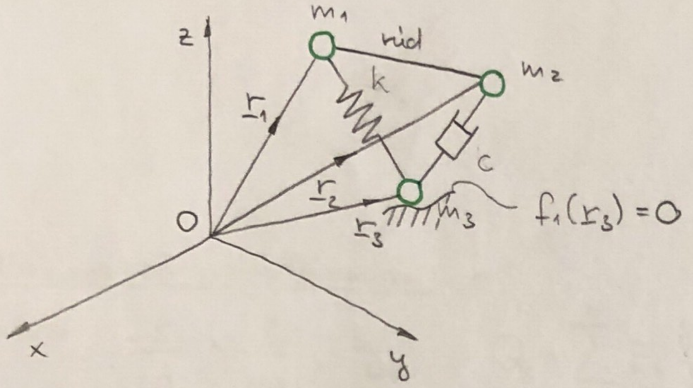
Elmélet:

Az eddig tárgyalt modellek mozgásegyenletét az ún. Newton-Euler módszerrel írtuk fel, azaz szabadtest ábra felrajzolása után alkalmaztuk a dinamika alaptételét. Összetett mechanikai rendszerek esetén azonban ez a módszer hosszadalmas lenne (minden egyes test szabadtest ábráját fel kell rajzolni és egy sok egyenletből álló egyenletrendszer adódna)

A mozgásegyenlet „analitikus" módszerekkel is felírható. Itt valamilyen energia vagy teljesítmény jellegű mennyiségeket használunk fel a levezetéshez.

A másodfajú Lagrange-egyenlet a teljesítménytétel továbbfejlesztéseként tekinthető. Anyagi pontrendszerekre és merev testrendszerekre is érvényes:



ahol N az anyagi pontok száma

m_i az anyagi pont tömege $\quad i=1\dots N$

$\underline{r}_i$ az anyagi pont helyvektora

$\underline{K}_i$ anyagi pontra ható ideális kényszererők eredője

Az egyenletekben nem jelennek meg a kényszerfeltételek!

Geometriai kényszerek: (nem szerepelhet bennük a sebesség kifejezése)
(Holonom kényszerek)

$$f_p(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots \underline{r}_N, t)=0 \qquad p=1\dots g$$

időtől független: szkleronóm

időtől függő: reonóm

Kinematikai kényszerek: (sebességfüggő)
(anholonom kényszerek) $\Rightarrow$ másodfajú-Lagrange egyenlet ezeket nem képes kezelni

Megjegyzés: geometriai kényszerek csökkentik a rendszer szabadsági fokát, így

$n = 3N - g$ a rendszert leíró független skalár függvények száma

Létezzenek ideális kényszerek:

Egy kényszer akkor ideális, ha virtuális teljesítménye zérus:

$$\delta P=\sum_{i=1}^{N} \underline{K}_i \,\delta \underline{v}_i = 0$$

ha időben fixáljuk a kényszereket: $P=\sum_{i=1}^{N} \underline{K}_i \underline{v}_i = 0$

Másodfajú-Lagrange egyenlet levezetése:

Időfüggő kényszerek esetén:

$$\underline{r}_i = \underline{R}_i(q_j, t) \quad i=1\dots N, \; j=1\dots n \quad \underset{\text{időben fix kényszerekre}}{\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}} \quad \dot{\underline{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \quad \text{és} \quad \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j}$$

A dinamika alaptétele:

$$\underbrace{m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{} = \underbrace{\underline{F}_i}_{\text{aktív erők}} + \underbrace{\underline{K}_i}_{\text{ideális kényszererők}} \qquad i = 1 \dots N$$

Átalakítva az egyenletet és szorozva $\dot{\underline{r}}_i$-vel:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i)\dot{\underline{r}}_i = 0 \qquad \text{mivel} \qquad \sum_{i=1}^{N} \underline{K}_i \dot{\underline{r}}_i = 0$$

Mivel $\dot{\underline{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$, így

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{F}_i) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j} - \underline{F}_i \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j}\right) \dot{q}_j = 0$$

mivel q_j-k és $\dot{q}_j$-k függetlenek egymástól

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j}}_{= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j}}_{= Q_j \text{ - általános erő}} = 0$$

Általános erő meghatározása:

mivel: $\frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j}$, így $\quad Q_j = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$

valamint

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j = P \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underline{R}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{= \dot{\underline{r}}_i} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i \underline{v}_i = P$$

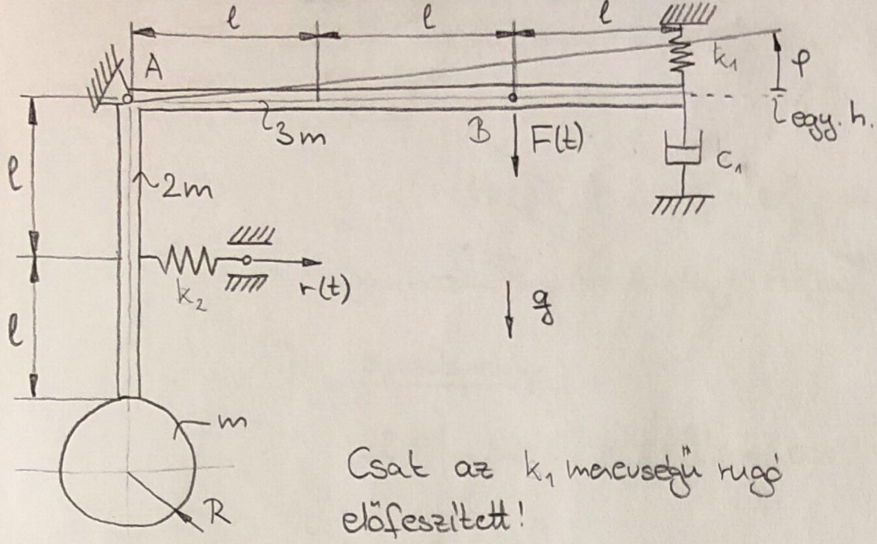
Léteznek potenciálos és nem potenciálos erők:

Potenciálos: $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$ hasonlóan $Q_j = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}$ ahol $\mathcal{D}$ a Rayleigh-féle disszipatív potenciál.

