Matek A1 / 5. gyakorlat: Függvények határértéke, folytonossága

1. Legyen $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$. Ábrázoljuk a függvényt! Az ábrázolás segítségével "sejtsük meg" a határértékeket, és bizonyítsuk be azokat a definíció segítségével.

   a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

   A szokásos módszerekkel is számoljuk ki a fenti határértékeket.

2. Határozzuk meg a függvények $\pm\infty$-ben vett határértékeit!

   a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^9 + 4x^5 + 3)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1 - x^3}{-2x^2 + 4}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 5} + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5 + 102} - x}$

   d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3^{2x} - 1}{2^x - 9^x}$ e) $\lim\limits_{x\to \infty} (x\sqrt{x^2+1} - x)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x\right)$

   g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}\right)^{\sqrt{x}}$

   Határozzuk meg a függvények x_0-ban vett határértékeit, amennyiben azok léteznek! Vizsgáljuk meg hogyan viselkedik a függvény x_0 körül!

3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$

4. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$ d) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6}$

   Számítsuk ki a határértékeket, amennyiben léteznek!

5. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(8x)}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos(9x^2)}$

6. a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{1 + 4^{3-x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{4}{1-x}}$

7. Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát, és azt is hogy hol folytonosak! A szakadási helyeken folytonossá tehetőek a függvények?

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 3x + 2}$ b) $f(x) = \dfrac{3}{2^{\frac{2}{x}} + 1}$

8. Válasszuk meg a paraméterek értékét úgy (ha lehetséges), hogy a függvények folytonosak legyenek!

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{2x - 2} & \text{, ha } x < 1 \\ 3x + a & \text{, ha } x \geq 1 \end{cases}$ a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{, ha } x < -\pi \\ 3x + a & \text{, ha } -\pi \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{, ha } x > 3 \end{cases}$

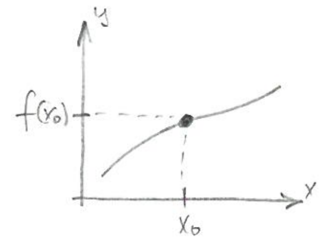
5. gyakorlat

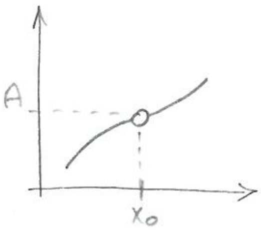
Függvények határértéke, folytonossága

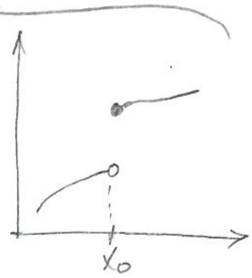
Elm.:

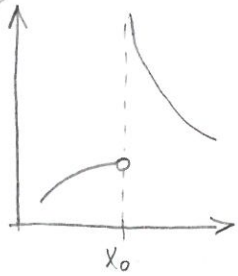
szakadás

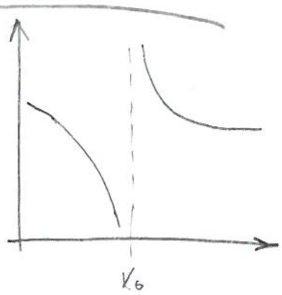
elsőfajú szak. — másodfajú szak.











x_0-ban folytonos fv.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

x_0 hézagpont:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$

megszüntethető szak.

„ugrás"

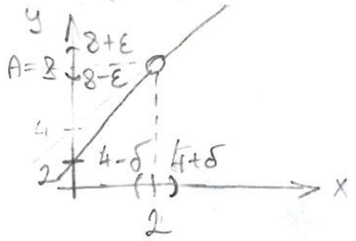
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

nem megszüntethető szak.

10p.

