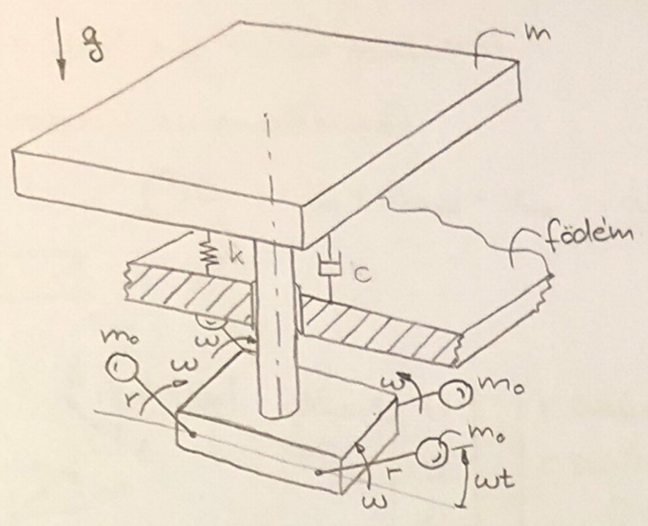
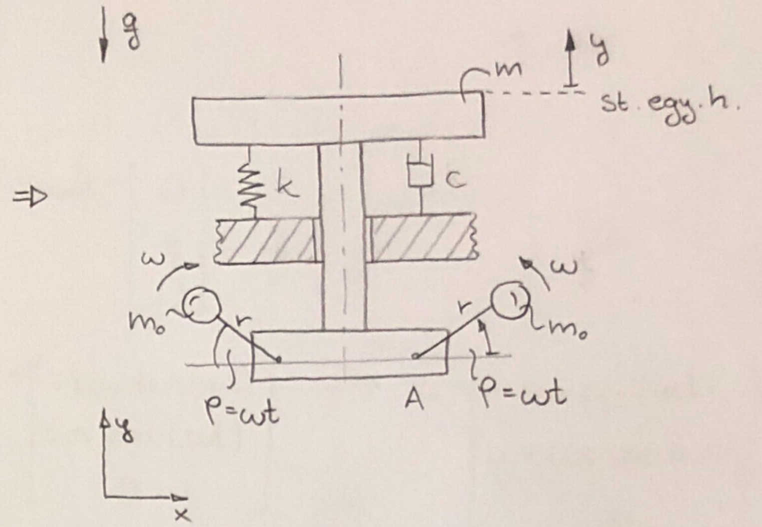
Rázóasztal:





Adatok:

$m = 60\,[kg]$

$m_0 = 0{,}5\,[kg]$ (4db)

$r = 0{,}1\,[m]$

$k = 25\left[\frac{N}{mm}\right] = 25\cdot 10^3\left[\frac{N}{m}\right]$

$\omega = 75\left[\frac{rad}{s}\right] = \text{áll.}$

Feladatok:

1, $c = ?$, hogy $\xi = 0{,}05$ legyen!

2, Stacionárius rezgés amplitúdója, $Y = ?$

3, A födémre átadódó erő maximuma $F_{f\,max} = ?$

Megoldás:

1, Mozgásegyenlet meghatározása:

$n = 1$ DoF (mert az anyagi pontok relatív mozgása az asztalhoz képest elő van írva egy időfüggő kényszerfeltétel által $\varphi = \omega t$)

$q = y$ (asztal függőleges elmozdulása)

Másodfajú-Lagrange egyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial U}{\partial y} = Q^*$$ (Q^*, mert nincsen nempotenciálos erő)

Kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(4m_0)v_0^2$$

mindegyik anyagi pontnak ugyanakkora a sebessége

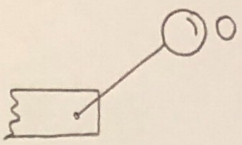
v_0 meghatározása: a, (redukciós képlettel)

$$\underline{v}_0 = \underline{v}_A + \underline{\omega}\times\underline{r}_{A0} = \begin{bmatrix}0\\ \dot{y}\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r\cos(\omega t)\\ r\sin(\omega t)\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\omega r\sin(\omega t)\\ \dot{y}+\omega r\cos(\omega t)\\ 0\end{bmatrix}$$

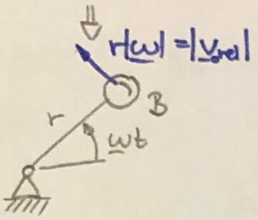
$$v_0^2 = \omega^2 r^2 \sin^2(\omega t) + \dot{y}^2 + 2\omega r \dot{y}\cos(\omega t) + \omega^2 r^2 \cos^2(\omega t)$$

$$= \omega^2 r^2 + \dot{y}^2 + 2\omega r \dot{y}\cos(\omega t)$$

b, (relatív kinematikával)



$\underline{v}_0 = \underline{v}_{0\,száll} + \underline{v}_{0\,rel}$, ahol $\underline{v}_{0\,száll} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$



$$\underline{v}_{0\,rel} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega r\sin(\omega t) \\ \omega r\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} -\omega r\sin(\omega t) \\ \dot{y} + \omega r\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Így

$$T = \frac{1}{2}(m + 4m_0)\dot{y}^2 + 2m_0\left(\omega^2 r^2 + 2\omega r \dot{y}\cos(\omega t)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m + 4m_0)\dot{y} + 4m_0\,\omega r\cos(\omega t) \qquad \underline{\frac{\partial T}{\partial y} = 0}$$

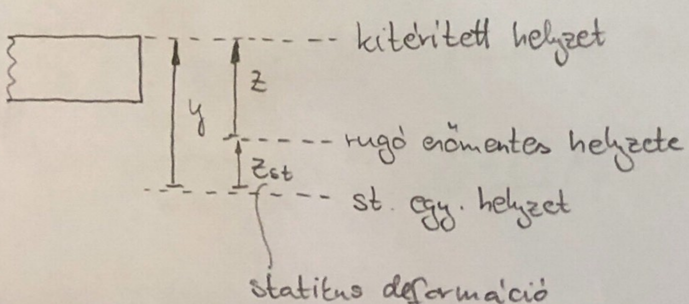
$$\underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m + 4m_0)\ddot{y} - 4m_0\,\omega^2 r\sin(\omega t)}$$

<u>Rayleigh-féle disszipációs fgv.</u>

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{y}^2 \Rightarrow \underline{\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} = c\dot{y}}$$

<u>Potenciálfüggvény:</u>

A rugó nem terheletlen az egyensúlyi helyen, ezért bevezetjük a z koordinátát, amit a rugó erőmentes helyzetétől mérünk



$$\Rightarrow y = z_{st} + z \Rightarrow z = y - z_{st}$$

z jelenti így a rugó deformációját, azaz:

$$U = \frac{1}{2}kz^2 + mgz + 4m_0 g(z + r\sin(\omega t)) + \underbrace{\text{konst.}}_{\text{tetszőleges } U_g = 0 \text{ miatt}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = kz + mg + 4m_0 g \underset{z = y - z_{st}}{=} ky \underbrace{- kz_{st} + (m + 4m_0)g}_{= 0 \text{ a statikus egyensúlyi feltételek megfelelően}}$$

Azaz $q=y$ esetén a mozgásegyenletben ky jelenik meg. Ez előállítható egy „egyszerűbb" potenciálfüggvény segítségével

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}ky^2}\ \underbrace{+ 4m_0 g r \sin(\omega t)}_{\text{konstans (nem függ } y\text{-tól)}}$$

, melyből elhagytuk a rugó statikus deformációját az azt létrehozó nehézségi erők potenciálfüggvényének megfelelő részével együtt.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \underline{ky}$$

A mozgásegyenlet:

$$\underbrace{(m+4m_0)\ddot{y} - 4m_0 r\omega^2 \sin(\omega t)}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y}} + \underbrace{c\dot{y}}_{=\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}} + \underbrace{ky}_{=\frac{\partial U}{\partial y}} = \underbrace{0}_{=Q^*}$$

rendezve:

$$\boxed{\ddot{y} + \underbrace{\frac{c}{m+4m_0}}_{=2\xi\omega_n}\dot{y} + \underbrace{\frac{k}{m+4m_0}}_{=\omega_n^2}y = \underbrace{\frac{4m_0}{m+4m_0}r\omega^2}_{=f_0\omega_n^2}\sin(\omega t)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m+4m_0}} = \underline{\underline{20{,}08}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$c = 2\xi\omega_n(m+4m_0) = \underline{\underline{124{,}5}}\left[\frac{Ns}{m}\right]$$

$$\xi = 0{,}05$$

$$f_0 = \frac{1}{\omega_n^2}\frac{4m_0}{m+4m_0}r\omega^2 = \underline{\underline{46{,}595 \cdot 10^{-3}}}\,[m]$$

2. Stacionárius rezgés amplitúdója:

$y_p(t) = Y\sin(\omega t - \vartheta)$ a stacionárius mozgás

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{75}{20{,}08} = \underline{\underline{3{,}735}}$$ (frekvencia viszony)

$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}} = \underline{\underline{0{,}0772}}\,[1]$$ (nagyítás)

$$Y = Nf_0 = \underline{\underline{3{,}46 \cdot 10^{-3}}}\,[m]$$

$$\vartheta = \arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} = -28{,}83\cdot 10^{-3} + \pi = \underline{\underline{3{,}1128}}\,[rad]$$

3. Födémre átadódó erő maximuma

$$F_f(t) = F_{fst} + F_{fd}(t)$$
(statikus) (dinamikus)

$$F_{fst} = (m + 4m_0)g = 607{,}6\ [N]$$

$$F_{fd}(t) = F_r(t) + F_d(t) = ky(t) + c\dot{y}(t) = kY\sin(\omega t - \vartheta) + \underbrace{+ cY\omega\cos(\omega t - \vartheta)}_{\text{Ebből nem látszik a maximuma.}}$$

Jó lenne, ha $F_{fd}(t) = F_A\cos(\omega t + \delta)$ alak, mert abban $F_A = F_{fdmax}$ jól látszik

Cél:

$$kY\sin(\omega t - \vartheta) + cY\omega\cos(\omega t - \vartheta) = F_A\cos(\omega t + \delta) \equiv F_{fd}(t)$$

Szétbontás:

$$kY\sin(\omega t)\cos\vartheta - kY\cos(\omega t)\sin\vartheta + cY\omega\cos(\omega t)\cos\vartheta + cY\omega\sin(\omega t)\sin\vartheta =$$

$$= F_A\cos(\omega t)\cos\delta - F_A\sin(\omega t)\sin\delta$$

Harmonikus egyensúly módszere:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\omega t):&\ kY\cos\vartheta + cY\omega\sin\vartheta = -F_A\sin\delta \\ \cos(\omega t):&\ -kY\sin\vartheta + cY\omega\cos\vartheta = F_A\cos\delta \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{I.} \\ &\text{II.} \end{aligned}$$

$$\text{I.}^2 + \text{II.}^2:\ (kY\cos\vartheta + cY\omega\sin\vartheta)^2 + (-kY\sin\vartheta + cY\omega\cos\vartheta)^2 = F_A^2\underbrace{(\cos^2\delta + \sin^2\delta)}_{=1}$$

$$k^2Y^2\cos^2\vartheta + 2kcY^2\omega\cos\vartheta\sin\vartheta + c^2Y^2\omega^2\sin^2\vartheta$$
$$+ k^2Y^2\sin^2\vartheta - 2kcY^2\omega\sin\vartheta\cos\vartheta + c^2Y^2\omega^2\cos^2\vartheta = F_A^2$$

$$k^2Y^2\omega^2 + s^2Y^2 = F_A^2 \quad \Rightarrow \quad F_A = \sqrt{c^2Y^2\omega^2 + k^2Y^2} = \underline{\underline{92{,}937}}\ [N]$$

Tehát a maximális erő:

$$F_{fmax} = F_{fst} + F_{fdmax} = F_{fst} + F_A = (m + 4m_0)g + Y\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} = \underline{\underline{699{,}9}}\ [N]$$