Matek A1 / 6. gyakorlat: Differenciálszámítás

1. A faluban teknős futtató versenyt rendeztek. A mérnök kollégák rögzítették Mózsi teknős elmozdulását az idő függvényben, és arra jutottak, hogy Mózsinak a nullponttól való távolságát az $y(t) = t^2$ függvény adja meg, ahol t másodpercben, y pedig méterben értendő. Adjuk meg Mózsi
   a) átlagsebességét a $t \in [0, 2]$ időintervallumban.
   b) átlagsebességét a $t \in [1, 2]$ időintervallumban.
   c) pillanatnyi sebességét a $t = 1$ időpillanatban.

2. Definíció alapján határozzuk meg a függvények deriváltjait! Hol létezik ez a derivált?
   a) $f(x) = \sqrt{x}$
   b) $f(x) = |x|$

3. Deriváljunk!
   a) $6x^7 - 7x^4 + 2x^2$
   b) $2e^x - 18\sin(x) + \log_2(x) + \sqrt[3]{x}$
   c) $-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^{-3}} - \dfrac{1}{x^{0,2}}$
   d) $-3\cos(x) + \log_4(x) + 3e^x - \dfrac{2}{x^3}$
   e) $\sqrt{x^2\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$
   f) $(5x - 3)\sin(x)$
   g) $5^x \ln(x)$
   h) $x^{-2} \arctan(x) \ln(x)$
   i) $ctg(x)$
   j) $\dfrac{\cosh(x)}{-5x + 1}$
   k) $\dfrac{arcth(x)}{2x^2}$
   l) $\dfrac{x^4 - 3x + 7}{5x^2 + 3}$

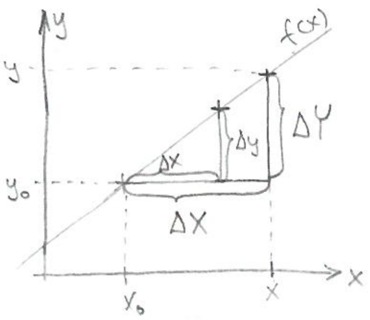
4. Adott az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény és az $e(x) = 4x + 3$ egyenes.
   a) Írjuk fel a függvény $x_0 = 3$-beli érintő egyenesének egyenletét!
   b) Melyik x_0 pontban párhuzamos $f(x)$ érintője az egyenessel?
   c) Melyik x_0 pontban merőleges $f(x)$ érintője az egyenesre?

5. Deriváljunk még egy kicsit!
   a) $\sin(x^2)$
   b) $\sin^2(x)$
   c) $\ln(chx)$
   d) $\log_2(x^3 - \dfrac{1}{x})$
   e) $e^{x^2} - 2\cos(3x)$
   f) $\ln(th(6x))$
   g) $2^{\sqrt{x - x^2}}$
   h) $\arctan\left(\dfrac{2x}{1 + x}\right)$

6. gyakorlat

Differenciálszámítás

Emlékeztető: egyenes egyenlete



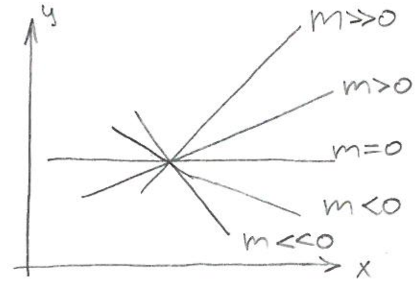
$$y = f(x) = y_0 + \Delta Y = y_0 + \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{m} \cdot \underbrace{\Delta X}_{x-x_0} = y_0 + m(x-x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

m: meredekség

ennyit változik a fv.   ennyit megyek arrébb

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y = m \cdot \Delta x$$

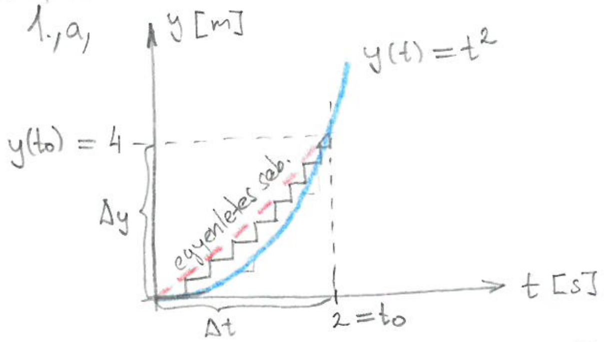


jobbra megyek x-ben

: $\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta y > 0$

10p

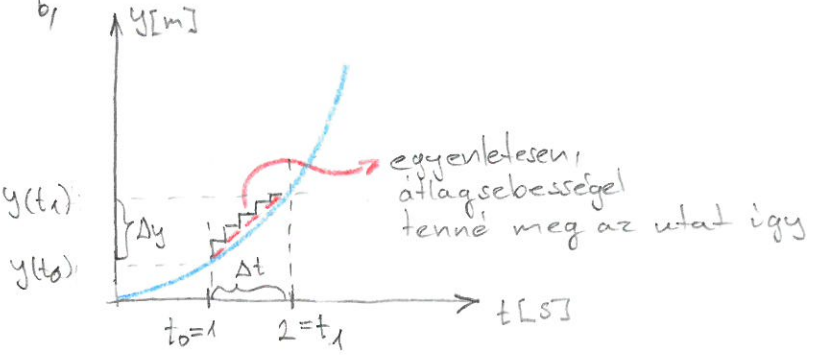
1., a,



Átlagsebesség: $t \in [0, 2]$

$$v_á = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4}{2} = 2\ \frac{m}{s}$$

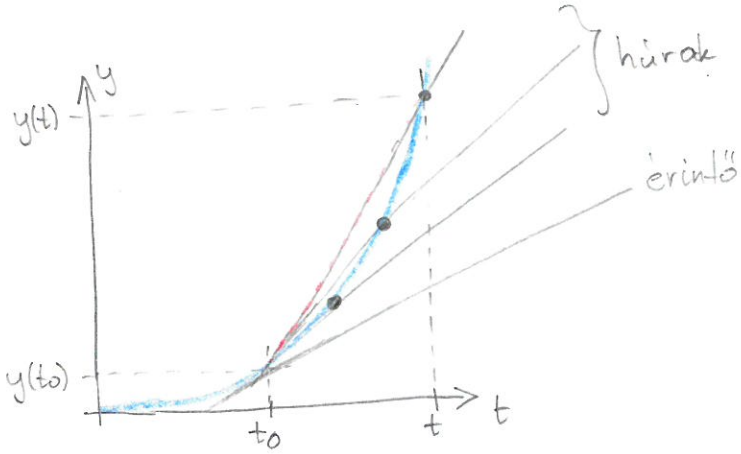
b,



Átlagsebesség: $t \in [1, 2]$

$$v_á = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{2^2 - 1^2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3\ \frac{m}{s}$$

c,



$$\overset{*}{=} \lim_{t\to 1} \frac{t^2-1^2}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)} =$$

$$= \lim_{t\to 1} t+1 = 1+1=2$$

Azaz: $y'(1)=2$

$[t_0, t]$-n az átl. seb.:

$$v_á = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$$ → differencia (különbségi) hányados ⇒ húr meredeksége

Pillanatnyi seb.:

$$v_p = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}_{:=y'(t_0)} \overset{*}{=}$$ → differenciál hányados ⇒ érintő meredeksége

jelölés: $y' = \frac{dy}{dt}$

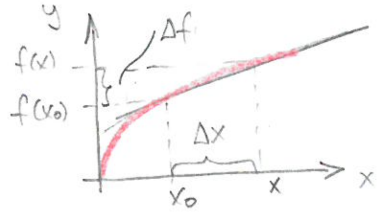
- Derivált: - pontbeli érintő meredeksége
  ⇙
  - megadja, hogy a pont körül hogyan változik a fv.
  → változékonysága a fv.-nek

15p

2, a, $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=?$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\Delta f}}{\underbrace{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} =$$

"$\frac{0}{0}$"



$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Azaz: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ⇒ $x=0$-ban nem diffható, mert az érintő függőleges

5p

b, $f(x)=|x| \Rightarrow f'(x)=0$

megj.: $|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x>0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \\ -x, & \text{ha } x<0 \end{cases}$

I. $x_0>0$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} \overset{x,x_0>0}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

II. $x_0<0$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(-x)-(-x_0)}{x-x_0} = -1$$

III. $x_0 = 0$

- Jobb oldalról:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Mivel $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x$

- Bal oldalról:

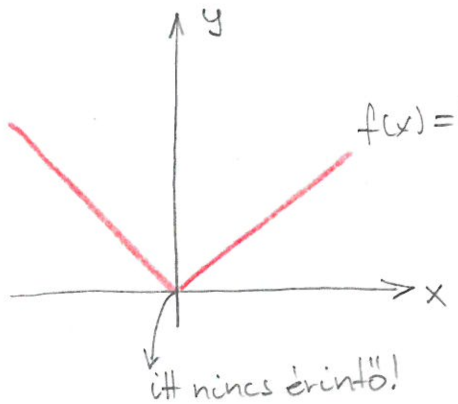
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Mivel $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

- A jobb- és baloldali határértékek különböznek, ezért a két oldali határérték nem létezik.

Azaz: $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \nexists$

Ábrázolva:



$f'(0)$ nem létezik, mert $x = 0$-ban nincs érintő

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \\ \nexists, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Megjegyzés: - deriválhatóság $\Longleftrightarrow$ a fv. grafikonja „sima"
$\swarrow$ nincs benne töréspont

- folytonosság $\not\Rightarrow$ deriválhatóság
$\hookrightarrow$ pl. erre: $|x|$

folyt. $\Leftarrow$ deriv.

20p

Emlékeztető:

Deriválási szabályok: $\rightarrow$ pl.: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$; $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$

1, $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$

pl.: $(\underbrace{2}_{c}\underbrace{x^2}_{f})' = \underbrace{2}_{c} \cdot \underbrace{2x}_{f'}$

2, $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

pl.: $(x^2 + \sin x)' = 2x + \cos x$

3, $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

pl.: $(\underbrace{x^2}_{f}\cdot \underbrace{\sin x}_{g})' = \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} + \underbrace{x^2}_{f}\cdot \underbrace{\cos x}_{g'}$

4, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

pl.: $\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{2x\cdot \sin x - x^2\cdot \cos x}{\sin^2 x}$

5, Láncszabály:

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

-8p--

3, a) $(6x^7-7x^4+2x^2)' = (6x^7)'-(7x^4)'+(2x^2)' =$

$= 6(x^7)' - 7\cdot(x^4)' + 2(x^2)' = 6\cdot 7\cdot x^6 - 7\cdot 4\cdot x^3 + 2\cdot 2\cdot x^1 \overset{*}{=}$

$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

$\overset{*}{=} 42x^6 - 28x^3 + 4x$

b) $(2e^x - 18\sin x + \log_2(x) + \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{x^{\frac{1}{3}}})' = 2\cdot e^x - 18\cos x + \frac{1}{x\cdot \ln 2} + \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} =$

$= 2e^x - 18\cos x + \frac{1}{x\cdot \ln 2} + \frac{1}{3}\cdot \underbrace{x^{-\frac{2}{3}}}$

$\frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^{-3}} - \frac{1}{x^{0,2}}\right)' = (-2x^{-2} + 3x^{+3} - x^{-0,2})' =$

$= -2\cdot(-2)\cdot x^{-3} + 3\cdot(+3)\cdot x^2 - (-0,2)\cdot x^{-1,2} = 4x^{-3} + 9x^2 + 0,2x^{-1,2}$

d) $(-3\cos x + \log_4(x) + 3e^x - \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{2x^{-3}})' = -3\cdot(-\sin x) + \frac{1}{x\cdot \ln 4} + 3\cdot e^x - 2\cdot(-3)\cdot x^{-4} =$

$= 3\sin x + \frac{1}{x\cdot \ln 4} + 3e^x + 6\cdot \frac{1}{x^4}$

e) $\left(\sqrt{x^2\sqrt{x\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{x^{1/3}}}}\right)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cél: } x^n}}{=} \left(\sqrt{x^2\underbrace{\sqrt{x^{\frac{4}{3}}}}_{x^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}}}\right)' = \left(\sqrt{\underbrace{x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}}_{x^{2+\frac{2}{3}}}}\right)' =$

$x^{1+\frac{1}{3}}$

$= \left(\sqrt{x^{\frac{8}{3}}}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}$

f) $\left(\underbrace{(5x-3)}_{f}\cdot\underbrace{\sin x}_{g}\right)' = \underbrace{(5-0)}_{f'}\cdot\underbrace{(\sin x)}_{g} + \underbrace{(5x-3)}_{f}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{g'} = 5\sin x + (5x-3)\cdot\cos x$

g) $\left(\underbrace{5^x}_{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g}\right)' = \underbrace{5^x\cdot\ln 5}_{f'}\cdot\underbrace{\ln x}_{g} + \underbrace{5^x}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}$

h) $\left(\underbrace{x^{-2}}_{f}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}(x)}_{g}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{h}\right)' = \underbrace{(-2\cdot x^{-3})}_{f'}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}x}_{g}\cdot\underbrace{\ln x}_{h} + \underbrace{x^{-2}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'}\cdot\underbrace{\ln x}_{h} + \underbrace{x^{-2}}_{f}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}x}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{h'}$

$(\underbrace{f\cdot g}_{y=f\cdot g}\cdot h)' = (y\cdot h)' = y'\cdot h + y\cdot h' = \underbrace{(f\cdot g)'}_{f'\cdot g+f\cdot g'}\cdot h + (f\cdot g)\cdot h' = f'\cdot g\cdot h + f g' h + f g h'$

i) $(\mathrm{ctg}(x))' = \left(\frac{\overbrace{\cos x}^{f}}{\underbrace{\sin x}_{g}}\right)' = \frac{\overbrace{(-\sin x)}^{f'}\cdot\overbrace{\sin x}^{g} - \overbrace{\cos x}^{f}\cdot\overbrace{\cos x}^{g'}}{\underbrace{\sin^2 x}_{g^2}} = \frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$

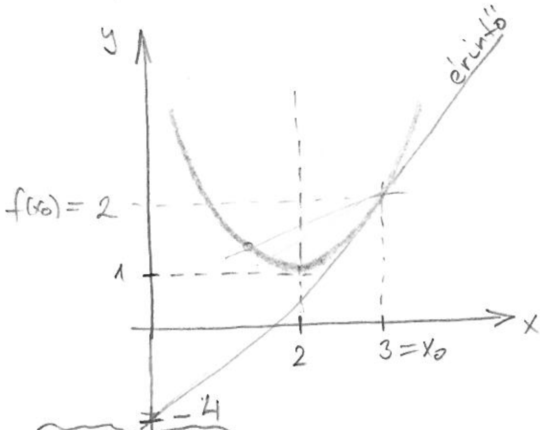
j) $\left(\frac{\overbrace{\mathrm{ch}x}^{f}}{\underbrace{-5x+1}_{g}}\right)' = \frac{\overbrace{\mathrm{sh}x}^{f'}\cdot\overbrace{(-5x+1)}^{g} - \overbrace{\mathrm{ch}x}^{f}\cdot\overbrace{(-5)}^{g'}}{(-5x+1)^2}$

k) $\left(\frac{\mathrm{arcth}x}{2x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{1-x^2}\cdot 2x^2 - \mathrm{arcth}x\cdot 4x}{4x^4}$

l) $\left(\frac{x^4-3x+7}{5x^2+3}\right)' = \frac{(4x^3-3)\cdot(5x^2+3)-(x^4-3x+7)(10x)}{(5x^2+3)^2}$

30p.

4./ $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 + 1$



a, $x_0 = 3$

$$y = \overset{?}{y_0} + \overset{?}{m}(x - \overset{\checkmark}{x_0}) \quad \Rightarrow \quad y = 2 + 2(x-3)$$

$$\Downarrow$$

$y_0 = f(x_0) = f(3) = 2$

$$y = -4 + 2x$$

$m = f'(x_0) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

$\uparrow$

$f'(x) = 2x - 4$

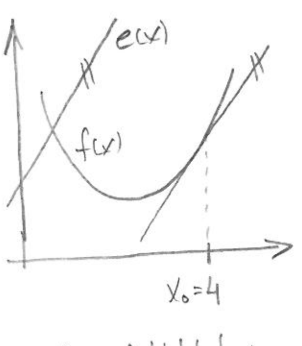
b, $e(x) = \underset{m}{\underline{4}}x + 3$

Párhuzamosság feltétele : $m_e = m_f$

$$\left.\begin{aligned} m_e &= e'(x) = 4 \\ m_f &= f'(x) = 2x-4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 4 &= 2x - 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

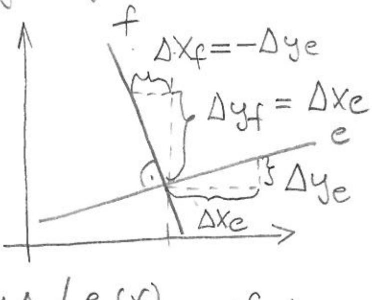
a érintővel e.

Azaz $x_0 = 4$-ben párhuzamos



c, Merőlegesség feltétele: $m_e \cdot m_f = -1$

Ok:



$$m_e = \frac{\Delta y_e}{\Delta x_e} \quad , \quad m_f = \frac{\Delta y_f}{\Delta x_f} = \frac{\Delta x_e}{-\Delta y_e} = -\frac{1}{m_e}$$

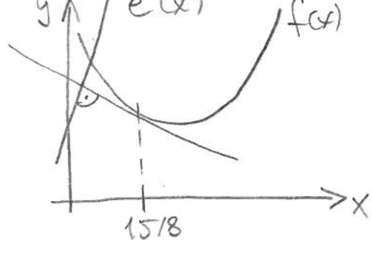
Most: $m_e = e'(x) = 4$

$m_f = f'(x) = 2x - 4$

$4 \cdot (2x-4) = -1$

$2x = \frac{16}{4} - \frac{1}{4}$

$x = \frac{15}{8} = 1{,}875$



15 p

/ Láncszabály:

$$f(g(x)) = f \circ g(x)$$

$$f(g(x)) \xleftarrow[f]{} g(x) \xleftarrow[g]{} x$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

a) $$\big(\sin(x^2)\big)' = \underbrace{\cos(x^2)}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}$$

$$\sin(x^2) \xleftarrow[f]{\sin(\dots)} x^2 \xleftarrow[g]{(\dots)^2} x$$

külső fv. belső fv.

b) $$\big((\sin x)^2\big)' = \underbrace{2(\sin x)}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} = \sin(2x)$$

$$\sin^2 x \xleftarrow[f]{(\dots)^2} \sin x \xleftarrow[g]{\sin(\dots)} x$$

c) $$\big(\ln(\operatorname{ch} x)\big)' = \overbrace{\frac{1}{\operatorname{ch} x}}^{f'(g(x))} \cdot \overbrace{\operatorname{sh} x}^{g'(x)} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$$

$$\ln(\operatorname{ch} x) \xleftarrow[f]{\ln(\dots)} \operatorname{ch} x \xleftarrow[g]{\operatorname{ch}(\dots)} x$$

d) $$\Big(\log_2\big(x^3 - \tfrac{1}{x}\big)\Big)' = \underbrace{\frac{1}{\big(x^3 - \frac{1}{x}\big) \cdot \ln 2}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\big(3x^2 - (-1) \cdot x^{-2}\big)}_{g'(x)} = \frac{3x^4 + 1}{(x^5 - x) \cdot \ln 2}$$

$$\log_2\big(x^3 - \tfrac{1}{x}\big) \xleftarrow[f]{\log_2(\dots)} x^3 - \frac{1}{x} \xleftarrow[g]{(\dots)^3 - \frac{1}{(\dots)}} x$$

e) $$\big(e^{x^2 - 2\cos(3x)}\big)' = \underbrace{e^{x^2 - 2\cos(3x)}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\big(x^2 - 2\cos(3x)\big)'}_{g'(x)} \overset{*}{=}$$

külső: $e^{(\dots)} \Rightarrow f(x)$

belső: kitevő $\Rightarrow g(x)$

$$\cos(3x) \xleftarrow[f]{\cos(\dots)} 3x \xleftarrow[g]{3\cdot(\dots)} x$$

$$\overset{*}{=} e^{x^2 - 2\cos(3x)} \cdot \Big(2x - 2\underbrace{(-\sin(3x))}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{3}_{g'(x)}\Big) =$$

$$= e^{x^2 - 2\cos(3x)} \cdot \big(2x + 6\sin(3x)\big)$$

20p

f) $\left(\underbrace{\ln}_{f}\big(\underbrace{\text{th}(6x)}_{g}\big)\right)' = \underbrace{\frac{1}{\text{th}(6x)}}_{f'(g)} \cdot \underbrace{\big(\overset{f}{\text{th}}\,\overset{g}{(6x)}\big)'}_{g'} =$

$$= \frac{1}{\text{th}(6x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\text{ch}^2(6x)}}_{f'(g)} \cdot \underbrace{6}_{g'} = \frac{\text{ch}\,6x}{\text{sh}\,6x} \cdot \frac{1}{\text{ch}^2 6x} \cdot 6 = \frac{6}{\text{sh}(6x)\cdot\text{ch}(6x)} =$$

$$= \frac{12}{\text{sh}(12x)}$$

g) $\big(\underset{f}{2}^{\overset{}{\underset{g}{\sqrt{x-x^2}}}}\big)' = \underbrace{2^{\sqrt{x-x^2}}\cdot\ln 2}_{f'(g)} \cdot \underbrace{\big(\sqrt{x-x^2}\big)'}_{g'} = 2^{\sqrt{x-x^2}}\cdot\ln 2\cdot\left(\big(\underbrace{x-x^2}_{g}\big)^{\overset{f}{\frac{1}{2}}}\right)' =$

$$= 2^{\sqrt{x-x^2}}\cdot\ln 2\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{f'(g)}\cdot\underbrace{(1-2x)}_{g'}\right)$$

h) $\left(\underset{f}{\text{arctg}}\ \underset{g}{\frac{2x}{1+x}}\right)' = \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2}}_{f'(g)} \cdot \underbrace{\left(\frac{2x}{1+x}\right)'}_{g'} = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(\frac{2\cdot(1+x)-2x\cdot 1}{(1+x)^2}\right) =$

10p

$$= \frac{2}{(1+x)^2+(2x)^2} = \frac{2}{5x^2+2x+1}$$

Függvény	Függvény deriváltja
$c\cdot f(x)$	$c\cdot f'(x)$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$