Matek A1 / 3. gyakorlat: Számsorozatok

1. Legyen $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Tudjuk hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Adjunk $\epsilon = 0,03$-hoz küszöbindexet!

2. "Sejtsük meg" $a_n = \dfrac{n-1}{2n-8}$ határértékét. Igazoljuk a definíció segítségével!

3. Igazoljuk definíció segítségével, hogy $a_n = 2^{\sqrt{n}}$ plusz végtelenbe divergál!

4. Vizsgáljuk a sorozatot korlátosság, monotonitás, konvergencia, és torlódási pontjai szempontjából!

   a) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ b) $b_n = 1 + (-1)^n + (-1)^n \dfrac{1}{n}$

5. Rekurzívan adott az alábbi sorozat: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 8 - \dfrac{7}{a_n}$

   a) Igazoljuk teljes indukció segítségével, hogy minden n-re teljesül az $1 < a_n < 7$ egyenlőtlenség!
   b) Vizsgáljuk a sorozatot monotonitás szempontjából!
   c) Konvergens-e a sorozat? Ha igen, akkor adjuk meg a határértékét!

   A következő feladatokban számítsuk ki a megadott határértékeket!

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+1)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+5}{n+3}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3+3n^2}{9n^4}$

7. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(4n+1)}{2n+3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$

8. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{3^n+4^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n}{2^n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+2^{3n}}{3\cdot 8^n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{-n}+3\cdot 3^n}{3^n}$

9. a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^{99999}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\log_8 n}$

10. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+2n} - n^2\right)$

11. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+3}{4n^2+n}}$

12. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{8}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^n$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^n$

Emlékeztető:

1. Egy a_n sorozat határértéke A, ha tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz található N küszöbindex úgy, hogyha az n indexet úgy választjuk meg, hogy $n > N$, akkor teljesülni fog $|a_n - A| < \epsilon$.
   Azaz a határértéknek bármilyen kis környezetét is vesszük, egy idő után a sorozat elemei ebben a környezetben találhatóak meg.

2. Ha egy sorozat korlátos, és monoton, akkor konvergens is.

3. Egyéb határérték számítási szabályok:

   Ha b_n részsorozata a_n-nek, továbbá $a_n \to A$, akkor $b_n \to A$ is teljesül.

   Rendőrelv: Ha találunk a_n, és b_n sorozatot, amelyek mindegyike az A határértékhez tart, továbbá egy adott indextől kezdődően teljesül az $a_n < c_n < b_n$ egyenlőtlenség is, akkor c_n is az A számhoz tart.

   Hasonló ehhez a következő: Ha találunk a_n sorozatot, ami plusz végtelenbe divergál, továbbá egy adott indextől kezdődően teljesül az $a_n < b_n$ egyenlőtlenség is, akkor b_n is plusz végtelenbe divergál.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, ahol: $x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, ahol: $a_n \to \pm\infty$

- exponenciális alak

1, $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = 0$, $\varepsilon = 0,03 \Rightarrow N$ küszöbindex

$$\underbrace{|a_n - A|}_{\text{távolságuk}} < \varepsilon$$

$$\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n - 0\right| < 0,03$$

$$\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n\right| < 0,03$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,03 \qquad / \log_{\frac{3}{4}}(\ldots)$$

$$n > \log_{\frac{3}{4}} 0,03 = 12,18 \Rightarrow N = 12.$$

ell.: $\left(\frac{3}{4}\right)^{12} = 0,0317$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{13} = 0,0238$

2, $a_n = \frac{n-1}{2n-8}$

Sejtés: $a_{1000} = 0,50150$, $a_{10000} = 0,50015$ $\lim a_n = \frac{1}{2}$

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n-1}{2n-8} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n-1}{2n-8} - \frac{n-4}{2n-8}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n-1-n+4}{2n-8}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3}{2n-8}\right| < \varepsilon \qquad / \text{ha } n \text{ nagy: nev. } \oplus$$

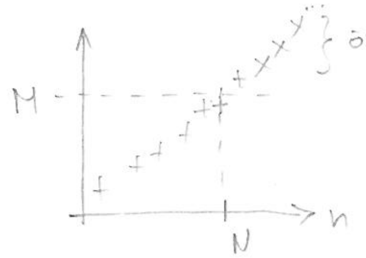
Tfh. $2n-8>0$

$$\frac{3}{2n-8} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{\varepsilon} < 2n-8 \Rightarrow n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon}+8\right) = \frac{3}{2\varepsilon}+4$$

Így a küszöbindex: $N = \left\lfloor \frac{3}{2\varepsilon} + 4 \right\rfloor$ lefelé kerekítés

3, $a_n = 2^{\sqrt{n}}$



$$a_n > M$$

$$2^{\sqrt{n}} > M \qquad / \log_2(\ldots)$$

$$\sqrt{n} > \log_2 M \qquad / n>0 \text{ ezért } (\ldots)^2$$

$$n > (\log_2 M)^2 \Rightarrow N = \lfloor (\log_2 M)^2 \rfloor$$

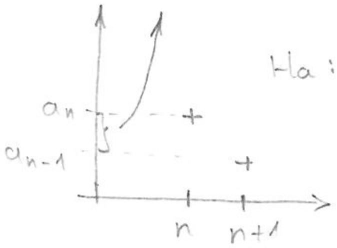
pl.: $M = 1000 \Rightarrow N = 99$

$a_{99} \approx 989$ $a_{100} = 1024$

4, a, $a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

• Monotonitás: előjel?

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{(n)-(n+1)}{(n+1)\cdot n} =$$

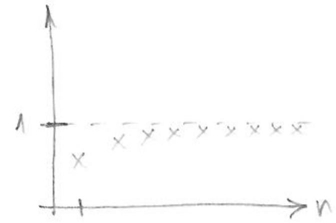


Ha: ⊕ sz. m. cs.
⊖ sz. m. n.

$$= \frac{-1}{n^2+n} > 0, \text{ mert } n > 0$$

Tehát sz. m. n.

• Korlátosság:



minimum és egy infimum: $a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

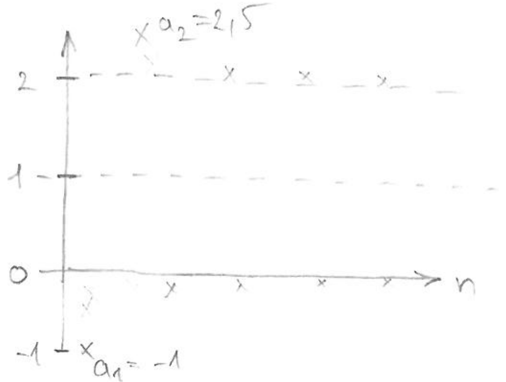
maximum: nincs (legnagyobb a_n)
nem 1

szuprémum: 1

• Határérték: $\lim a_n = 1$

• Torlódási pont: 1 $\Rightarrow$ ∞ sok elem van bármely környezetében

b, $b_n = 1 + (-1)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 1 + (-1)^n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{kb. } 1 \Leftarrow 1,5;\ 1,\dot{3};\ 1,25\ldots}$



• Nem monoton

• Infimum, minimum: $a_1 = 1 + (-1)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = -1$

• Szuprémum, maximum: $a_2 = 1 + (-1)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2,5$

• Nincs hé.

• Torlódási pontok: 0, 2

30p - - - - -

5, $a_1 = 3$ $\quad a_{n+1} = 8 - \frac{7}{a_n}$

a, Teljes ind.: I. n=1-re: $1 < 3 < 7$ ✓

II. Tfh. $1 < a_n < 7$ $\Rightarrow$ n-re igaz.

Nézzünk n+1-re!

$$8 - a_{n+1} = \frac{7}{a_n} \Rightarrow a_n = \frac{7}{8 - a_{n+1}}$$

$$1 < \frac{7}{8 - a_{n+1}} < 7 \qquad / \frac{1}{(..)}, \text{ és minden } \oplus$$

$$\frac{1}{1} > \frac{8 - a_{n+1}}{7} > \frac{1}{7}$$

$$7 > 8 - a_{n+1} > 1 \qquad / \cdot (-1)$$

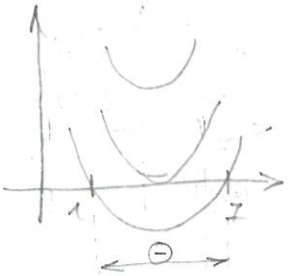
$$-7 < -8 + a_{n+1} < -1$$

$$1 < a_{n+1} < 7 \qquad ✓$$

b) Monotonitás:

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(8 - \frac{7}{a_n}\right) = a_n - 8 + \frac{7}{a_n} = \frac{a_n^2 - 8a_n + 7}{a_n} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$$

$\to \oplus$ a_1 miatt



$$x^2 - 8x + 7$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 7}}{2} = 4 \pm \frac{\sqrt{36}}{2} = 4 \pm 3 \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

a_n szig. mon. nő

c) Konvergens, hiszen korlátos és monoton

Legyen $\lim a_n = A$

$$a_{n+1} = 8 - \frac{7}{a_n} \quad / \lim(\ldots)$$

$$A = 8 - \frac{7}{A} \Rightarrow A^2 - 8A + 7 = 0$$

$$A = \begin{cases} 7 \quad \to a_1 \in]1;7] \\ 1 \quad \to \text{hamis gyök, mert } a_1 > 1 \text{ és szig. m. n.} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a_1 = 1$-hez tartozna

15p

---

6) a) $\lim(2n+1) = \lim 2n + \lim 1 = 2 \cdot \underbrace{\lim n}_{\infty} + \underbrace{\lim 1}_{1} = \infty$

b) $\lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}}{\lim 2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

baj: $\frac{\infty}{\infty}$

Ilyen törtnél leosztunk a nevező legnagyobb n hatványával. (Így nem lesz pl. $\frac{7}{0}$)

... jelölés

c) $\lim \frac{7n^2+5}{n+3} = \lim \frac{7n + \frac{5}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{\infty + 0}{1+0} = \infty$

$\frac{\infty}{\infty} = ?$

e) $\lim \frac{-n^3 + 2n^2}{n+10} = \lim \frac{-n^2 + 2n}{1 + \frac{10}{n}} = -\infty$

d) $\lim \frac{8n^3 + 3n^2}{9n^4} = \lim \frac{\frac{8}{n} + \frac{3}{n^2}}{9} = \frac{0+0}{9} = 0$

7) a) $\lim \frac{\sin(4n+1)}{2n+3} = \frac{\text{valami szám}}{\infty}$ $\qquad \sin(\ldots) \in [-1, 1]$

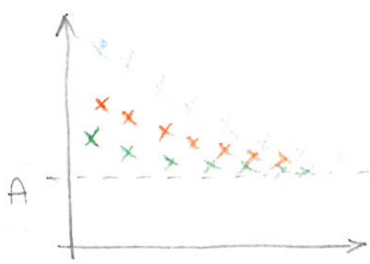
Rendőrelv:

$$\frac{-1}{2n-3} < \frac{\sin(4n+1)}{2n+3} < \frac{1}{2n-3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \Rightarrow 0 \Leftarrow 0$$

Szemléletesen



b, $\lim \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \lim \frac{\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}} = \lim \underbrace{\frac{(n-3)!}{(n-2)!}}_{\frac{1}{(n-2)}} \cdot \underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\frac{6}{2}} = \lim \left(\frac{1}{(n-2)}\cdot 3\right) = 0$ nulla

11.,

a, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

b, $\lim \sqrt[n]{2n} = \lim \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \cdot 1 = 1$

c, $\lim \sqrt[n]{n+5} = 1$

I. sejtés: 1

$$\underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{n}} < \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{n+5}} \overset{\text{ha n nagy!}}{<} \underset{\downarrow\atop 1}{\sqrt[n]{2n}}$$

$1 \Rightarrow 1 \Leftarrow 1 \Rightarrow$ b feladat

II. $a_n = n$ -nek részsorozata $b_n = n+5$

így $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{b_n}$

d, $\lim \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}} \overset{\text{nem korrekt}}{=} \lim \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1$

sejtés: ha n nagy $\sqrt[n]{\;}$ alatt közel $\frac{1}{2}$ van.

$\hookrightarrow \lim \frac{2n^2+3}{4n^2+n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Van olyan N., hogy ha $n > N$, akkor:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} < \left(\frac{2n^2+3}{4n^2+n}\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

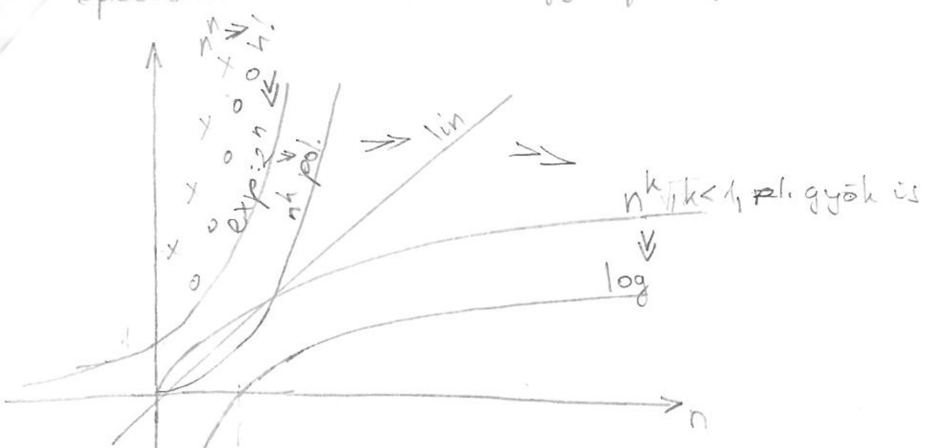
vagy valami más ε ($\sqrt[n]{\oplus}$ legyen azért!)

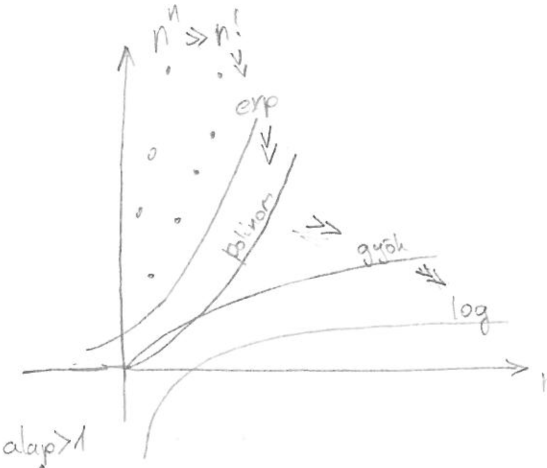
$$\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{4}}} < \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}} < \sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}_{\frac{3}{4}}}$$

$1 \Rightarrow 1 \Leftarrow 1$

45p

Speciális sorozatok „nagyságrendje"





$$\log \ll \text{gyök} \ll \text{lin} \ll \text{pol.} \ll \text{exp.} \ll n! \ll n^n$$

kisebb nagyságrendű

pl.: $\log_2 n \ll \underbrace{\sqrt[4]{n}}_{n^{1/4}} \ll n \ll n^5 \ll 2^n \ll n! \ll n^n$

$$\lim \frac{\log_2 n}{\sqrt[4]{n}} = 0 \qquad \lim \frac{n^5}{n!} = 0$$

$$\lim \frac{\sqrt[4]{n}}{\log_2 n} = \infty \qquad \lim \frac{-n!}{n^5} = -\infty$$

8./ a/ $\lim \frac{5^n}{3^n+4^n} \overset{!}{=} \lim \frac{\frac{5^n}{4^n}}{\frac{3^n}{4^n}+\frac{4^n}{4^n}} = \lim \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} = \frac{\infty}{1} = \infty$

Leosztunk a legnagyobb alapú hatvánnyal a nevezőből.

b/ $\lim \frac{(-3)^n}{2^n} = \lim \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1} = \nexists$ hé.

c/ $\lim \frac{3^{n+1}+2^{3n}}{3\cdot 8^n} = \lim \frac{3^n\cdot 3^1+(2^3)^n}{3\cdot 8^n} = \lim \frac{3\cdot 3^n+8^n}{3\cdot 8^n} =$

$= \lim \frac{3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n+1}{3\cdot 1} = \frac{3\cdot 0+1}{3} = \frac{1}{3}$

d/ $\lim \frac{2^{-n}+3\cdot 3^n}{3^n} = \lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\cdot 3^n}{3^n} = \lim \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n+3}{1} = \frac{0+3}{1} = 3$

9./ a/ $\lim n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$

$\infty\cdot 0$

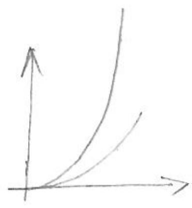
$\frac{\infty}{\infty}$ → nagyobb nagyságrendű

10./ a/ $\overset{\infty-\infty}{\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)} = \lim\left(\underbrace{\sqrt{n+1}}_{a} - \underbrace{\sqrt{n-1}}_{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$

$$= \lim \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}+1}{(\ldots)} = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b/ $\lim\left(\sqrt{n^4+2n}-n^2\right) = \lim\left(\underbrace{\sqrt{n^4+2n}}_{a} - \underbrace{\sqrt{n^4}}_{b}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^4+2n}+\sqrt{n^4}}{\sqrt{n^4+2n}+\sqrt{n^4}}$



$$= \lim \frac{(n^4+2n)-(n^4)}{(\ldots)} = \lim \frac{2n}{\sqrt{n^4+2n}+\sqrt{n^4}} =$$ $\rightarrow n^2$ nagyságrendű

$$= \lim \frac{\frac{2n}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{2n}{n^4}}+\sqrt{\frac{n^4}{n^4}}} = \lim \frac{\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\to 0}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1}+1} = 0$$

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

12./ $\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, ha $a_n \to +\infty$ vagy $-\infty$

a/ $\lim\left(1-\frac{8}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{-8}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-8}}\right)^{n} =$

$$= \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-8}}\right)^{\frac{n}{-8}}\right]^{-8} = \left[\lim\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{n}{-8}}_{\to -\infty}}\right)^{\frac{n}{-8}}\right]^{-8} = e^{-8}$$

$$\lim\left(1-\frac{8}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{-8}{n}\right)^n = e^{-8}$$

b/ $\lim\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-3} = \lim\left(\frac{n+2-3}{n+2}\right)^{n-3} = \lim\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{n+2-5} =$

$$= \lim \underbrace{\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{n+2}}_{\to e^{-3}} \cdot \underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{-3}{n+2}}_{\to 0}\right)^{-5}}_{\to 1} = e^{-3}$$

$$\lim\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-3} = \lim\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n-3} = \lim \frac{\overset{\nearrow e^{-1}}{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\to e^2}} \cdot \left(\frac{\overset{\to 1}{1-\frac{1}{n}}}{\underbrace{1+\frac{2}{n}}_{\to 1}}\right)^{3} = \frac{e^{-1}}{e^2}\cdot 1 =$$

$$= e^{-3}$$

c, $\lim\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n = \lim \frac{\overbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}^{\to e^2}}{\underbrace{(2)^n}_{\to\infty}} = \frac{e^2}{\infty} = 0$

sejtés: $\lim = 1$

d, $\left(\lim\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{a_n \to e}} = 1\right.$

Van olyan N, hogyha $n > N$, akkor:

$e - \varepsilon < a_n < e + \varepsilon \qquad , \varepsilon := 0{,}1$

$$\sqrt[n]{\underbrace{e-0{,}1}_{\approx 2{,}6}} < \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} < \sqrt[n]{\underbrace{e+0{,}1}_{\approx 2{,}8}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 1 \end{array}$$

e,

I. $\lim\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}\cdot\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n-3} = \lim\left(\frac{1+\frac{-1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{n-3} = \lim \frac{\overbrace{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{n}}^{e^{-1}}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}_{e^{2}}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1+\overset{\to 0}{\frac{-1}{n}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}}\right)^{-3}}_{\to 1} = e^{-3}$

ide kellene

II. $\lim\left(\frac{n+2-3}{n+2}\right)^{n-3} = \lim\underbrace{\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{n+2}}_{e^{-3}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{-3}}_{1} = e^{-3}$