1. a) $\lim\limits_{x\to 2} \underbrace{\frac{2x^2-8}{x-2}}_{f(x)}$

$f(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 2(x+2) = 2x+4, \quad \text{ha } x \neq 2$



sejtés: $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 8$

Def.: $|f(x) - A| < \varepsilon$

$|2x+4-8| < \varepsilon$

$|2x-4| < \varepsilon$

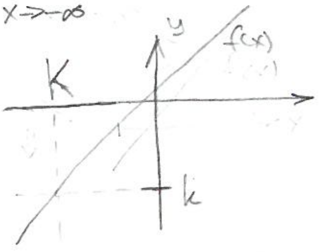
$-\varepsilon < 2x-4 < \varepsilon$

$4-\varepsilon < 2x < 4+\varepsilon$

$2-\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\delta_{max}} < x < 2+\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\delta_{max}} \quad \Rightarrow \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ ✓

pl.: $\varepsilon = 0,1$ sugarú környezetében legyen $f(x)$ A-nak: ehhez kell, hogy X az $x_0 = 2$-nek $\frac{0,1}{2} = 0,05$-nél kisebb sugarú környezetében legyen

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x+4) = -\infty$ sejtés: $-\infty$



$2x+4 < k$, k tetszőleges

$2x < k-4$

$x < \underbrace{\frac{k-4}{2}}_{:=K}$

Tehát: $K = \frac{k-4}{2}$ ✓

Ha $x < K$, akkor $f(x) < k$.

10p

2, Limeszek $\pm\infty$-ben: sorozatokhoz hasonló:

a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{-2x^9}_{\text{domináns} \Rightarrow \lim:\ -\infty}+4x^5+3\right) \overset{"-\infty+\infty"}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x^5}_{\to-\infty}\cdot\underbrace{(-2x^4+4)}_{\to-\infty}+3\right) = \text{"}-\infty\cdot(-\infty)\text{"} = \underline{\underline{+\infty}}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3}{-2x^2+4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}-x}{-2+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}} = \text{"}\frac{0-(-\infty)}{-2+0}\text{"} = \underline{\underline{-\infty}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\sqrt[3]{x^2-5}}^{\text{kb } x^{\frac{2}{3}}}+\sqrt{x}^{\,=x^{\frac{1}{2}}}}{\underbrace{\sqrt[6]{x^5+102}}_{\text{kb } x^{\frac{5}{6}}}-x}\cdot\frac{x}{x} \overset{"\frac{\infty}{\infty-\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}-\frac{5}{x^3}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{\sqrt[6]{\frac{x^5}{x^6}+\frac{102}{x^6}}-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[6]{\frac{1}{x}+\frac{102}{x^6}}-1} = \frac{0+0}{0-1} = \underline{\underline{0}}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{2x}-1}{2^x-9^x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{9^x-1}{2^x-9^x}\cdot\frac{\frac{1}{9^x}}{\frac{1}{9^x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{9^x}}{\left(\frac{2}{9}\right)^x-1} = \frac{1-0}{0-1} = \underline{\underline{-1}}$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{x\cdot\sqrt{x^2+1}+x}{x\cdot\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2+1)-x^2}{x\cdot\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{\underbrace{x\cdot\sqrt{x^2+1}+x}_{\text{kb. } x^2}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\cdot}\frac{x^2}{x^2} =$$

"$\infty-\infty$"

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \text{"}\frac{\infty}{1+0}\text{"} = \underline{\underline{\infty}}$$

f) $$\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}}_{\downarrow\ \infty}-x\right)}_{"\infty-\infty"} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+3x^2-x(x^2+1)}{x^2+1}\right) \overset{*}{=}$$

"$\infty-\infty$" $\Rightarrow$ cél: egy tört legyen, azt általában könnyebb vizsgálni

$$\overset{*}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+3x^2-x^3-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{3x^2-x}{x^2+1}}_{"\frac{\infty}{\infty}"}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \ldots = \underline{\underline{3}}$$

g) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{x}} =$$

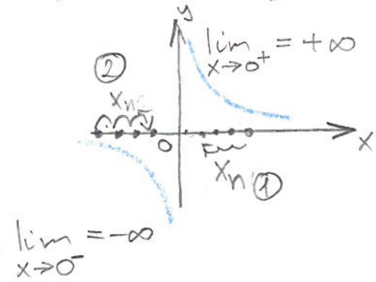
"$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$" $\to$ cél: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{x}}\right)^{-\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{x}}}_{0}\cdot\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}}_{e^{1/\sqrt{2}}}\Bigg]^{-1} = 0\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{0}}$$

10p.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists$



Átviteli elv.:

1., Kell egy sorozat, hogy:

$x_n \searrow 0$, pl.: $x_n = \frac{1}{n}$

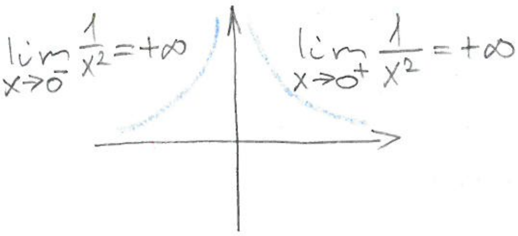
$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} n = \infty$

2., Kell egy sorozat, hogy:

$x_n \nearrow 0$, pl.: $x_n = -\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} -n = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, mert $x^2 > 0$



c) $\lim\limits_{x \to 0} \overbrace{\frac{x}{|x|}}^{f(x)} = \nexists$, mert a jobb- és bal oldali hé.-ek különböznek.

Bal oldali.:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$|x| = -x$, ha $x < 0$

Jobb oldali:

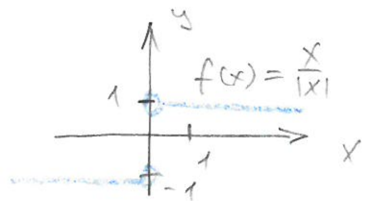
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \dots = 1$

$|x| = x$, ha $x > 0$

Megj.:

$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{-x}, & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x}{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

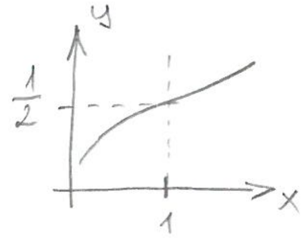
$= \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$



10p

4./ a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x}{\underbrace{x^2-x-6}} = \dfrac{1^3-4\cdot 1}{1^2-1-6} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$

Értelmezési tartományán folytonos $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$



b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \text{"} \dfrac{-8+8}{4+2-6} = \dfrac{0}{0} \text{"} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x\cdot(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x-3)\cancel{(x+2)}} \overset{*}{=}$

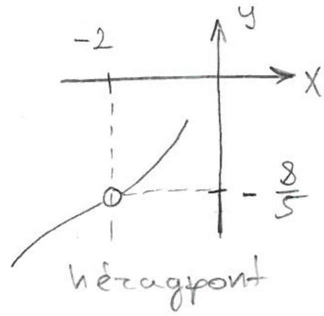
céli: egyszerűsítsük a törtet

$x^3-4x = x(x^2-4) = x\cdot(x-2)(x+2)$

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$

$x_{1,2} = \dfrac{+1\pm\sqrt{1^2+24}}{2} = \dfrac{1\pm 5}{2} < \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$

$\overset{*}{=} \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x\cdot(x-2)}{x-3} = \dfrac{-2(-2-2)}{-2-3} = \dfrac{8}{-5} = -\dfrac{8}{5}$



c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \text{"} \dfrac{0}{0} \text{"} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\cdot(x-2)}{x-3} = \text{"} \dfrac{3\cdot(3-1)}{3-3} = \dfrac{6}{0} \text{"} = \cancel{\exists}$

mint előbb

nem ∞!

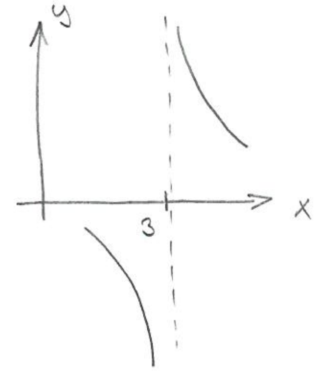
Nevezőben $x^{\text{páratlan}}$ jellegű:

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x\cdot(x-2)}{x-3} = \text{"} \dfrac{6}{3^+-3} = \dfrac{6}{0^+} \text{"} = +\infty$

3-nál kicsit nagyobb — 0-nál kicsit nagyobb

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x\cdot(x-2)}{x-3} = \text{"} \dfrac{6}{3^--3} = \dfrac{6}{0^-} \text{"} = -\infty$

0-nál kicsit kisebb



nem megsz. szakadás

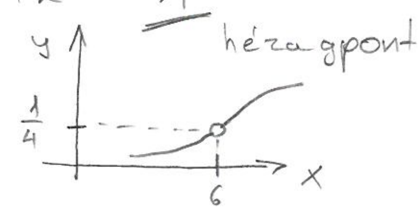
15p

d) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \text{"} \dfrac{0}{0} \text{"} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{(\sqrt{x-2})^2-4} =$

céli: egyszerűsítés

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$= \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\cancel{\sqrt{x-2}-2}}{\cancel{(\sqrt{x-2}-2)}(\sqrt{x-2}+2)} = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$



5p

Ismert: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad$ "$\frac{0}{0}$"

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3 \doteq \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$

Legyen $y=3x$.
Ha $x\to 0$, akkor $y\to 0$ is teljesül

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(5x)}{5x}}\cdot\frac{3x}{5x} = \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

⇓

Cél: sin-ban ugyanaz legyen, amivel osztunk

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(8x)} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(8x)}\cdot\cos(8x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(8x)}{8x}}\cdot\frac{3x}{8x}\cdot\cos(8x) \overset{*}{=}$

⇓

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\overset{*}{=} \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{8}\cdot 1 = \frac{3}{8}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = "\infty-\infty" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = "\frac{1-1}{0}" \overset{*}{=}$

⇓

cél: tört legyen

Azonosságok: $\left.\begin{array}{l}\sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x\end{array}\right\}$ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad$, megj.: $\sin^2 x = (\sin x)^2$

$\Downarrow y = 2x$

$1-\cos y = 2\cdot\sin^2\frac{y}{2}$

$\overset{*}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\sin x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\underbrace{\frac{\overbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2}^{x^2/4}}{x}}_{\frac{x}{4}} = \frac{2\cdot 1^2}{1}\cdot\frac{0}{4} = 0$

Cél: $\frac{\sin x}{x}$ legyen

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(9x^2)} = "\frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}" = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\cdot\left(\sin\frac{9x^2}{2}\right)^2} =$

cél: $\frac{\sin x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\cdot\left(\frac{\sin\frac{9x^2}{2}}{\frac{9x^2}{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{9x^2}{2}\right)^2} = "\frac{1}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot(+\infty)" = +\infty$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2}$

20 p

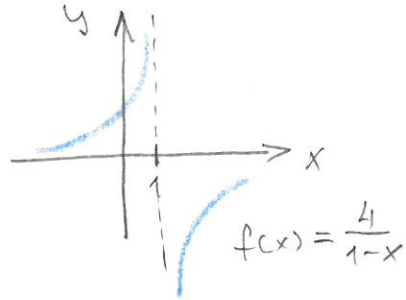
6, a, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{1+4^{3-x}} = \dfrac{1}{1+4^{3-3}} = \dfrac{1}{1+1} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

b, $\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{4}{1-x}} = {}^{\shortparallel}\, e^{\frac{4}{1-1}} \underbrace{\neq e^{\infty} = \infty}_{\text{Így hibás lenne!}}{}^{\shortparallel}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4}{1-x} = \nexists$, mert: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4}{1-x} = {}^{\shortparallel}\, \dfrac{4}{1-1^+} = \dfrac{4}{0^-} {}^{\shortparallel} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{4}{1-x} = {}^{\shortparallel}\, \dfrac{4}{\underset{\text{pl. } 0{,}99999\ldots}{1-1^-}} = \dfrac{4}{\underset{0{,}000001}{0^+}} {}^{\shortparallel} = +\infty$

Ábrázolva:



Ezt felhasználva:

$\left.\begin{aligned} &\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{4}{1-x}} = {}^{\shortparallel} \ldots = \lim\limits_{x \to 1^+} e^{-\infty} {}^{\shortparallel} = \underline{\underline{0}} \\ &\lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{4}{1-x}} = {}^{\shortparallel} \ldots = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{+\infty} {}^{\shortparallel} = \underline{\underline{+\infty}} \end{aligned}\right\} \lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{4}{1-x}} = \nexists$

Vagy átviteli elvvel:

1, Legyen $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, így $x_n \searrow 1$ monoton fogyóan 1-hez tart

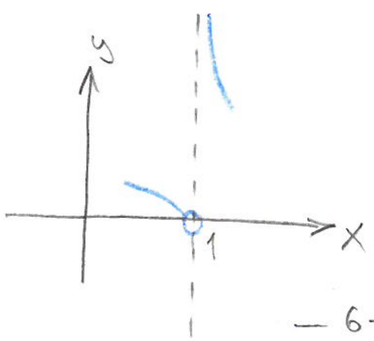
$\lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{4}{1-(1+\frac{1}{n})}} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$

2, Legyen $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, így $x_n \nearrow 1$

$\lim\limits_{n \to \infty} e^{\frac{4}{1-(1-\frac{1}{n})}} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{n} = \infty$

A jobb- és bal oldali határérték különbözik, így: $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{4}{1-x}} = \nexists}}$

Ábrázolva:



-15e-c, Tört függvények: ott lehet nem folytonos, ahol a nevező zérus. (itt nincs is értelmezve)

a, $f(x) = \dfrac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2} =$

Vizsgáljuk az értelmezési tartományt:

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow$ itt nincs értelmezve a tört

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} < \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Azaz $f(x)$ folytonos a teljes $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 1\}$ értelmezési tartományon.

Szakadási helyek tehát:

1, $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2} \overset{*}{=}" \frac{1+3-10}{1-3+2} = \underbrace{\frac{-6}{0} \neq -\infty"}_{\text{ez így hibás lenne}}$$

Egyszerűsítsük $f(x)$-et:

$$f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x^2-3x-2} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+5}{x-1}$$

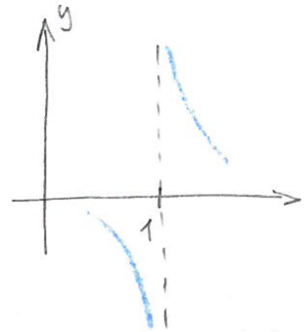
Ezzel:

$$\overset{*}{=} \lim_{x \to 1} \frac{x+5}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+5}{x-1} =" \frac{1+5}{1^+-1} = \frac{6}{0^+}" = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+5}{x-1} =" \frac{1+5}{1^--1} = \frac{6}{0^-}" = -\infty$$

Ábrázolva:

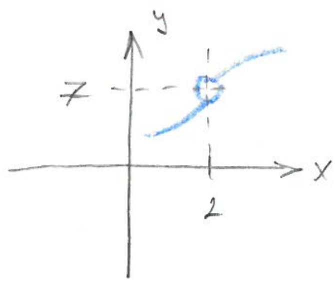


Ez nem megszüntethető szakadás.

2, $x_0 = 2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x-1} = \frac{2+5}{2-1} = 7$$

Ábrázolva:



Ez megszüntethető szakadás.

10p

b/ $f(x) = \dfrac{3}{2^{\frac{2}{x}}+1}$

Vizsgáljuk az értelmezési tartományt:

A törtek nevezői:

- $\dfrac{2}{x} \Rightarrow \quad x \neq 0$
- $\dfrac{3}{2^{\frac{2}{x}}+1} \Rightarrow \quad 2^{\frac{2}{x}}+1 \neq 0$

$2^{\frac{2}{x}} \neq -1 \Rightarrow$ Biztos teljesül, mert $\underbrace{\text{pozitív szám}}_{2}$ hatványa mindig pozitív.

Azaz: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

A szakadási hely tehát: $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}}+1} \;\text{"}=\; \frac{3}{2^{\frac{2}{0}}+1} \neq \underbrace{\frac{3}{2^{\infty}+1} = 0\text{"}}_{\text{Így hibás lenne!}}$$

- Bal oldalról:

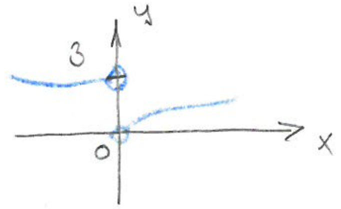
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}}+1} \;\text{"}=\; \frac{3}{2^{\frac{2}{0^-}}+1} = \frac{3}{2^{-\infty}+1} = \frac{3}{0+1}\text{"} = \underline{\underline{3}}$$

Jobb oldalról:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2^{\frac{2}{x}}+1} \;\text{"}=\; \frac{3}{2^{\frac{2}{0^+}}+1} = \frac{3}{2^{\infty}+1} = \frac{3}{+\infty}\text{"} = \underline{\underline{0}}$$

- Vagy átviteli elvvel: $x_n = -\frac{1}{n}$, illetve $x_n = \frac{1}{n}$

Ábrázolva:



8./ a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-x+1}{2x-2} & , x<1 \\ 3x+a & , x\geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-2x^2-x+1}{2x-2} = \frac{1-2-1+1}{2\cdot 1^- -2} = \frac{-1}{2^- -2} =$$

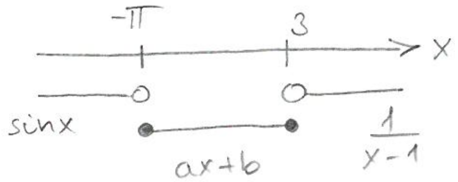
$$= \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Kellene, hogy: $3x+a=\infty$ $\Rightarrow$ nem létezik ilyen $a \in \mathbb{R}$.

Nem tehető folytonossá.

b) $f(x)=\begin{cases} \sin x & , x<-\pi \\ ax+b & , -\pi\leq x\leq 3 \\ \dfrac{1}{x-1} & , 3<x \end{cases}$

Ábrázoljuk:



• $\lim\limits_{x\to -\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -\pi^-} \sin x = \sin(-\pi) = 0$

• $\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$

Így kell: $ax+b=0$, ha $x=-\pi$ $\Rightarrow$ $-a\pi+b=0$

és $ax+b=\frac{1}{2}$, ha $x=3$ $\quad 3a+b=\frac{1}{2}$ $\quad \ominus$ $\Downarrow$

$\lim\limits_{x\to -\pi+}(ax+b)=0$

$\lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b)=3$

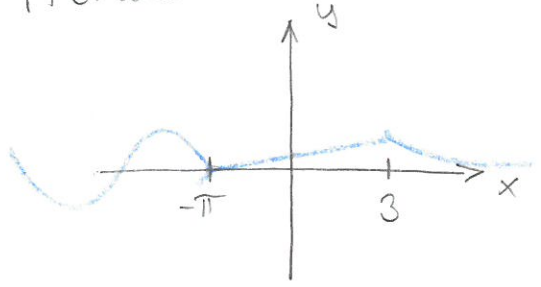
$a(-\pi-3) = \dfrac{-1}{2}$

$a = \dfrac{+1}{2\pi+6}$

$b = a\pi = \dfrac{+\pi}{2\pi+6}$

20p

Ábrázolva:



c) $f(x) = \frac{1}{\sin(3x)}$

Ért. tart.:

$\sin(3x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \neq k\pi$

$x \neq \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$

1./ $$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{1-x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{x^3}}-\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{x}}}=\underbrace{\frac{-1}{0-0}=-\infty}$$

Hibás!
Ok: „0-0" előjele számít

Megoldás: ha a nevező legnagyobbjával osztunk: nem lesz „0-0" a nevező. 0-val osztani „problémás".

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{1-x^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{-\infty}{0-1}=+\infty$$

Ez a helyes!

2./ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\text{„}\frac{1}{(0+0)}\text{"}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\text{„}\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\text{„}\frac{1}{(1+0)-1}=\frac{1}{(0+0)}\text{"}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\text{„}\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$$