Ez alapján:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q^* \quad \text{, ahol } Q^* \text{ nem potenciálos erő.}$$

Lengőrendszer vizsgálata a másodfajú-Lagrange egyenlet segítségével:



Adatok:

$l = 0{,}2\,[m]$ $\quad r(t) = r_0 \sin(\omega t)$

$m = 0{,}12\,[kg]$ $\quad F(t) = F_0 \sin(\omega t)$

$c_1 = 2\,[Ns/m]$ $\quad \omega = 20\,[rad/s]$

$k_1 = 300\,[N/m]$ $\quad r_0 = 0{,}01\,[m]$

$k_2 = 10\,[N/m]$ $\quad F_0 = 2\,[N]$

$R = 0{,}1\,[m]$

Feladat:

1, Linearizált mozgásegyenlet másodfajú Lagrange egyenlet segítségével!

2, Állandósult állapotbeli megoldás?

Megoldás:

1, Másodfajú-Lagrange-egyenlet: $\quad n = 1\,\text{DoF}$, ahol $q = \varphi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

Kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2}\Theta_A \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_A \dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \Theta_A \ddot{\varphi} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

Rayleigh-féle disszipációs függvény:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c_1(3l\dot{\varphi})^2 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} = c_1(3l)^2\dot{\varphi} = 9l^2 c_1 \dot{\varphi}$$

Belátható, hogy itt már linearizálhatunk

Potenciálfüggvény:

$$U = \frac{1}{2}k_1(\underbrace{\Delta l_{st}}_{\text{statikus def.}} + \underbrace{3l\varphi}_{\text{linearizálás}})^2 + \frac{1}{2}k_2(r(t) - \underbrace{l\varphi}_{\text{linearizálás}})^2 - 2mgl\cos\varphi - mg(2l+R)\cos\varphi + \frac{9}{2}mgl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = k_1(\Delta l_{st} + 3l\varphi)3l - k_2(r(t) - l\varphi)l + 2mgl\underbrace{\sin\varphi}_{=\varphi} + mg(2l+R)\underbrace{\sin\varphi}_{=\varphi} + \frac{9}{2}mgl\underbrace{\cos\varphi}_{=1}$$

Statikus egyensúlyi egyenletből:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta l_{st} = -\frac{3}{2}\frac{mg}{k_1}}$$

Tehát hasonlóan az eddigiekhez, itt is meg lehet tenni, hogy már a számítás elején elhagyjuk a rugó statikus deformációját az őt létrehozó nehézségi erő potenciálfüggvényével együtt:

$$\tilde{U} = \frac{1}{2}k_1(3\ell\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_2(r(t)-\ell\varphi)^2 - 2mg\ell\cos\varphi - mg(2\ell+R)\cos\varphi$$

Ez a függvény ugyanazt az eredményt adja.

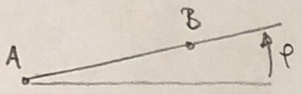
<u>Egyéb aktív erők teljesítménye:</u>

általános sebesség

$$P = \underline{F}\cdot\underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -F(t) \end{bmatrix} \cdot 2\ell\dot\varphi \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = -F(t)\,2\ell\cos\varphi\,\dot\varphi \overset{!}{=} Q^{*}\cdot\dot\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{Q^{*}} = -F(t)\,2\ell\underbrace{\cos\varphi}_{=1} = \underline{-F(t)\cdot 2\ell}$$



$$\underline{v}_B = \overset{=0}{\underline{v}_A} + \underline{\omega}\times\underline{r}_{AB}$$

$$\underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2\ell\cos\varphi \\ 2\ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\ell\sin\varphi \\ 2\ell\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\dot\varphi$$

<u>A mozgásegyenlet:</u>

$$\Theta_A\ddot\varphi + 9\ell^2c_1\dot\varphi + (9\ell^2k_1 + \ell^2k_2 + mg(4\ell+R))\varphi = \underline{k_2 r(t)\cdot\ell - F(t)\cdot 2\ell}$$

$$= k_2\ell r_0\sin(\omega t) - 2\ell F_0\sin(\omega t)$$

$$= (k_2\ell r_0 - 2\ell F_0)\sin(\omega t)$$

$$\ddot\varphi + \underbrace{\frac{9\ell^2c_1}{\Theta_A}}_{=2\zeta\omega_n}\dot\varphi + \underbrace{\frac{9\ell^2k_1 + \ell^2k_2 + mg(4\ell+R)}{\Theta_A}}_{=\omega_n^2}\varphi = \underbrace{\frac{(k_2\ell r_0 - 2\ell F_0)}{\Theta_A}}_{=f_0\omega_n^2}\sin(\omega t)$$

2, <u>Állandósult állapotbeli megoldás:</u>

$$\varphi_p = \Phi\sin(\omega t - \nu)$$

$$\Phi = Nf_0\text{, ahol } N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\lambda^2}}$$

$$\nu = \arctan\frac{2D\lambda}{1-\lambda^2}$$