Matek A1 / 2. gyakorlat
Komplex számok

1. Legyen $z = -2 + 3i$! Adjuk meg $Re(z)$, $Im(z)$, $\overline{z}$, $|z|$, $arg(z)$ értékét!

2. Legyen $z = 3 + 2i$, $u = -1 + i$, $v = 7i$! Végezzük el a műveleteket!

   a) $(z + u)v$
   b) $\overline{u} + \overline{v}$
   c) $(u \cdot v)^2$
   d) $\dfrac{u}{v}$
   e) $\dfrac{z}{u}$
   f) $|z - u|$

3. Oldjuk meg!

   a) $z^2 - \overline{z} = 1$
   b) $z^2 + 6\overline{z} - |z|^2 = 10$

4. Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

   a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 2\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - 2 - 3i| < 3\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \ Im(z) > 2\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \ Im(z + 1) > Re(z)\}$

5. Írjuk fel $z_1 = 3(\cos(60°) + i \ \sin(60°)$ számot algebrai, a $z_2 = -3 - 5i$ számot pedig trigonometrikus alakban!

6. Forgassuk el a $z = -1 + i$ számot

   a) pozitív forgásirányban 30°-al, és közben nyújtsuk a hosszát háromszorosára!
   b) negatív forgásirányban 45°-al, és közben a hosszát nyomjuk össze fele akkorára!

7. Legyen $z_1 = 1 - i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$! Mennyi

   a) $z_1^5 \cdot z_2$?
   b) $\dfrac{z_1}{z_2}$?

8. Számítsuk ki $\sqrt[3]{8}$ értékét!

9. Oldjuk meg az egyenleteket!

   a) $z^5 = 1 + i$
   b) $z^3 = -125$
   c) $z^2 + 5 + \dfrac{6}{z^2} = 0$
   d) $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$

10. Oldjuk meg az $x^2 - 2x + 5 = 0$ egyenletet!

11. Egy négyzet átlóinak metszéspontja a $z = 2 + 2i$ helyen van, az egyik csúcsa pedig az $a = 5 + 8i$ számnak felel meg. Adjuk meg a négyzet többi csúcsának helyét is.

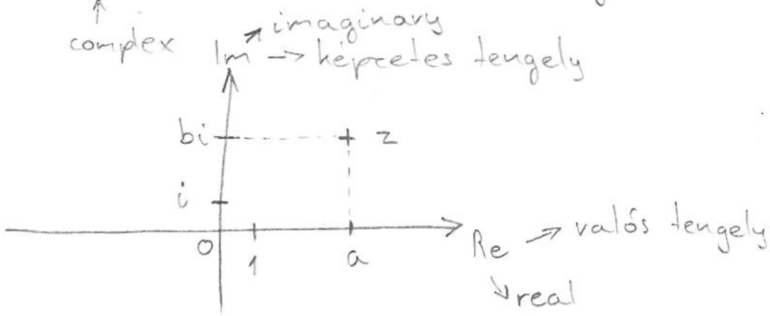
2. gyakorlat

Komplex számok

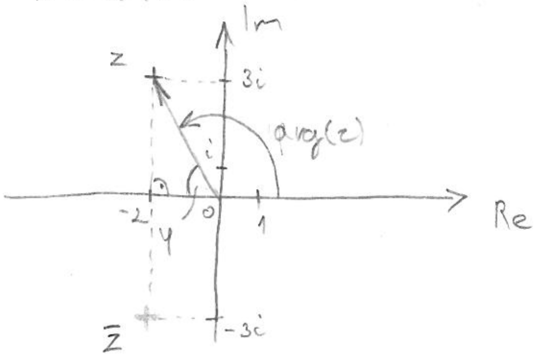
jele: $\mathbb{C}$: $z = a + bi$ → algebrai alak

↑ complex

Konzultáció:
Kedd 14-15
Csütörtök 14
Sok feladat megoldható:
wolframalpha.com



1., $z = a + bi = -2 + 3i$



Müveletek:

- $\mathrm{Re}(z) = a = -2$
  ↑
  valós rész
- $\mathrm{Im}(z) = b = 3$ megj.: - nem $3i$
  - azaz $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$
  ↑
  képzetes rész

- Konjugálás: tükrözés a valós tengelyre

  $\bar{z} = a - bi = -2 - 3i$

- Komplex szám hossza, abszolút értéke: → origótól való távolság

  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

- Komplex szám argumentuma, szöge:

  $\arg(z) \in [0, 360°[$
  $[0, 2\pi[$ $\qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\frac{3}{2}$

  $\arg(z) = 180° - \varphi = 180° - \underbrace{\mathrm{arctg}\frac{3}{2}}_{56{,}31°} = 123{,}69°$

