x)$

$\Downarrow$

nem páros, nem páratlan

8, Periodikusság p periódussal:

$$f(x+p)=f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R} \text{ esetén}$$

a, $f(x)=2\cdot\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

Tudjuk, hogy $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ $\qquad (x+2\pi)-(x)=2\pi$

$$\sin\left(3(x+p)+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(3(x+p)+\frac{\pi}{6}\right)-\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=2\pi$$

$$\cancel{3x}+3p+\cancel{\frac{\pi}{6}}-\cancel{3x}-\cancel{\frac{\pi}{6}}=2\pi$$

$$3p=2\pi$$

$$\underline{\underline{p=\frac{2\pi}{3}}}$$

b, $f(x)=3\,tg\left(\frac{x}{2}-\pi\right)+5$

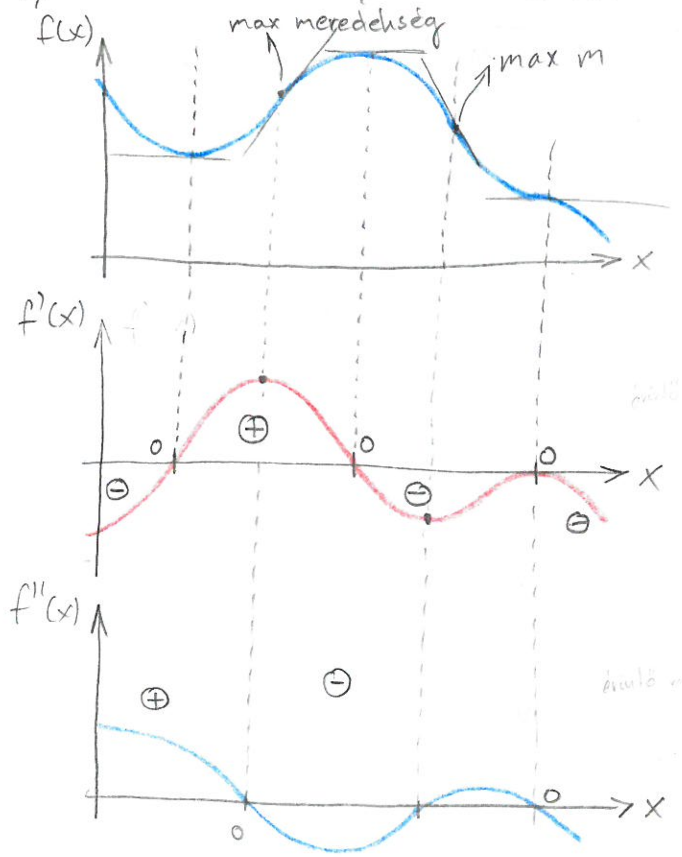
Tudjuk, hogy $tg(x+\pi)=tg(x)$

$$\left(\frac{x+p}{2}-\pi\right)-\left(\frac{x}{2}-\pi\right)=\pi$$

$$\frac{p}{2}=\pi$$

$$\underline{\underline{p=2\pi}}$$

9, Monotonitás, szélsőérték vizsgálat



$f'(x)$: $f(x)$ meredeksége

Monotonitás:

- $f'(x)>0$: szig. mon. nő
- $f'(x)<0$: szig. mon. csökk.

Szélső érték:

szé. esetén: • $f'(x_0)=0$

de ez nem elég

• kell még:

$f'(x)$ előjelet váltson x_0-ban

Ez teljesül, ha:

$f''(x)\neq 0$

Vagy teljesül, vagy nem, ha:

$f''(x)=0$

a) $f(x) = x^2+3$ $\qquad D_f: x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$

Szé.-hez szükséges:

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 = 0$

$x_0 = 0 \nearrow$ Ht: $f(x_0) = 0^2+3 = 3$

$(0;2]$

$\downarrow$ nyílt $\quad \downarrow$ zárt

Táblázat monotonitáshoz, szé.-hez:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.: $f(0)=3$	$\nearrow$

pl.:

$f'(-1) = +2(-1) = -2 < 0$

$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

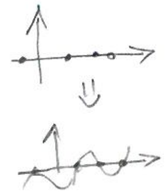
b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $\qquad D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$1 = \frac{1}{x^2}$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

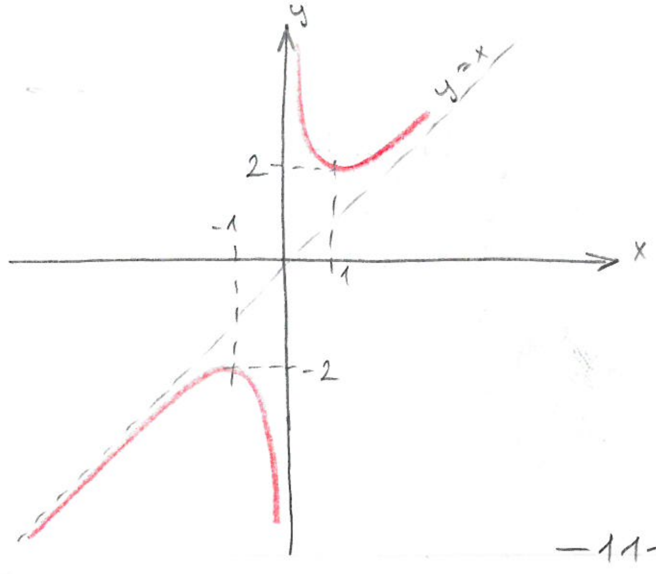


A táblázat: kell bele: - $f'(x)$ ZH-i

- szakadási pontok!

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	$\nexists$	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\nearrow$	lok. max.: $f(-1)=-2$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	lok. min.: $f(1)=2$	$\nearrow$

$f'(-2) > 0$ $\qquad f'(-\frac{1}{2}) < 0$ $\qquad f'(\frac{1}{2}) < 0$ $\qquad f'(2) > 0$



Konvexitás:

$f''(x) = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ nincs mo.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$\ominus$	$\nexists$	$\oplus$
$f(x)$	$\cap$ konkáv	$\nexists$	$\cup$ konvex

9 $f(x)=2\cdot\sin(3x+\pi)+2$

$f'(x)=+6\cdot\cos(3x+\pi)$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6\cdot\cos(3x+\pi)=0$

$$3x+\pi=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}$$

Táblázat előtt:

- Periodikusság: $(3(x+p)+\pi)-(3x+\pi)=2\pi$

$$3p=2\pi$$
$$p=\frac{2\pi}{3}$$

- Emiatt elegendő egy $p=\frac{2\pi}{3}$ hosszúságú szakaszt vizsgálni!

Vizsgáljuk a $k=0$-tól induló periódust:

ez pont az első oszlop + a periódus!

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\left(-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$	$-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)$	$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
	lok. max.: $f(-\frac{\pi}{6})=4$	$\searrow$	lok. min.: $f(\frac{\pi}{6})=0$	$\nearrow$	ua. mint $-\frac{\pi}{6}$ esetén a periódus miatt!

pl.:

$$-\frac{\pi}{6}<0<\underbrace{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}_{\pi/6}$$

$$f'(0)=-6<0$$

pl.:

$$\underbrace{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}_{\pi/6}<\frac{\pi}{4}<\underbrace{-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}_{\pi/2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$

Tehát:

Szé.: – lok. min.: $x_0=\frac{\pi}{6}+n\cdot p=\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$

$f(x_0)=0$

– lok. max.: $x_0=-\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{2\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$

$f(x_0)=4$

Monotonitás: – szig. mon. nő: $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+n\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+n\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Downarrow$

$x\in\left(\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{2}+n\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$

nyílt intv. mert azt írtuk fel, hogy szig. mon.

– szig. mon. csökk: $x\in\left(-\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+n\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Downarrow$

$x\in\left(-\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{6}+n\frac{2\pi}{3}\right)$

Ábrázolva: