Matek A1 / 4. gyakorlat: Numerikus sorok

1. A definíció segítségével döntsük el, hogy konvergens-e a (teleszkópikus) sor, és ha igen, akkor adjuk meg a sorösszeget!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,\right)$ c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-5n+6}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1+(-1)^n}{n(n+4)}$

2. Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{11}{3^n}$ geometriai sor kezdő tagját, kvóciensét, és a sorösszeget!

3. Határozzuk meg a sorok összegét!

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{-1}{e^{2n}}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2^{3n+1}}{10^{n-1}}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+4^{n+1}}{7^n}$

4. Döntsük el a majoráns vagy a minoráns kritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+10}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+4)}}$

5. Döntsük el a hányados vagy a gyök kritérium segítségével, hogy konvergensek-e a következő sorok!

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\arctan(n)}{\pi}\right)$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n^4}{n!}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{3n}\cdot n^7}{3^{2n+1}}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^{n^2}$

6. Vizsgáljuk meg konvergencia szempontjából a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+2}$ sort!

7. Vizsgáljuk meg a sorokat konvergencia, abszolút konvergencia, feltételes konvergencia szempontjából!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{5^n}{2^n+10^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n^4}}$

Megjegyzések:

1. Sorösszeg: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{k}a_n\right)$

2. Ha egy feladat sorösszeg kiszámolását kéri, akkor általában teleszkopikus vagy geometriai sorral van dolgunk.

3. Szükséges feltétel konvergenciára: Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergens, akkor az a_n sorozat 0-hoz tart. Tehát ha tudjuk, hogy a_n határértéke nem 0, akkor a sor divergens.

4. Alkalmazott kritériumok pozitív tagú sorokra:

Minoráns kritérium: Ha tudunk mondani b_n sorozatot úgy, hogy $b_n<a_n$ egy adott $n=N$ indextől teljesül, továbbá $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ divergens, akkor az alulról becsült $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ is divergens.

Majoráns kritérium: Ha tudunk mondani b_n sorozatot úgy, hogy $b_n>a_n$ egy adott $n=N$ indextől teljesül, továbbá $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ konvergens, akkor a felülről becsült $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ is konvergens.

Hányados kritérium: Vizsgáljuk $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját. Ezt megtehetjük a $c = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados vizsgálatával. A sor konvergens $c < 1$ esetén, divergens $c > 1$ esetén, a $c = 1$ esetben pedig a kritérium segítségével a kérdés nem dönthető el.

Gyökkritérium: Vizsgáljuk $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergenciáját. Ezt megtehetjük a $c = \sqrt[n]{a_n}$ érték vizsgálatával. A sor konvergens $c < 1$ esetén, divergens $c > 1$ esetén, a $c = 1$ esetben pedig a kritérium segítségével a kérdés nem dönthető el.

5. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ alakú sorokat Leibniz-soroknak nevezzük. Itt b_n pozitív tagú sorozat monoton fogyóan 0-hoz tart.

6. Speciális sorok:
   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, amennyiben $|q| < 1$ teljesül. Amennyiben $q \geq 1$ teljesül, a sor összege $+\infty$, amennyiben pedig $q \leq -1$ teljesül, akkor a sornak nem létezik összege.
   $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ sor konvergens, ha $\alpha > 1$ teljesül, illetve divergens, ha $\alpha \leq 1$ teljesül.

4. gyakorlat

Numerikus sorok

• sorozat: pl.: $a_n = \frac{1}{n}$

$\Downarrow$

• sorozat elemeinek összege: $\Rightarrow$ sor részletösszege

$S_k = \sum_{n=1}^{n=k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$

pl.:

szumma tulajdonságai:

1, $\sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n$, $c \in \mathbb{R}$ kiemelhető az összegből

mert: $\underbrace{c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_N}_{\sum c \cdot a_n} = c \cdot \underbrace{(a_1 + a_2 + a_N)}_{\sum a_n}$

2, $\sum a_n + b_n = \sum a_n + \sum b_n$

• sor: $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n \right) = \lim_{k\to\infty} S_k$

Míre jó?

pl.:

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (\dots)$

Fp.

