Matek A1 / 14. gyakorlat: Vektorok, térgeometria

1. Végezzük el a műveleteket!

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{d}$ b) $2\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ c) $|\mathbf{a}|$ d) $|\mathbf{b}|$ e) $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$

2. Számítsuk ki $\mathbf{a}$ egységvektorát!

3. Számítsuk ki $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szöget!

4. Legyen $\mathbf{u} = (-2, 3, -1)$ és $\mathbf{v} = (-1, v_2, 1)$! Határozzuk meg v_2 értékét úgy, hogy a két vektor merőleges legyen egymásra!

5. Legyen $\mathbf{a} = (0, -3, 4)$ és $\mathbf{b} = (-1, 3, 1)$! Bontsuk fel az $\mathbf{a}$ vektort $\mathbf{b}$-vel párhuzamos, és arra merőleges komponensre!

6. Adjuk meg az $A(-1, 3, 2)$ és $B(-11, 8, -3)$ pontok közötti szakasz, B-hez közelebbi, $3 : 2$ arányú osztópontját!

7. Az 1. feladatban adott vektorokkal végezzük el a műveleteket!

   a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ b) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ c) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$

8. Adott $A(1, 3, 2)$, $B(-2, 1, 0)$ és $D(-1, 0, 2)$. Számoljuk ki a pontok által meghatározott paralelogrammának és háromszögnek a területét.

9. Adott $A(0, -1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(1, -1, 3)$ és $D(-3, 4, 0)$. Számoljuk ki a pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!

10. Írjuk fel a $Q(3, -4, 0)$ ponton átmenő, $\mathbf{n}(-1, 2, 3)$ normálvektorú sík egyenletét!

11. Adott $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$, $C(3, -1, 0)$, $D(4, 0, 4)$ és $E(2, 1, 0)$.

    a) Egy síkra esnek-e az A,B,C,D pontok?

    b) Mit mondhatunk, ha az előbbiekhez E-t is hozzávesszük?

12. Írjuk fel a Q ponton átmenő, $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes egyenletrendszerét!

    a) $Q(3, -1, 1)$ és $\mathbf{v}(1, 3, -1)$

    b) $Q(3, 4, 0)$ és $\mathbf{v}(-2, 1, 0)$

13. Határozzuk meg a sík (a Q pontra illeszkedik, normálvektora $\mathbf{n}$) és az egyenes (az R ponton halad át, irányvektora $\mathbf{v}$) metszéspontját (ha van)!

    a) $Q(3, 4, 8)$, $\mathbf{n}(1, 1, -1)$ és $R(0, 0, 3)$, $\mathbf{v}(-1, 2, 3)$

    b) $Q(3, 4, 8)$, $\mathbf{n}(1, 1, -1)$ és $R(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}(0, 1, 1)$

14. Adott az e egyenes és a P(1,1,1) pont. Határozzuk meg ezek távolságát!

$$e : \ \frac{x - 4}{2} = \frac{-2 - y}{3} = z$$

15. Határozzuk meg a $P(-1, 0, 3)$ pont és az $x - 2y + 2z + 4 = 0$ sík távolságát!

16. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok?

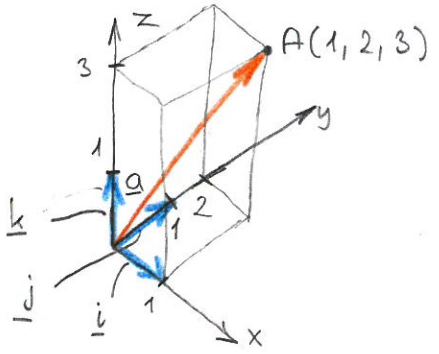
    a) $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$ és $\mathbf{c} = (-1, 1, 1)$

    b) $\mathbf{a} = (-1, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -1)$ és $\mathbf{c} = (-1, 0, -1)$

14. gyakorlat

Jelölés: – skalár, azaz szám: $a = 5$

– vektor: $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \\ \to z \end{matrix} \Bigg\}$ koordináták



$$\underline{a} = \underbrace{1}_{\text{koordináták}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{i}} + \underbrace{2}_{\text{koordináták}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{j}} + \underbrace{3}_{\text{koordináták}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{k}} = 1 \cdot \underline{i} + 2 \cdot \underline{j} + 3 \cdot \underline{k}$$

$\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ → egységvektorok

1, Vektorműveletek:

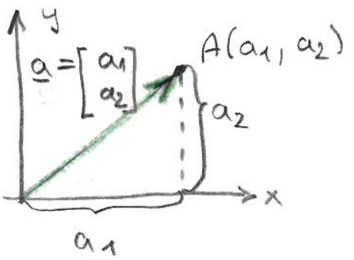
$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a, $$2\underline{a} + 3\underline{b} - \underline{d} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - (-2) \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 0 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b, $$2\underline{c} - 3\underline{d} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

c, vektorhossz: $|\underline{a}|$

2D-ben:



$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

3D-ben: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow |\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

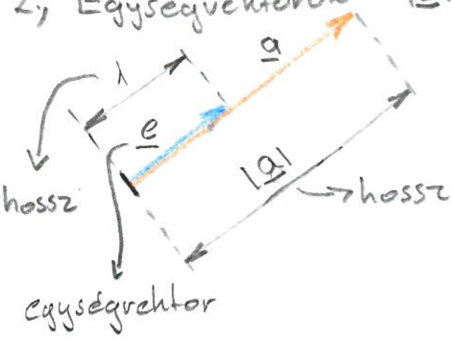
Most: $|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

d, $|\underline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

e, $|\underline{b}-\underline{a}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$

$$\underline{b}-\underline{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2, Egységvektorok: $|\underline{e}| = 1$



$$\underset{\text{hosszt adja}}{\underline{a} = |\underline{a}|}\cdot \underline{e}$$

szám!

$\underline{e}$ → irányt adja

⇓

$$\underline{e} = \frac{1}{|\underline{a}|}\cdot \underline{a} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$$

Az $\underline{a}$ vektor egységvektora

a, $$\underline{e}_a = \frac{1}{|\underline{a}|}\cdot \underline{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}27 \\ 0{,}53 \\ 0{,}80 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés: $|\underline{e}_a| = \sqrt{0{,}27^2+0{,}53^2+0{,}8^2} = 1$ ✓

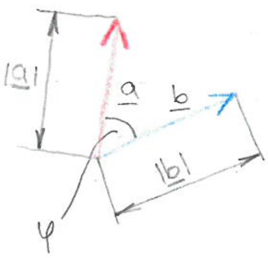
b, $\underline{e} = \frac{1}{|\_|}\cdot \_$

3, Skaláris szorzat:

$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\varphi$

⇓

az eredmény egy szám, egy skalár



Kiszámítása koordináták alapján:

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

pl.: $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\underline{a}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} = 1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6 = 4+10+18 = 32$$

$\underline{a}\cdot\underline{b} = 32$

Megjegyzések:

- $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underbrace{|\underline{a}|}_{\geq 0}\cdot\underbrace{|\underline{b}|}_{\geq 0}\cdot\cos\varphi$

  $\cos\varphi$ → ez határozza meg az előjelet

  ≥ 0, ≥ 0 → hiszen ezek vektorhosszok

  ⇓

- $\underbrace{(\underline{a}\cdot\underline{b})}_{\text{szám}}\cdot\underline{c} \neq \underline{a}\cdot\underbrace{(\underline{b}\cdot\underline{c})}_{\text{szám}}$

  $\underline{c}$ vektor megnyújtva — $\underline{a}$ vektor megnyújtva

  Nem lehetnek egyenlőek, ha $\underline{a}$ és $\underline{c}$ iránya más

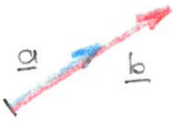
Legyen $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$

$\Downarrow$

I. $\varphi = 0$

$\cos\varphi = 1$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| > 0$



speciális:

$\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}| \cdot |\underline{a}| = |\underline{a}|^2$

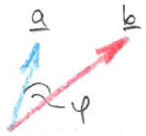
$\Downarrow$

$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$

II. $0 < \varphi < 90°$

$\cos\varphi \in]0, 1[$ ← tőle függ az előjel!

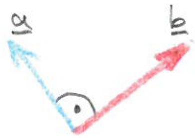
$\underline{a} \cdot \underline{b} > 0$



III. $\varphi = 90°$

$\cos\varphi = 0$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

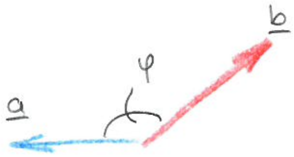


$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \\ \Updownarrow \\ \underline{a} \perp \underline{b}, \text{ ha } \underline{a} \neq \underline{0} \\ \text{és } \underline{b} = \underline{0} \end{array}}$$

IV. $90° < \varphi < 180°$

$\cos\varphi \in]0, -1[$

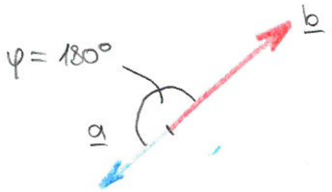
$\underline{a} \cdot \underline{b} < 0$



V. $\varphi = 180°$

$\cos\varphi = -1$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = -|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| < 0$



Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem nullvektorok

$\Downarrow$

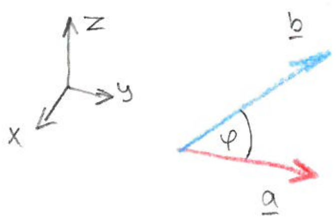
$\underline{0} \cdot \underline{a} = 0$

$\downarrow$

tetszőleges lehet, az eredmény mindenképp 0

Vektorok bezárt szöge

3.



$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi$

$\Downarrow$

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-1)}_{-1} + \underbrace{2 \cdot 0}_{0} + \underbrace{3 \cdot 1}_{3} = 2$$

$|\underline{a}| = \sqrt{14}$ $\quad |\underline{b}| = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ 1/c,d feladat

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{7}} = 67{,}8°$$

4, $\underline{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ha merőlegesek: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} = 0$

$$(-2) \cdot (-1) + 3 \cdot v_2 + (-1) \cdot 1 = 0$$

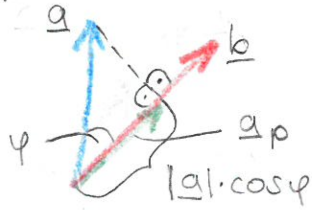
$$2 + 3v_2 - 1 = 0$$

$$v_2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5., Bontsuk fel $\underline{a}$-t $\underline{b}$-vel párhuzamos, és arra merőleges komponensre

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- párhuzamos komponens: $\underline{a}_p$



$$\underline{a}_p = \underbrace{\overset{\text{hossz}}{\left(|\underline{a}|\cdot\cos\varphi\right)}}_{\text{párhuzamos komponens hossza}} \cdot \underbrace{\overset{\text{irány}}{\underline{e}_b}}_{\text{b irányú egységvektor}}$$

de: $\underbrace{|\underline{a}|\cdot\cos\varphi}_{\underline{a}\text{ merőleges vetülete }\underline{b}\text{-re}} = 1\cdot|\underline{a}|\cdot\cos\varphi = \underbrace{\underline{e}_b\cdot\underline{a}}_{\underline{a}\text{ és }\underline{b}\text{ egységvektorának skaláris szorzata}}$

Tehát: I. $\underline{a}_p = \underbrace{(\underline{e}_b\cdot\underline{a})}_{\text{hossz}}\cdot\underbrace{\underline{e}_b}_{\text{irány}} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{-9+4=-5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{-5}{11}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5/11 \\ -15/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}$

$$\underline{e}_b = \frac{1}{|\underline{b}|}\cdot\underline{b} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$$

II. További átalakításokkal:

$$\underline{a}_p = (\underline{e}_b\cdot\underline{a})\cdot\underline{e}_b \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{|\underline{b}|^2}\cdot(\underline{a}\cdot\underline{b})\cdot\underline{b} = \underbrace{\left(\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}\cdot\underline{b}}\right)}_{\text{szám}}\cdot\underbrace{\underline{b}}_{\text{vektor}} =$$

$$\underline{e}_b = \frac{1}{|\underline{b}|}\cdot\underline{b}$$

$$= \left(\frac{-9+4}{1^2+3^2+1^2}\right)\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5/11 \\ -15/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}$$

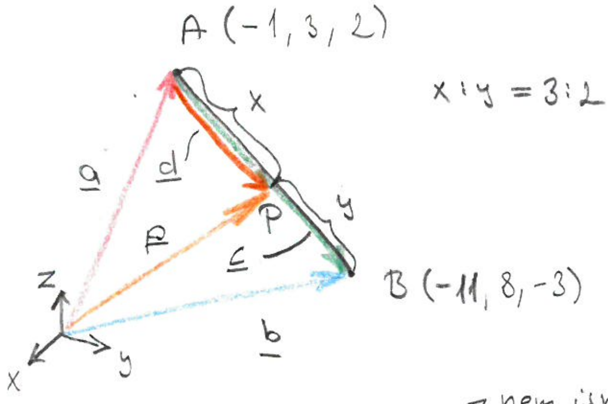
- merőleges komponens:

$$\underline{a} = \underline{a}_p + \underline{a}_m \Rightarrow \underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_p =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -33/11 \\ 44/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/11 \\ -15/11 \\ -5/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/11 \\ -18/11 \\ 49/11 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés: $\underline{a}_p\cdot\underline{a}_m = 0$, mivel merőlegesek

$$\begin{bmatrix} 5/11 \\ -15/11 \\ -5/11 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -5/11 \\ -18/11 \\ 49/11 \end{bmatrix} = \frac{1}{11^2}\cdot(-25+270-245) = 0 \quad ✓$$



$x : y = 3 : 2 \iff \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ $\underline{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$

nem ismert még

P-hez kell: $\underline{p} = \underline{a} + \underline{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}}$

$\underline{d} = x \cdot \underline{e}_c = x \cdot \frac{1}{x+y} \cdot \underline{c} = \frac{x}{x+y} \cdot \underline{c} = \frac{\overset{3/5}{\widetilde{3}}}{3+2} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

ha $|\underline{c}| = x+y$, csak akkor egységvektor! nem ismert még

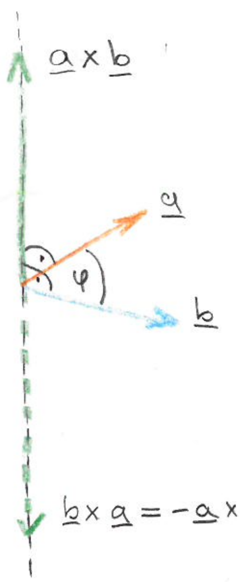
$\underline{c} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\underline{b} = \underline{a} + \underline{c}$

Tehát: P(−7, 6, −1)

Megjegyzés: $\underline{p} = \underline{a} + \underline{d} = \underline{a} + \frac{x}{x+y}(\underline{b} - \underline{a}) = \frac{(x+y)\cdot\underline{a} + x\underline{b} - x\underline{a}}{x+y} = \frac{y\underline{a} + x\underline{b}}{x+y}$

7., Keresztszorzat (vektoriális szorzat)



$\underline{b} \times \underline{a} = -\underline{a} \times \underline{b}$!

Def.:
- $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak
- $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\varphi$
- $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges $\underline{a}$-ra : $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$
  $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges $\underline{b}$-re : $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$

Kiszámítása: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

ez egy determináns

$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{determináns}} - \underline{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

nem kapcsos zárójel!!!

Determináns értéke: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

Megjegyzés:
$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. a)

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

a, b

váltakozó előjel!

$$=\underline{i}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}}_{2\cdot1-3\cdot0=2}-\underline{j}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}}_{1\cdot1-3\cdot(-1)=4}+\underline{k}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}}_{1\cdot0-2\cdot(-1)=2}=$$

$$=\overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}^{\underline{i}}\cdot\underbrace{2}_{x}-\overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}^{\underline{j}}\cdot\underbrace{4}_{-y}+\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}^{\underline{k}}\cdot\underbrace{2}_{z}=\begin{bmatrix}2\\-4\\2\end{bmatrix}$$

megjegyzés:

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{a}=\begin{bmatrix}2\\-4\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=$$

$$=2\cdot1-4\cdot2+2\cdot3=0$$

Tehát tényleg merőlegesek!

b)

$$\underline{b}\times\underline{c}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ -1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\underline{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\underline{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}+\underline{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}=$$

c, b

$$=\underline{i}\cdot\underbrace{(0\cdot0-1\cdot2)}_{-2}-\underline{j}\cdot\underbrace{(-1\cdot0-1\cdot(-2))}_{2}+\underline{k}\underbrace{(-1\cdot2-0\cdot(-2))}_{-2}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

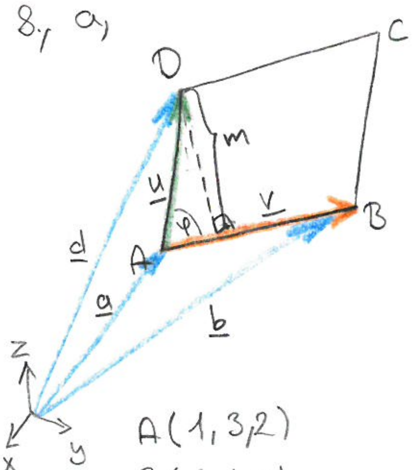
c)

$$\underline{a}\times\underline{c}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\underline{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}-\underline{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{vmatrix}+\underline{k}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=$$

c, a

$$=\underline{i}\cdot\underbrace{(2\cdot0-3\cdot2)}_{-6}-\underline{j}\cdot\underbrace{(1\cdot0-3\cdot(-2))}_{+6}+\underline{k}\cdot\underbrace{(1\cdot2-2\cdot(-2))}_{+6}=\begin{bmatrix}-6\\-6\\6\end{bmatrix}$$

8. a)



A(1, 3, 2)
B(-2, 1, 0)
D(-1, 0, 2)

A terület:

$$T=|\underline{v}|\cdot\underbrace{m}_{|\underline{u}|\cdot\sin\varphi}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\sin\varphi=|\underline{u}\times\underline{v}|$$

Kell $\underline{u}$ és $\underline{v}$!

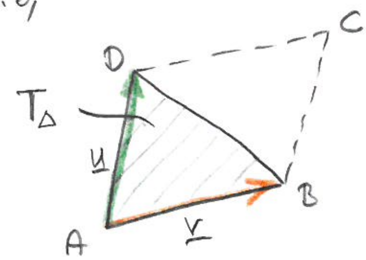
$$\underline{a}+\underline{u}=\underline{d}\Rightarrow\underline{u}=\underline{d}-\underline{a}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-3\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{a}+\underline{v}=\underline{b}\quad=\quad\underline{v}=\underline{b}-\underline{a}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\underline{u}\times\underline{v}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ -2 & -3 & 0\\ -3 & -2 & -2\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-4\\-5\end{bmatrix}\Rightarrow|\underline{u}\times\underline{v}|=\sqrt{6^2+4^2+5^2}=\sqrt{77}\approx8{,}77$$

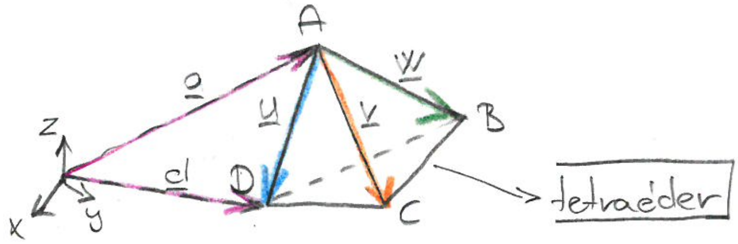
$$T\approx8{,}77$$

8.b/



$$T_\Delta = \frac{T}{2} = \frac{|\underline{u}\times\underline{v}|}{2} \approx \frac{8{,}77}{2} \approx \underline{\underline{4{,}39}}$$

9. A(0, −1, 1)
B(1, 2, 3)
C(1, −1, 3)
D(−3, 4, 0)



$$\underline{a}+\underline{u}=\underline{d} \Rightarrow \underline{u}=\underline{d}-\underline{a}=\begin{bmatrix}-3\\4\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\5\\-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{a}+\underline{v}=\underline{c} \Rightarrow \underline{v}=\underline{c}-\underline{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$$

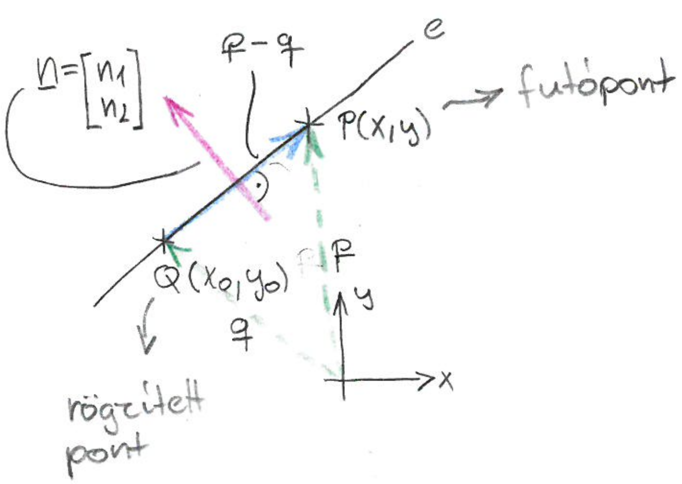
$$\underline{a}+\underline{w}=\underline{b} \Rightarrow \underline{w}=\underline{b}-\underline{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

A térfogat:

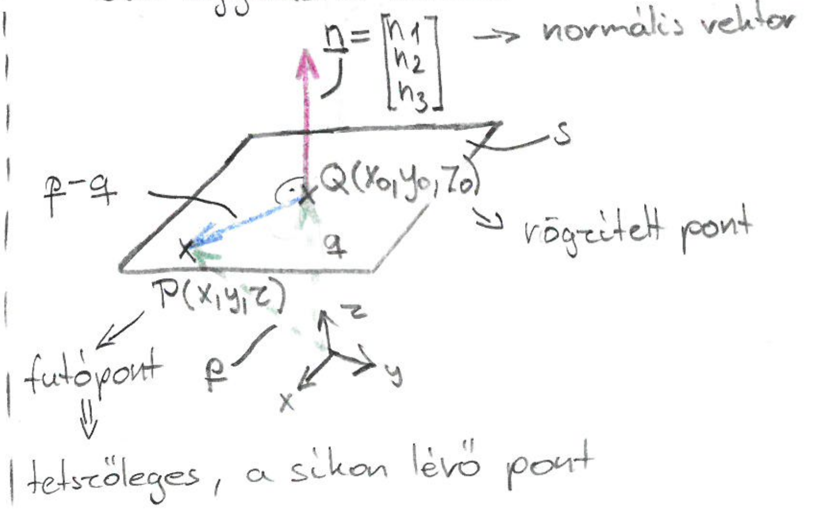
$$V=\frac{T\cdot m}{3}=\ldots=\left|\frac{(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w}}{6}\right|=\left|\frac{\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}}{6}\right| \quad \text{abszolút érték}$$

$$\underline{u}\times\underline{v}=\begin{bmatrix}10\\5\\-5\end{bmatrix} \qquad (\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w}=10+15-10=15 \Rightarrow V=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=\underline{\underline{2{,}5}}$$

10./ Egyenes egyenlete síkban:



Sík egyenlete térben:



Egyenes egyenlete síkban

$(\underline{p}-\underline{q}) \perp \underline{n}$

$\Downarrow$

$(\underline{p}-\underline{q}) \cdot \underline{n} = 0$

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\Downarrow$

$(x-x_0)\cdot n_1 + (y-y_0)\cdot n_2 = 0$

Sík egyenlet térben

$(\underline{p}-\underline{q}) \perp \underline{n}$

$\Downarrow$

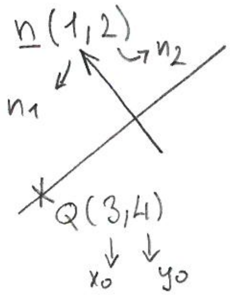
$(\underline{p}-\underline{q}) \cdot \underline{n} = 0$

$$\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$(x-x_0)\cdot n_1 + (y-y_0)\cdot n_2 + (z-z_0)\cdot n_3 = 0$

$n_1\cdot x + n_2\cdot y + n_3 \cdot z = n_1\cdot x_0 + n_2\cdot y_0 + n_3\cdot z_0$

Példa:

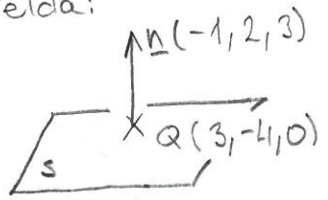


e:

$1\cdot x + 2y = 1\cdot 3 + 2\cdot 4$

$x + 2y = 11$

Példa:

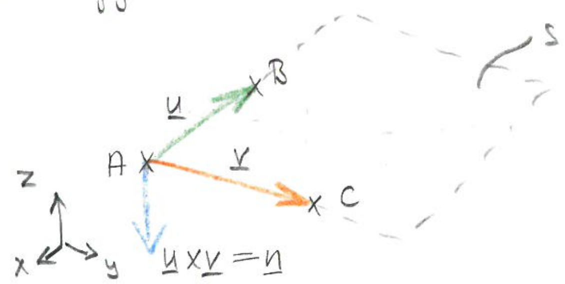


s: $-1\cdot x + 2y + 3z = -1\cdot 3 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 0$

$-x + 2y + 3z = -11$

11, A(2,1,3)
B(1,0,-1)
C(3,-1,0)
D(4,0,4)
E(2,1,0)

a, Írjuk fel az A, B, C pontokra illeszkedő sík egyenletét!



- A normálvektor: $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$

$= \underline{i}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}_{-5} - \underline{j}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}_{7} + \underline{k}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}_{3} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\underline{a} + \underline{u} = \underline{b} \Rightarrow \underline{u} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$\underline{a} + \underline{v} = \underline{c} \Rightarrow \underline{v} = \underline{c} - \underline{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

- A sík egyenlete: A ponton keresztül, $\underline{n}$ normálvektorral

s: $-5x - 7y + 3z = -5\cdot 2 - 7\cdot 1 + 3\cdot 3 \Rightarrow -5x - 7y + 3z = -8$

- Ha D a síkon van, akkor kielégíti a síknak az egyenletét

$-5\cdot 4 - 7\cdot 0 + 3\cdot 4 = -8 \Rightarrow -8 = -8$ ✓ Tehát D a síkon van.

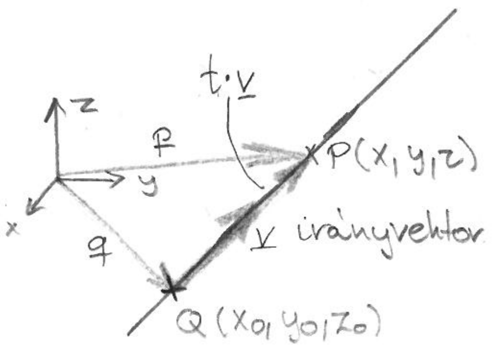
Azaz A, B, C, D egy síkon van.

b, E koordinátáit helyettesítve az egyenletbe:

$-5\cdot 2 - 7\cdot 1 + 30 \neq -8 \implies -17 \neq -8$

Azaz E nincs az előbbi síkon!

12, Egyenes egyenlete térben:



$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$\underline{p} = \underline{q} + t\cdot\underline{v}$, t a paraméter $t \in \mathbb{R}$

Minden t-hez az egyenes egy pontja tartozik, és viszont.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t\cdot v_1 \\ y_0 + t\cdot v_2 \\ z_0 + t\cdot v_3 \end{bmatrix}$ ⇒ ez egy vektoregyenlet ⇕ egyenletrendszer

$x = x_0 + t\cdot v_1 \implies t = \frac{x - x_0}{v_1}$

$y = y_0 + t\cdot v_2 \implies t = \frac{y - y_0}{v_2}$, ha $v_1, v_2, v_3 \neq 0$

$z = z_0 + t\cdot v_3 \implies t = \frac{z - z_0}{v_3}$

$\Downarrow$

Ebből:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Példa: a, $Q(3, -1, 1)$, $\underline{v}(1, 3, -1)$ $\implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Az egyenletrendszer:

$x = 3 + t$
$y = -1 + 3t$
$z = 1 - t$

b, $Q(3, 4, 0)$, $\underline{v}(-2, 1, 0)$ $\implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

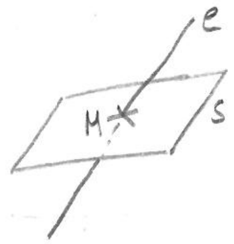
$\left.\begin{matrix} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \implies t = y - 4 \end{matrix}\right\} x = 3 - 2\cdot(y-4) \implies x + 2y = 11$

$z = 0$

Ez ugyanaz, mint a 10.-esben a síkbeli egyenes egyenlete. Csak 3D-ben most kikötöttük, hogy $z = 0$, azaz a (x,y) síkban van az egyenes!

a) A sík: $Q(3, 4, +8)$ $\Rightarrow$ s: $1x + 1y - 1z = 3 + 4 - 8$

$\underline{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad x + y - z = -1$



Az egyenes: $R(0, 0, 3)$ $\Rightarrow$ e: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$x = -t$
$y = 2t$
$z = 3 + 3t$

A metszéspont mindkét egyenletet kielégíti.

$x + y - z = -1 \Rightarrow -t + 2t - (3 + 3t) = -1$

$x \to -t, \quad y \to 2t, \quad z \to 3 + 3t$

$-2t = 2$

$t = -1$ $\rightarrow$ Ezen paraméterű pontja az egyenesnek éppen a metszéspont.

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 3 = 0 \end{array}\right\} M(1, -2, 0)$

---

b) Az egyenes most: $R(1, 1, 1)$ $\qquad e$: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = 1$
$y = 1 + t$
$z = 1 + t$

A metszéspont:

$x + y - z = -1 \Rightarrow 1 + (1 + t) - (1 + t) = -1$

$1 = -1$ De ez nem igaz! $1 \neq -1$

$\Downarrow$

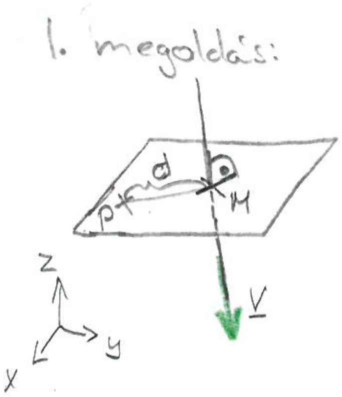
Nincsen metszéspont.

Az egyenes és a sík párhuzamos.

Ok: $\underline{v} \perp \underline{n} \Leftrightarrow \underline{v} \cdot \underline{n} = 0$

14, $e: \frac{x-4}{2} = \frac{-2-y}{3} = z$ és $P(1,1,1)$ távolsága?

I. megoldás:



Az egyenes irányvektora ($\underline{v}$):

$$\left.\begin{aligned} t=\frac{x-4}{2} &\Rightarrow x=4+2t \\ t=\frac{-2-y}{3} &\Rightarrow y=-2-3t \\ t=z &\Rightarrow z=0+t \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{v}}$$

Az egyenesre merőleges sík ($\underline{v}$ és P alapján):

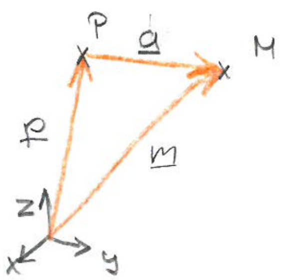
$$2x-3y+z = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 1\cdot 1 \Rightarrow 2x-3y+z=0$$

A metszéspont:

$$2\cdot(4+2t) - 3\cdot(-2-3t) + (0+t) = 0$$

$$\begin{aligned} 14t+14 &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 4-2 = 2 \\ y &= -2+3 = 1 \\ z &= 0-1 = -1 \end{aligned}\right\} M(2,1,-1)$$

A távolság: d



$$\underline{p} + \underline{a} = \underline{m}$$

$$\underline{a} = \underline{m} - \underline{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

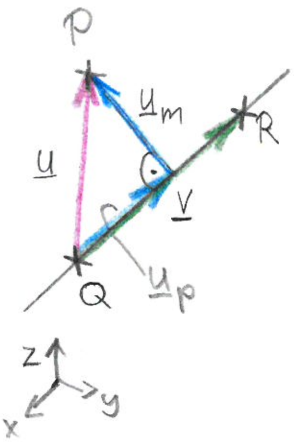
$$d = |\underline{a}| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

II. megoldás:

Vegyünk két tetszőleges pontot az egyenesen!

$$e: \frac{x-4}{2} = \frac{-2-y}{3} = z \quad /\cdot 6$$

$$3x-12 = -4-2y = 6z$$



• Q: Legyen $z=0$!

$$x = \frac{12}{3} = 4, \quad y = -\frac{4}{2} = -2 \quad \Rightarrow \underline{Q}(4,-2,0)$$

• R: Legyen $z=1$

$$x = \frac{6+12}{3} = 6, \quad y = \frac{6+4}{-2} = -5 \Rightarrow R(6,-5,1)$$

Ezekkel: $\underline{u} = \underline{p} - \underline{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{v} = \underline{r} - \underline{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan a korábbi **5.** feladathoz, a merőleges komponense $\underline{u}$-nak:

$$\underline{u}_m = \underline{u} - \underline{u}_p = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

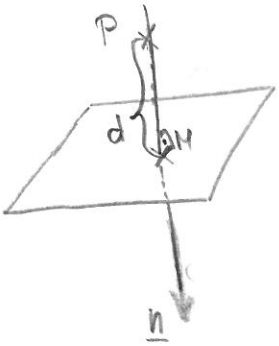
párhuzamos komp.

$$\underline{u}_p = \underbrace{(\underline{u} \cdot \underline{e}_v)}_{\text{hossz}} \cdot \underbrace{\underline{e}_v}_{\text{irány}} = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\underline{v} \cdot \underline{v}} \cdot \underline{v} = \underbrace{\frac{-6-9+1}{2^2+3^2+1^2}}_{\frac{-14}{14} = -1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A távolság: $d = |\underline{u}_m| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$

15, $s: \ x - 2y + 2z + 4 = 0$

$p(-1, 0, 3)$



A sík egy normálvektora:

$$x - 2y + 2z = -4$$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A síkra merőleges egyenes:

$$e: \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\underline{p}} + t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\underline{n}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 + t \\ y &= -2t \\ z &= 3 + 2t \end{aligned}$$

A metszéspont:

$$(-1+t) - 2(-2t) + 2(3+2t) + 4 = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

$$t = -1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= +2 \\ z &= 1 \end{aligned} \right\} M(-2, 2, 1)$$

A távolság:

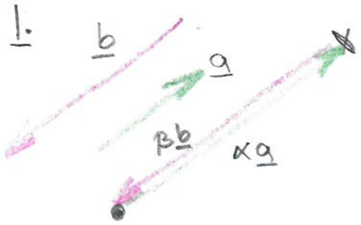
$$d = |\underline{p} - \underline{m}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$$

$$\underline{p} - \underline{m} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

16, Lineáris függetlenség:

2D-ben:

I.



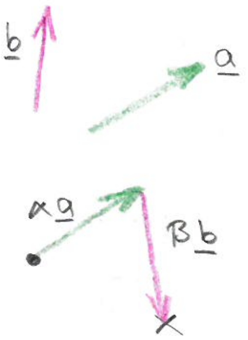
$\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan összefüggő

Ok: $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = 0$

$\alpha \underline{a} = -\beta \underline{b}$

Azaz $\underline{a}$ és $\underline{b}$ párhuzamosak

II.



$\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan független

- kiindulópontból indulva x végpontba érünk. E kettő csak akkor esék egybe, ha: $\alpha = 0$ és $\beta = 0$

$\Downarrow$

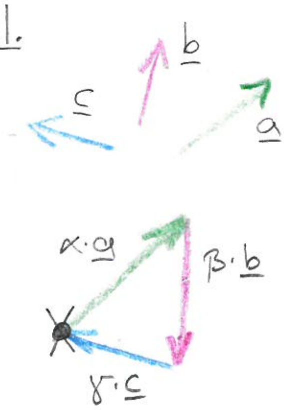
Azaz:

$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$

$\Updownarrow$

$\alpha = 0$ és $\beta = 0$

III.



$\underline{a}$ és $\underline{b}$ és $\underline{c}$ lineárisan összefüggő

Mint látható fentebb, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ esetén elő lehet állítani nullvektort

$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$

alakban.

a) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\underline{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Próba: $\alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c} = \underline{0}$

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma &= 0 \quad (1) \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \quad (2) \\ \beta + \gamma &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Megoldva: (1) + (2): $3\beta = 0$

$\beta = 0$

(3) : $0 + \gamma = 0$

$\gamma = 0$

(1) : $\alpha = 0$

$\Downarrow$

Ez az úgynevezett triviális megoldás: $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$

Tehát $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan függetlenek

Most:

„Három különböző irányba állnak"

b/ $\underline{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\underline{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Próba: $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} = \underline{0}$

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lr} -\alpha + \beta - \gamma = 0 & (1) \\ \alpha + \beta \quad = 0 & (2) \\ -3\alpha - \beta - \gamma = 0 & (3) \end{array}$$

(2): $\alpha = -\beta$

(1): $\beta + \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 2\beta$

(3): $3\beta - \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 2\beta$

- Legyen $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0,\ \gamma = 0$ $\rightarrow$ ez megoldás (a triviális)
- Legyen $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = -1,\ \gamma = 2$ $\rightarrow$ ez is megoldás (de nem triv.)

  például:
  $-\underline{a} + \underline{b} + 2\underline{c} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ nem lineárisan függetlenek