Müveletek komplex számokkal: • i-vel úgy számolunk, mintha ismeretlen lenne
• $i^2 = 1$

15p

2. a, $(z+u)\cdot v = \big((3+2i) + (-1+i)\big)\cdot 7i = (2+3i)\cdot 7i = 14i + 21\underbrace{i^2}_{-1} = -21 + 14i$

b, $\bar{u} + \bar{v} = (-1-i) + (-7i) = -1 - 8i$

c, $(u\cdot v)^2 = \big((-1+i)\cdot 7i\big)^2 = (-7i + 7\underbrace{i^2}_{-1})^2 = (-7-7i)^2 = 7^2(+1+i)^2 = 49\cdot(1 + 2i + \underbrace{i^2}_{-1}) =$

$= 49\cdot(2i) = 98i$

d, $\frac{u}{v} = \frac{-1+i}{7i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{-i + \overbrace{i^2}^{-1}}{7\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{-i-1}{-1} = (1+i)\cdot\frac{1}{7}$

megj.: hasonló a törtek nevezőjének gyöktelenítéséhez

pl.: $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

pl.: $\frac{2}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{9-3} = \dots$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

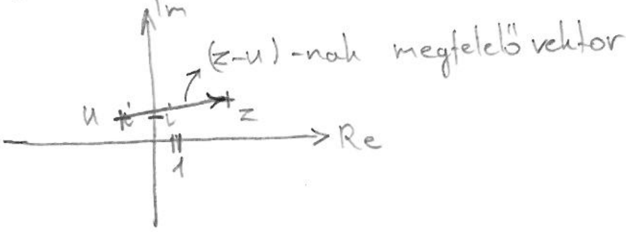
d, $\frac{z}{u} = \frac{3+2i}{-1+i} = \frac{3+2i}{-1+i} \cdot \underbrace{\frac{-1-i}{-1-i}}_{1} = \frac{-3-5i-2\overset{-1}{i^2}}{1-\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{-3-5i-2(-1)}{1-(-1)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

Algebrai alakban való osztáskor
bővítünk a nevező konjugáltjával

e, $|z-u| = |(3+2i)-(-1+i)| = |4-i| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

z és u távolsága a síkon

jelentése:



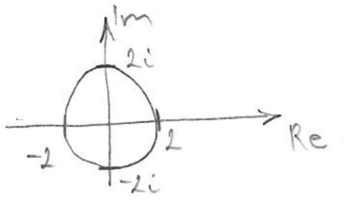
f, $i^{2016} = 1$

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = -i^2 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$\vdots$

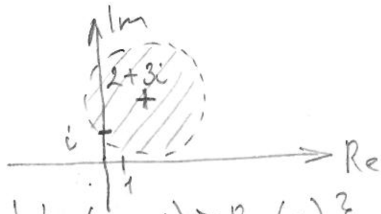
kitevők:
$n = 1, 5, 9, \dots = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$
$n = 2, 6, 10, \dots = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$
$n = 3, 7, 11, \dots = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$
$n = 4, 8, 12, \dots = 4k$, $k \in \mathbb{N}^+$ → 2016 ide tartozik

20p.

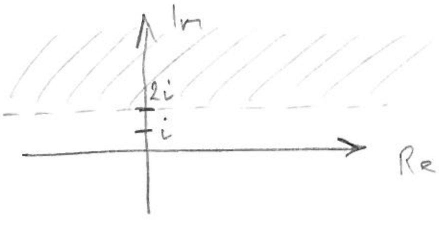
4. a, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$



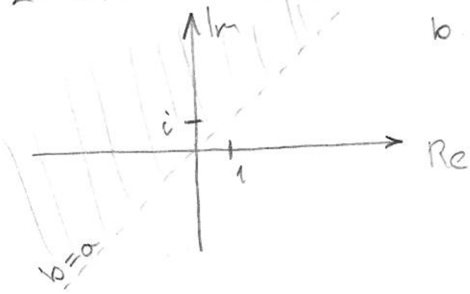
b, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-2-3i| < 3\}$
$\Updownarrow$
$|z-(2+3i)| < 3$



c, $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 2\}$



d, $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z+1) > \mathrm{Re}(z)\}$
$z = a+bi \Rightarrow \mathrm{Im}(a+1+bi) > \mathrm{Re}(a+bi)$
$b > a$

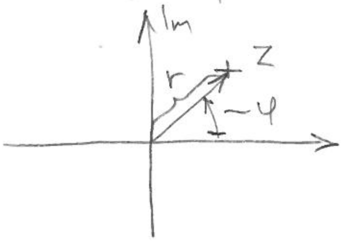


10p.

mplex számok trigonometrikus alakja

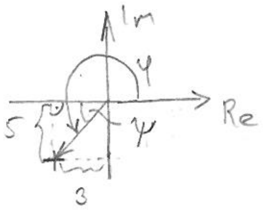
$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ $\longrightarrow$ megj.: $z = r \cdot e^{i \cdot \varphi}$ ↗ radián!

↘ $\arg(z)$



5. $z_1 = 3 \cdot (\underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}} + i \cdot \underbrace{\sin 60°}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$

$z_2 = -3 - 5i = \sqrt{34} \cdot \left(\cos(239{,}04°) + i \cdot \sin(239{,}04°)\right)$



$\varphi = \arg(z_2) = 180° + \psi = 239{,}04°$

$tg\,\psi = \frac{5}{3} \Rightarrow \psi = arctg\frac{5}{3} = 59{,}04°$

$r = |z_2| = \sqrt{\underbrace{3^2}_{9} + \underbrace{5^2}_{25}} = \sqrt{34}$

Műveletek trigonometrikus alakban: $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$

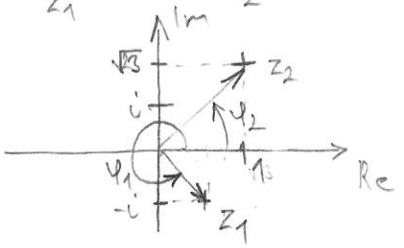
- összeadás, kivonás: nehéz
- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ → forgatva „nyújtás"/„összenyomás"

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$z_1^n = r_1^n \cdot \left(\cos(n \cdot \varphi_1) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi_1)\right)$$

előbb 5-ös feladat jön!

7. /a/ $(\underbrace{1 - i}_{z_1})^5 \cdot (\underbrace{\sqrt{3} + 1i}_{z_2})$



Írjuk át trig. alakba őket!

$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos(315°) + i \cdot \sin(315°))$ $\qquad$ $z_2 = 2 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))$

$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\qquad$ $r_2 = \sqrt{3 + 1^2} = 2$

$\varphi_1 = \arg(z_1) = 315°$ $\qquad$ $\varphi_2 = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

Ezek után:

$z_1^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot (\cos(\underbrace{5 \cdot 315°}_{1575° =}) + i \cdot \sin(5 \cdot 315°)) = 4\sqrt{2} \cdot (\cos(135°) + i \cdot \sin(135°))$

$= 4 \cdot 360° + 135°$

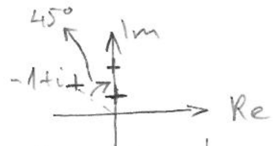
$z_1^5 \cdot z_2 = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot (\cos(135° + 30°) + i \cdot \sin(135° + 30°)) = 8\sqrt{2} \cdot (\cos(165°) + i \cdot \sin(165°))$

b, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos(315^\circ - 30^\circ) + i \cdot \sin(315^\circ - 30^\circ)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos(275^\circ) + i \cdot \sin(275^\circ)\right)$

6. a, $z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos(135^\circ) + i \cdot \sin(135^\circ))$

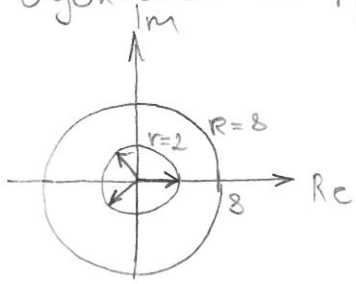
$z_1 = z \cdot 3 \cdot (\cos(30^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ)) = 3\sqrt{2} \cdot (\cos(165^\circ) + i \cdot \sin(165^\circ))$

b, $z_2 = z \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos(-45^\circ) + i \cdot \sin(-45^\circ)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\underbrace{\cos(90^\circ)}_{0} + i \cdot \underbrace{\sin(90^\circ)}_{1}) = \frac{\sqrt{2}}{2} i$



25p Gyökvonás komplex számokból

8. $\sqrt[3]{8} = ?$



$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))} =$

$= \left\{ \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)\right) \right.$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

↓ n db gyök lesz

Miért?
$(\sqrt[n]{z})^n = z$
Hossz:
$(\sqrt[n]{r})^n = r$
Szög:
$\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) \cdot n =$
$= \varphi + 360^\circ k$

$8 = 8 \cdot (\cos(0^\circ) + i \cdot \sin(0^\circ))$ → most: $r = 8$, $\varphi = 0^\circ$, $n = 3$

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \cdot (\cos(0^\circ + 0 \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(0^\circ)) \\ 2 \cdot (\cos(0^\circ + 1 \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(120^\circ)) \\ 2 \cdot (\cos(0^\circ + 2 \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(120^\circ)) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 \\ 2 \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \\ 2 \cdot (\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) \end{cases}$$

9, $z^5 = 1 + i$

$z^5 = \sqrt{2} \cdot (\cos(45^\circ) + i \cdot \sin 45^\circ)$

$z = \sqrt[5]{\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)} =$ $\left\{ \sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2} \right.$

$$= \begin{cases} \sqrt[10]{2} \cdot \left(\cos\left(9^\circ + 0 \cdot \frac{360^\circ}{5}\right) + i \cdot \sin\left(9^\circ + 0 \cdot \frac{360^\circ}{5}\right)\right) \\ \sqrt[10]{2} \cdot \left(\cos\left(9^\circ + 1 \cdot \frac{360^\circ}{5}\right) + i \cdot \sin\left(9^\circ + 1 \cdot \frac{360^\circ}{5}\right)\right) \\ \vdots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt[10]{2} \cdot (\cos 9^\circ + i \cdot \sin 9^\circ) \\ \sqrt[10]{2} \cdot (\cos 81^\circ + i \cdot \sin 81^\circ) \\ \sqrt[10]{2} \cdot (\cos 153^\circ + i \cdot \sin 153^\circ) \\ \sqrt[10]{2} \cdot (\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ) \\ \sqrt[10]{2} \cdot (\cos 297^\circ + i \cdot \sin 297^\circ) \end{cases}$$

15p

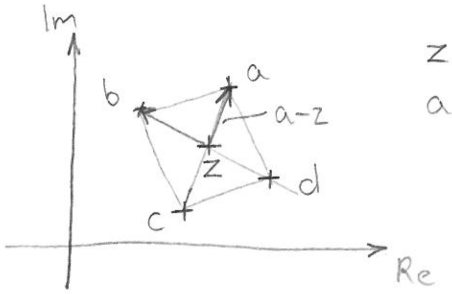
$x^2-2x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4\cdot\sqrt{-1}}{2}=1\pm 2i$$

$-1=i^2$

5p

10./



$z=2+2i$

$a=5+8i$

$b=z+(b-z)=\underline{\underline{-4+5i}}$

$(b-z)=(a-z)\cdot f=(3+6i)\cdot i=$

$=-6+3i$

Forgatáshoz:

$f=1\cdot(\underbrace{\cos 90^\circ}_{0}+i\cdot\underbrace{\sin 90^\circ}_{1})=i$

$c=z-(a-z)=2z-a=4+4i-5-8i=-1-4i$

$d=?\quad \frac{b+d}{2}=z \Rightarrow d=2z-b=4+4i-(-4+5i)=8-i$

$$\begin{array}{l}
(z^3-2z^2+z-2):(z-2)=(z^2+1)\\
-(z^3-2z^2\qquad)\\
\hline
\qquad\qquad (z-2)\\
\qquad\quad -(z-2)\\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

3.) a) $z^2 - \bar{z} = 1$

$z = a + bi$

$(a+bi)^2 - \overline{(a+bi)} = 1$

$(a^2 + 2abi + b^2i^2) - (a - bi) = 1$

$a^2 + 2abi - b^2 - a + bi = 1$

$(a^2 - a - b^2) + (2ab + b)i = 1 + 0i$

$\Downarrow$ $a^2 - a - b^2 = 1$

$2ab + b = 0 \Rightarrow (2a+1)\cdot b = 0$

I. $2a + 1 = 0$

$a = -\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - b^2 = 1$

$-\frac{5}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{4}{4} \neq b^2$

$b \in \mathbb{R}$!

II. $b = 0$

$a^2 - a - 0^2 = 1$

$a^2 - a - 1 = 0$

$a_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $z^2 + 6\bar{z} - |z|^2 = 10$

- $z = a + bi$

$(a+bi)^2 + 6\cdot\overline{(a+bi)} - |a+bi|^2 = 10$

$(a+bi)^2 + 6\cdot(a-bi) - (\sqrt{a^2+b^2})^2 = 10$

$(a^2 + 2abi + b^2i^2) + 6(a - bi) - (\sqrt{a^2+b^2})^2 = 10$

$\cancel{a^2} + 2abi - b^2 + 6a - 6bi - \cancel{a^2} - b^2 = 10$

$(6a - 2b^2) + (2ab - 6b)\cdot i = (10) + (0)i$

I. $6a - 2b^2 = 10$

II. $2ab - 6b = 0 \Rightarrow (2a - 6)\cdot b = 0$

$2a - 6 = 0$

$a = 3$

I. $6\cdot 3 - 2b^2 = 10$

$b^2 = 4$

$b = \pm 2$

$z_1 = 3 + 2i$

$z_2 = 3 - 2i$

$b = 0$

$6a - 2\cdot 0 = 10$

$a = \frac{10}{6}$

$z_3 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$