Matek A1 / 1. gyakorlat

1. Definiáljuk a következő halmazokat!

   a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza

   b) racionális; irracionális számok halmaza

   c) a négyzetszámok halmaza

2. Legyen A a páros számok halmaza, B a 4-nél kisebb természetes számok halmaza, C pedig a 2-nél nem kisebb természetes számok halmaza!

   a) Adjuk meg a fenti halmazokat a szokásos matematikai jelölésekkel!

   b) Állapítsuk meg mik lesznek a következő halmaz elemei!
   $G = (A \setminus (B \cap C)) \cup ((A \setminus B) \setminus C)$

3. Hozzuk egyszerűbb alakra a $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ kifejezést! (Venn-diagrammal elég levezetni.)

4. Írjuk fel az $\{a, b, c\}$ halmaz összes részhalmazát! Hány részhalmaza van?

5. Hány részhalmaza van egy kilencelemű halmaznak? És általában egy n elemű halmaznak?

6. Legyen $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   a) Hány részhalmaza van X-nek?

   b) Hány 3 elemű részhalmaza van X-nek?

7. Legyen $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Írd fel az $(X \times Y) \cap (Y \times X)$ és az $(X \times Y) \setminus (Y \times X)$ halmazok elemeit!

8. Ábrázoljuk a következő halmazokat a derékszögű koordinátarendszerben!

   a) $D = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

   b) $E = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

   c) $F = F_1 \times F_2$

   d) $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

   $F_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ és $F_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

9. Keressünk képletet $\sum_{j=1}^{n} j$ kiszámítására, majd igazoljuk teljes indukcióval!

10. Igazoljuk teljes indukcióval az alábbi állításokat!

    a) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

    b) $\sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

14:00
09.09.

1. gyakorlat

Halmazok

- e-mail, konzultáció
- ZH: 0.: min. 40%, jegy nincs
  1. } 20 pont, min 6 pont / 30%
  2. } → 1: 1–5. hét
  2: 6–11. hét
  röpzh?
  3-ból 2 javítható, a pótzh felülír
  pót ZH: 13 hét
- Vizsga: 60 pont, min 24 pont / 40%
- Jegy: 0–39, 40–54, 55–69, 70–84, 85–100
- Jelenléti köv.: 70%, egy pótolható párh.
- Kaja, beszéd elbaltás, zh

- Számhalmazok:
  - természetes számok
    $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ → nem túl korrekt
    ↳ natural
  - egész számok
    $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
  - racionális számok
    $\mathbb{Q} = \{$felírhatóak tört alakban$\}$
    ↳ quotient
    pl.: $\frac{1}{2}$, $\frac{387}{19}$, $2 = \frac{2}{1}$
  - irracionális számok
    $\mathbb{Q}^* = \{$nem írhatóak fel tört alakban$\}$
    pl.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$, π, e
  - valós számok
    $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$
    ↳ real

- Számhalmazok megadása
  $A = \{$alaphalmaz $|$ feltételek$\}$
  minek az elemeiből válogatunk

1, a, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
$A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x < 1\}$
poz. val.
megj.: $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{N}^+$

b, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{a}{b}$, ahol $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ pl.: $\frac{1}{2}$
$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 : x = \frac{a}{b}\}$
létezik (exist) — úgy, hogy
megj.: $\exists!$

$\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid \nexists\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 : x = \frac{a}{b}\}$

c, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{Z} : x = a^2\}$ → 0, 1, 4 ...
$x \in \mathbb{Z}$ $\quad \in \mathbb{N}$
$x \in \mathbb{Q}$

11p. ..

2, a, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{N} : x = 2a\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
($0 \cdot 2$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 2$, $4 \cdot 2$)
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2\} = \{2, 3, 4, \dots\}$

Halmazműveletek

- unió: $A \cup B$
  ↘ vagy...

→ Venn-diagram

A-nak vagy B-nek eleme.

- metszet: $A \cap B$
  ↘ és...

A-nak és B-nek is eleme.

- különbség: $A \setminus B$

A-nak eleme, de B-nek nem.

- komplementer:
  Kell tudni hozzá mi az alaphalmaz: U ← univerzum

$\bar{A} = U \setminus A$

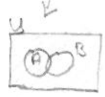
szellősen írni

2.c, $G = (A \setminus \underbrace{(B \cap C)}_{\{2,3\}}) \cup (\underbrace{\underbrace{(A \setminus B)}_{\{4,6,8,10,\dots\}} \setminus C}_{\emptyset}) = \{0,4,6,8,10,\dots\}$

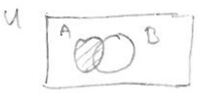
$\{0,4,6,8,10,\dots\}$

12 p/24 p

3., a, $\underbrace{(A \cup B)} \cap \underbrace{(A \cup \bar{B})} = A$



mindkettőnél ki van színezve



Részhalmazok száma,
binomiális együtthatók, binomiális tétel

- részhalmaz:

$A \subseteq B$ ↘ „$\leq$" A összes eleme eleme B-nek is

pl.: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$

- szigorú részhalmaz:

$A \subset B$: $A \subseteq B$, de $A = B$ ↘ „$<$"

4., $A = \{a, b, c\}$

I. 0 elemű: $\emptyset$ → üreshalmaz → 1 db $= \binom{3}{0}$

1 elemű: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ → 3 db $= \binom{3}{1}$

2 elemű: $\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}$ → 3 db $= \binom{3}{2}$

3 elemű: $\{a,b,c\}$ → 1 db $= \binom{3}{3}$ => Σ: 8 db

megj.: $\emptyset \neq 5-5$

II. A =	{ a	, b	, c }
Beleesszük a részhalmazba?	I/N	I/N	I/N

Lehetőséget: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Következtetés: Tetszőleges n elemű halmaz összes részhalmazainak a száma 2^n.

/ 2^9 db

2^n db

6, $X = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ → 15 db

a, 2^{15}

b, $\underset{\uparrow}{\underline{5}} \cdot \underset{\uparrow}{\underline{4}} \cdot \underset{\uparrow}{\underline{3}}$ → De ebben benne van a sorrend még

1. választáskor 2v. 3v.

pl.: $\{P, S, Z\}$, $\{P, Z, S\}$

külön esetnek vettem

A részhalmaz elemeit sorbarendezve:

$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 3!$

Részhalmazok száma:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\overbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{5!}}{\underbrace{(3 \cdot 2 \cdot 1)}_{3!}\underbrace{(2 \cdot 1)}_{(5-3)!}} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \binom{5}{3} = 10$$

jelentése: Hányféleképpen tudok 5 elemből 3-at kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít.

Általánosítva: n elemből k elemet a sorrend figyelembe vétele nélkül $\binom{n}{k}$ - féleképpen választhatunk ki.

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$

Binomiális tétel:

binom. együtthatók

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots (a+b)}_{n\,db} = \binom{n}{0} \cdot a^0 \cdot b^{n-0} + \binom{n}{1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^n \cdot b^{n-n}$$

megj.: $0! = 1$

Binomiális eh.-k tulajdonságai:

- Előbb:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$$

Általánosan: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

Lássuk be: binom. t.: $a = 1$, $b = 1$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1$$

$$2^n = \dots$$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

pl.: A 9 elemű halmaz. A-nak ugyanannyi 5 és ugyanannyi $9-5=4$ elemű részhalmaza van.

22p 60p

Halmazok keresztszorzata

7., $X = \{1, 2\}$

$Y = \{1, 2, 3\}$

rendezett számpár, $X \times Y$ eleme

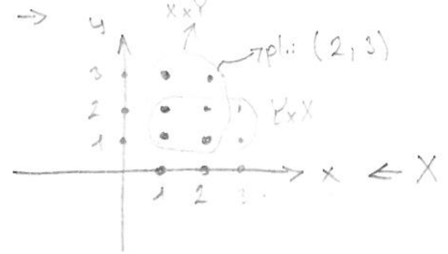
$X \times Y = \left\{ \begin{matrix} (1,3), (2,3) \\ (1,2), (2,2) \\ (1,1), (2,1) \end{matrix} \right\}$ $\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$

kereszt szorzat

$\{1, 2\}$

megfelel a sík pontjainak szemléletesen

$Y \to$

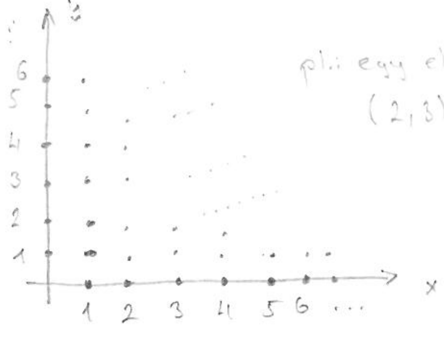


Kereszt szorzatnál számít a sorrend

$Y \times X = \left\{ \begin{matrix} (1,1), (2,1), (3,1) \\ (1,2), (2,2), (3,2) \end{matrix} \right\}$

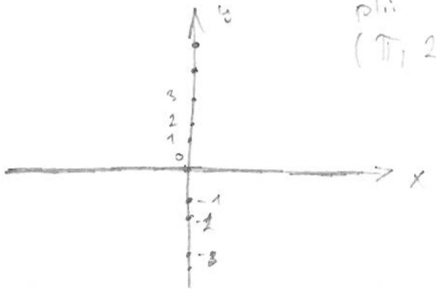
$(X \times Y) \cap (Y \times X) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

8., a, $D = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ (x, y tengelyen)



pl.: egy elemi: $(2, 3), (15, 20)$

b, $E = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$



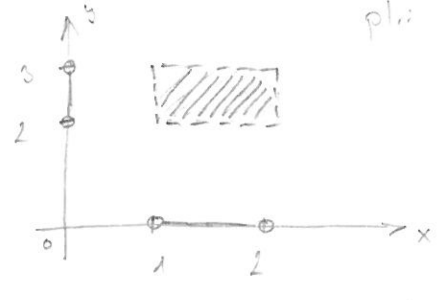
pl.: $(\pi, 2), (2, -1)$

c, $F_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

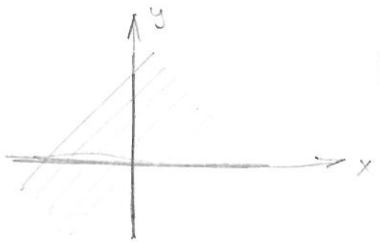
$F_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

$F = F_1 \times F_2$

pl.: $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$



d, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to$ határvhalmaz



pl.: $(\pi, -\sqrt{2})$

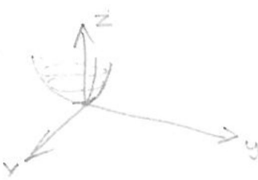
megj.: $\mathbb{R}^3$

20p / 30p

Mikor használjuk?

- 1 változós fv.:
  $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pl.: $f(x) = x$

- 2 változós fv.:
  $f(x, y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pl.: $f(x, y) = x^2 + y^2$



2p / 32p

Teljes indukció:

9.) $\sum_{j=1}^{n} j = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$\overbrace{1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100}^{100 \text{ db}} \rightarrow \sum_{j=1}^{100} j = 1+2+\ldots+100 = 50\cdot 101$

101

101

101

Bizonyítunk minden $n \in \mathbb{N}$-ra.

I. $n=1$-re igaz?

$1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ ✓ Igaz $\left(n=2: \; 1+2 = \frac{\cancel{2}\cdot(2+1)}{\cancel{2}} \checkmark \right)$

II. Tfh. $n=k$-ra igaz, és megnézzük hogy $n=k+1$-re igaz-e.

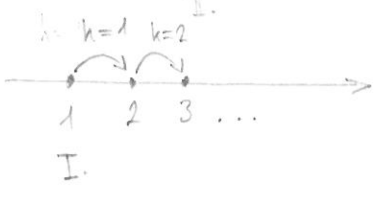
tegyük fel, hogy

Tfh.: igaz: $1+2+\ldots+k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$

cél: a képlethez hasonló valami"

Ekkor: $\underbrace{1+2+\ldots+k}_{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}+k+1 = \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2} =$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ← A képletbe $n=k+1$-et helyettesítve ezt kapjuk.