Def. segítségével: részletösszeg, sorösszeg

1, a, $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right) = \lim_{k\to\infty} (-1 + \sqrt{k+1}) = +\infty$

$S_k = \forall_{k \in \mathbb{Z}^+} \sum_{n=1}^{k} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \underbrace{(\sqrt{1+1} - \sqrt{1})}_{n=1} + (\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3+1} - \sqrt{3}) + \dots$

$\dots + \underbrace{(\sqrt{k-1+1} - \sqrt{k-1})}_{n=k-1} + \underbrace{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}_{n=k} =$

$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) + (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) =$

$= -\sqrt{1} + \sqrt{k+1} = -1 + \sqrt{k+1}$

b, $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} a_n \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\underset{1}{1} - \underset{\to 0}{\frac{1}{k+1}} \right) = 1 - 0 = 1$

$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \overset{*}{=}$

$\overset{*}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$

$\downarrow k\to\infty$

1

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n \cdot (n+1)} = \frac{n(A+B) + A}{n \cdot (n+1)} =$

parc. törtekre bontás

$1: \quad 1 = A$

$n: \quad A + B = 0$ $\Big\}$ $B = -1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

10p

c) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2-5n+6}}_{a_n}$

Cél: legyen teleszkopikus

$$a_n = \frac{A}{(n+C)} + \frac{B}{(n+D)}$$

$$a_n = \frac{0\cdot n+1}{n^2-5n+6} = \frac{1}{(n-3)(n-2)} = \frac{A}{(n-3)} + \frac{B}{(n-2)} = \frac{An-2A+Bn-3B}{(n-3)\cdot(n-2)} = \frac{n(A+B)+1\cdot(-2A-3B)}{(n-3)\cdot(n-2)}$$

$n^2-5n+6=0$

$n_{1,2} \to 3$, $\to 2$

$0 = A+B \Rightarrow 0 = 2A+2B$ ⊕ $1 = -B \Rightarrow B = -1$

$1 = -2A-3B$ $\qquad A = 1$

$$a_n = \frac{1}{n-3} + \frac{-1}{n-2} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}$$

vagy: $\displaystyle\frac{1}{(n-3)\cdot(n-2)} = \frac{(n-3)+\dots}{(n-3)\cdot(n-2)}$

Részletösszeg:

$$\sum_{n=4}^{k} a_n = \sum_{n=4}^{k}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right) = \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{k-3}}-\frac{1}{k-2}\right) = 1-\frac{1}{k-2}$$

Sorösszeg:

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=4}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{k-2}}_{\to 0}\right) = \underline{1}$$

_9p_

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n\cdot\frac{1+(-1)^n}{n\cdot(n+4)}}_{a_n}$

kiszámoljuk: $n=1$: $a_1 = (-1)^1\cdot\dfrac{\overbrace{1+(-1)^1}^{0}}{(\dots)} = 0$ → páratlan

$n=2$: $a_2 = \underbrace{(-1)^2}_{1}\cdot\dfrac{\underbrace{1+(-1)^2}_{2}}{(\dots)} = 1\cdot\dfrac{2}{(\dots)}$ → páros

$n=3$:

$n=4$:

$$a_{2k} = (-1)^{2k}\,\frac{1+(-1)^{2k}}{2k\cdot(2k+4)} = \frac{2}{2k(2k+4)}$$

↑ páros

$$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}\,\frac{\overbrace{1+(-1)^{2k+1}}^{0}}{(\dots)} = 0$$

↑ páratlan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_{2k-1}}_{0}}_{0} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cancel{2}^{\,1}}{2k(2k+4)} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot(k+2)}}_{\text{mint előbb}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{8}}$$

_6p_

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k+2-k}{k\cdot(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

e, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty$

$$\sum_{n=1}^{k} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \ln\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] = \ln\left[\left(\frac{1+1}{1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2}+1}{\cancel{2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{k+1}{\cancel{k}}\right)\right] = \ln\left[\frac{k+1}{1}\right] \longrightarrow \infty$$

$$1+\frac{1}{k} = \frac{k}{k}+\frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$$

6p

2, Geometriai sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \underbrace{q^0}_{1} + q^1 + q^2 + \dots + q^n + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{, ha } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{, ha } q \geq 1 \\ \nexists & \text{, ha } q \leq -1 \end{cases}$$

$$S_k = \sum_{n=0}^{n=k} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a \cdot \underbrace{q^0}_{1} + a \cdot q^1 + \dots = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

kvóciens $\quad a \to$ kezdő tag

pl.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{11}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 11 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 11 \cdot \frac{1}{\underbrace{1-\frac{1}{3}}_{\frac{2}{3}}} = 11 \cdot \frac{3}{2} = \frac{33}{2}$$

$\to a = 11, \; q = \frac{1}{3}$

3, a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{e^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} -1 \cdot (e^{-2})^n = -1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{e^{-2}}_{<1})^n = -1 \cdot \frac{1}{1-e^{-2}} = \frac{1}{e^{-2}-1}$$

$$-1 \cdot e^{-2n} = -1 \cdot (e^{-2})^n$$

b)

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{3n+1}}{10^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+3} \cdot \frac{2^{3\cdot(k+3)+1}}{(10)^{(k+3)-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+3} \cdot \frac{2^{3k+10}}{(10)^{k+2}} =$$

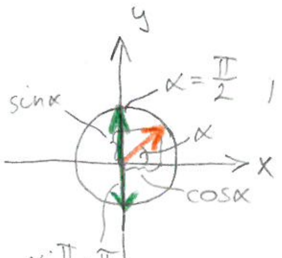
↓ átrendezés, jobb oldal 0 legyen $\qquad$ cél: $a \cdot q^k$

$\underbrace{n-3}_{:=k} = 0$

$\Rightarrow n-3 = k \Rightarrow n = k+3$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \underbrace{(-1)^3}_{-1} \cdot \frac{(2^3)^k \cdot \overbrace{2^{10}}^{1024}}{10^k \cdot \underbrace{10^2}_{100}} = \frac{-1 \cdot 1024}{100} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(-1 \cdot \frac{\overbrace{2^3}^{8}}{10}\right)^k}_{\left(\underbrace{-\frac{8}{10}}_{q}\right)^k} = \frac{-256}{25} \cdot \frac{1}{\underbrace{1-\left(-\frac{8}{10}\right)}_{\frac{18}{10}}} = -\frac{256}{25} \cdot \frac{10}{18} = -\frac{256}{45}$$

c, $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{3}\right)^n = \frac{1}{\underbrace{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}}} = \frac{3}{5}$



$\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi$ $\Rightarrow \sin\alpha = 1$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = (-1)^n$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi$ $\Rightarrow$ $\sin\alpha=-1$

d, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+4^{n+1}}{7^n} = \frac{161}{15}$

– 20p –

4, Összeg nem érdekel. Kérdés: konv. / nem konv.?

> Konvergencia kritériumok

a, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+10} < \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}}^{\text{konv.}} \Rightarrow$ az eredeti is konv.

Hasonló $1/n^2$-hez, ami konv.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{k} a_n}_{\text{véges sok szám összege}} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n}_{\text{végtelen sok szám összeg}}$ $\Rightarrow$ ez számít: konv./nemkonv.

biztos valós szám

b, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7} > \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^3-n^3}{3n^4+n^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{4n^4} = \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\text{div}} \Rightarrow$ div

csökk. növ.

> ez legnagyobb, ez számít

$\sum\frac{n^3}{n^4} = \sum\frac{1}{n} \Rightarrow$ div. $\Rightarrow$ sejtés: div.

c, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n+5^n} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 4^n}{5^n} = 2\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{\text{konv.}}$ $\Rightarrow$ tényleg konv. az eredeti

növ. csökk.

> ez számít

$\sum\left(\frac{4}{5}\right)^n$: konv. $\Rightarrow$ sejtés: konv

d, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+4)}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Rightarrow$ div.

ez számít

$\sum\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \sum\frac{1}{n} \Rightarrow$ div

– 20p –

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{1+6^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^1 \cdot 3^n}{1+6^{-1}\cdot 6^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 3\cdot 3^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n} \Rightarrow$ konv. ✓

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot \ln n} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow$ div.

sejtés: div.

5., a) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{a_n}$

Hányados krit.:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overbrace{n+1-n}^{1}}}_{\to \frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{konv.}$$

Gyök krit.:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n}}_{\frac{3}{4}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot\frac{3}{4} = 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^4}{n!} \Rightarrow$ konv.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{3n^4}{n!}} = \frac{\cancel{3}(n+1)^4}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\cancel{3}n^4} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{\overbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}^{n!}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}_{(n+1)!}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^4}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 1\cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n^n}{n!}}^{a_n} \Rightarrow$ div.

∘ $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$?

∘ $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{1/a^n} = \frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{n^n}\cdot\underbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}_{\frac{1}{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{1^\infty \to ?}\cdot\overbrace{\frac{n+1}{n+1}}^{1} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e > 1 \Rightarrow \text{div.}$$

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

∘ $\lim a_n = \lim \frac{n^n}{n!} = \infty \Rightarrow \sum a_n$ div.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^{3n}\cdot n^7}{3^{2n+1}}}_{a_n} \Rightarrow$ konv.

Hk.:

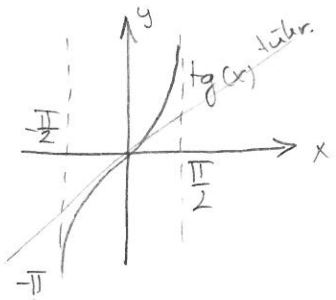
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\overbrace{3(n+1)}^{3n+3}}\cdot(n+1)^7}{3^{\underbrace{2(n+1)+1}_{2n+3}}} \cdot \frac{3^{2n+1}}{2^{3n}\cdot n^7} = \underbrace{\frac{3^{2n+1}}{3^{2n+3}}}_{3^{-2}} \cdot \underbrace{\frac{2^{3n+3}}{2^{3n}}}_{2^3} \cdot \frac{(n+1)^7}{n^7} =$$

$$= \frac{2^3}{3^2}\cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^7}_{\downarrow\, 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2^3}{3^2}\cdot 1 = \frac{8}{9} < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

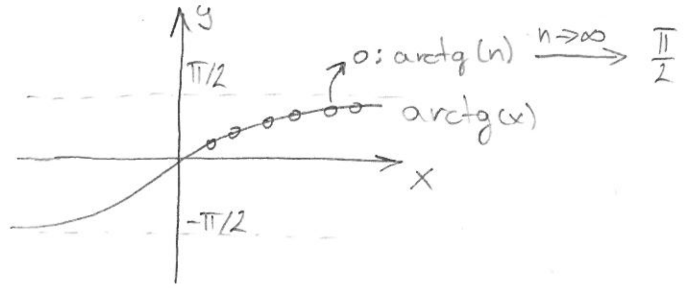
e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{arctg}(n)}{\pi}\right)^n}_{a_n} \Rightarrow$ konv.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\operatorname{arctg}(n)}{\pi} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow \text{konv.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n)}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow$



f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n+2}{2n}\right)^{n^2}}_{a_n} \Rightarrow$ konv.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n\right]^n} = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \text{konv.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\downarrow\, 0}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\downarrow\, e^2} = 0\cdot e^2 = 0$$

20p

1, Leibniz sor: $a_n = (-1)^n \cdot b_n$, ahol $b_n > 0 \ \forall n$-re

b_n szig. mon. csökk.

$b_n \to 0$

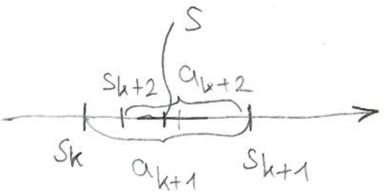
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \text{konv.}$$

pl.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{b_n \searrow 0}}^{a_n} \Rightarrow \text{Leibniz sor} \Rightarrow \text{konv.}$$

mon. fogyóan 0-hoz tart

Nem absz. konv.
Feltételesen konv.



Abszolút konv.: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \text{konv.}$, ilyenkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is konvergens

Feltételes konv.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \text{konv.}$, de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Rightarrow$ nem konv.

pl.: a,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \underbrace{\frac{5^n}{2^n+10^n}}_{b^n}}_{a^n}$$

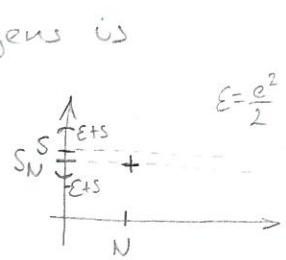
$$\sum |a^n| = \sum \frac{5^n}{2^n+10^n} < \sum \frac{5^n}{10^n+10^n} = \sum \frac{5^n}{2 \cdot 10^n} = \frac{1}{2} \cdot \sum \underbrace{\left(\frac{5}{10}\right)}_{<1}^n \Rightarrow \text{konv}$$

sejtés: konv

$\sum a_n$ abszolút konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ konvergens is

c,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \cdot \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n}_{a_n}$$



$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n}_{b_n} \Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n} = \frac{n+3}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad ?$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim \underbrace{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}_{\searrow e^2} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-1}}_{1} = e^2 \Rightarrow \sum |a_n| \text{ div.}$$

$\searrow \sum a_n$ div

d, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^{4/3}}$ $\Rightarrow$ absz. konv. azaz konv. is

Absz. konv.?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^{4/3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^{4/3}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \Rightarrow \text{konv}$$

$\Downarrow$

konv.

b, $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+3}}}_{b_n}$ $\Rightarrow$ konv.

$b_n \searrow 0$

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\sqrt{n+3}} > \sum \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \sum \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum \frac{1}{n^{1/2}} \Rightarrow \text{div}$$

$\frac{1}{n^{1/2}}$ div

konv. de nem absz. konv. $\Rightarrow$ felt. konv.