10p | 10.2p 10.a) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

I. $n=1$-re:

$1^2 = \frac{1\cdot\overbrace{(1+1)}^{2}\cdot\overbrace{(2\cdot1+1)}^{3}}{6} = 1 \rightarrow$ igaz

II. Tfh. $n=k$-ra igaz. Lássuk be $n=k+1$-re!

cél: egy tört

$\underbrace{1^2+2^2+\ldots+k^2}_{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{k\cdot(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$= \frac{k\cdot(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = (k+1)\cdot\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6} =$

$= (k+1)\cdot\frac{2k^2+k+6k+6}{6} = (k+1)\cdot\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(k+1{,}5)}{6}$

$2k^2+7k+6=0 \Rightarrow k = \frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot2\cdot6}}{4} = \frac{-7\pm1}{4} = \begin{cases} -2 \\ -1{,}5 \end{cases}$

b,
$$\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}.$$

I: $n=1$-re:

$$(2\cdot 1-1)^2 = \frac{1\cdot(4\cdot 1^2-1)}{3}$$

$$1=1 \qquad \text{Igaz!}$$

II: Tfh. $n=k$-ra igaz, azaz: $1^2+3^2+\ldots+(2k-1)^2 = \frac{k\cdot(4k^2-1)}{3}$

Ekkor: $n=k+1$-re:

$$\underbrace{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2}_{\frac{k\cdot(4k^2-1)}{3}} + (\overbrace{2\cdot(k+1)-1}^{2k+1})^2 = \frac{k\cdot(4k^2-1)+3(2k+1)^2}{3} \overset{*}{=}$$

$$= \frac{k\cdot(2k+1)(2k-1)+3(2k+1)^2}{3} = (2k+1)\,\frac{2k^2-k+6k+3}{3} = \ldots =$$

$$\overset{*}{=} \frac{4k^3-k+12k^2+12k+3}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

u.a. tehát igaz $n=k+1$-re is!

A képlet $n=k+1$-re:

$$\frac{(k+1)(4\cdot(k+1)^2-1)}{3} = \frac{(k+1)\cdot(4k^2+8k+\overbrace{4-1}^{+3})}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}$$

... F1/1. gyakorlat

0.a) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}$

I. $n=1$-re:
$$1^2 = \frac{1\cdot\overbrace{(1+1)}^{2}\overbrace{(2\cdot1+1)}^{3}}{6} \Rightarrow \text{Igaz!}$$

II. Tfh. $n=k$-ra igaz a fenti képlet, és nézzük meg mi lesz az összeg $n=k+1$-re!

$$\underbrace{1^2+2^2+\ldots+k^2}_{\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}}+(k+1)^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2 =$$

cél: a képlet egy tört, ezért ebből is egy törtet csinálunk

→ indukciós feltevés miatt

$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\cdot(k\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdot(2k^2+7k+6)}{6} \overset{*}{=} \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)\cdot(2(k+1)+1)}{6}$$

- szorzattá alakításhoz:

$2k^2+7k+6=0$

$$k_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7\pm1}{4} \begin{cases} k_1=-1{,}5 \\ k_2=-2 \end{cases}$$

Ebből: $2k^2+7k+6 = 2\cdot(k+1{,}5)(k+2) = (2k+3)(k+2)$

A képletbe $n=k+1$-et helyettesítve ezt kapjuk, tehát erre is igaz a képlet, és így minden $n\in\mathbb{N}^+$-ra is.

- $*$-tól másik megoldás (ha nem akarunk szorzattá alakítani):

Helyettesítsünk a képletbe $n=k+1$-et:

$$\frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)(2\cdot(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

→ Ez volt a $*$-tól balra, tehát igaz $n=k+1$-re a képlet, ...

Teljes indukció

1, $\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k!) = (n+1)! - 1$ -> Igazoljuk teljes indukcióval

I. $k=1$-re:

$1\cdot(1!) = (1+1)! - 1$ -> igaz!

II. Tfh. $k=n$-re igaz, vizsgáljuk meg $k=n+1$ esetét!

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot(k!) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k!)}_{(n+1)!-1} + (n+1)\cdot((n+1)!) = (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot((n+1)!) =$$

-> ind. feltevés miatt

cél: eredeti képlethez hasonló kifejezést kaphassunk

$$= \underbrace{((n+1)!)\cdot(1 + \underbrace{(n+1)}_{n+2})}_{(n+2)!} - 1 = (n+2)! - 1$$

Tehát a képlet igaz $(n+1)$-re is!
Emiatt minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra is!