Elméleti összefoglaló:

Coulomb súrlódással csillapított szabad rezgések:

Súrlódási modell:

A Coulomb féle súrlódási modellben a súrlódási erő a felületeket összenyomó N erővel arányos és az $\dot{x}$ relatív sebességgel ellentétes irányú:

$$F_s = -\mu N \,\mathrm{sgn}(\dot{x})$$

Matematikai értelemben:

$$\mathrm{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{ha } \dot{x} < 0 \\ -1 \text{ és } 1 \text{ között} & \text{ha } \dot{x} = 0 \end{cases}$$

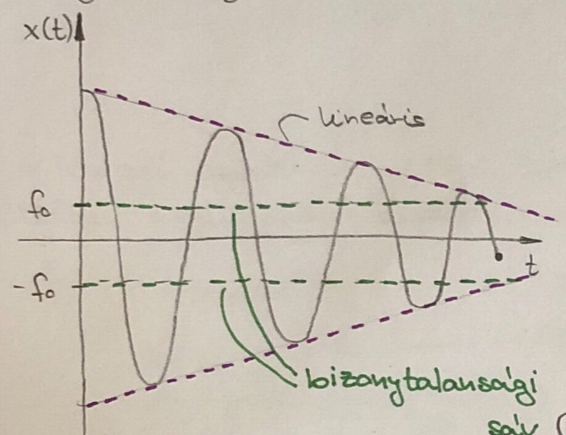
$\Rightarrow$ tapadási súrlódás, a tapadási súrlódási erő a μN és $-\mu N$ határok között akkora értéket vesz fel, hogy egyensúlyt tartson a vizsgált testre ható többi erővel.

$\Uparrow$

nem Lipschitz-es

(gond van a mozgásegyenlet megoldásainak létezésével és egyértelműségével)

Mozgástörvény:



bizonytalansági sáv (ebben a sávban a rendszer bárhol megállhat kezdeti feltételtől függően)

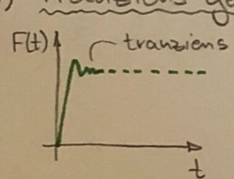
f_0 - statikus kitérés, μN állandó nagyságú erő hatására a rendszer f_0 kitérést produkálna

Gerjesztett lengőrendszerek:

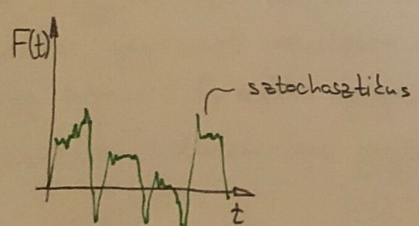
A gépekre, szerkezetekre gyakran hat valamilyen gerjesztő hatás, ami befolyásolja, vagy meg is határozza a létrejövő rezgéseket.

Gerjesztések osztályozása:

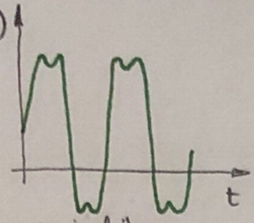
1, Tranziens gerjesztés: rövid ideig tartó gerjesztés pl.: gép ki-be kapcsolása

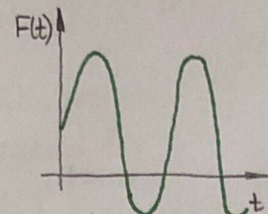


2, Sztochasztikus gerjesztés: véletlenszerű gerjesztés pl.: járművekre ható erő ingadozása az útfelület minősége miatt



3, Periodikus/harmonikus gerjesztések: Szinuszos, koszinuszos összetevőkből álló gerjesztések





Gerjesztések típusai:

1, Erőgerjesztés / Nyomatékgerjesztés : a rendszerre adott külső erő / nyomaték hat bizonyos függvény szerint

2, Útgerjesztés : Ha a lengőrendszerhez kapcsolódó rugalmas vagy csillapító elem egy pontjának az elmozdulása van megadva.

Harmónikus gerjesztés analitikus vizsgálata:

Leíró egyenlet:

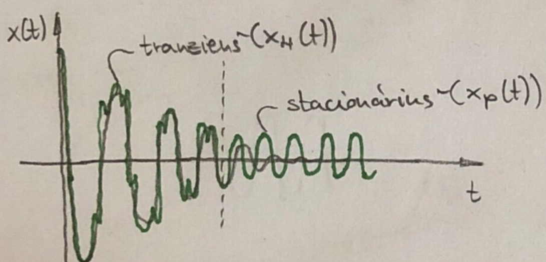
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f_0\omega_n^2\cos(\omega t) \Rightarrow \text{ inhomogén egyenlet megoldása}$$

$$x(t) = \underbrace{x_H(t)}_{\text{tranziens}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{stacionárius}}$$

A homogén egyenlet megoldása exponenciális ütemben lecseng és így csak a mozgás első szakaszában megfigyelhető tranziens rezgéseket befolyásolja.



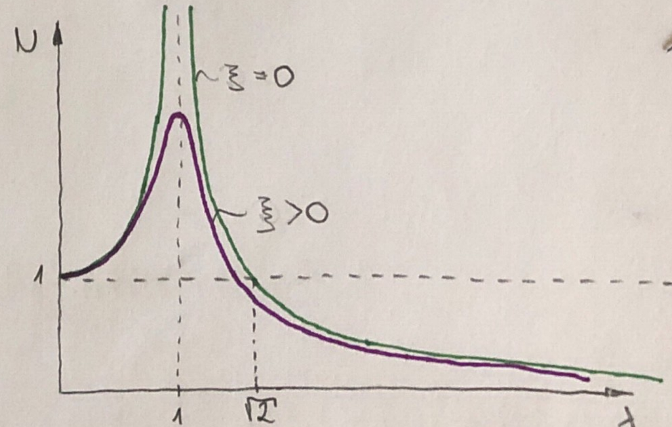
Egy idő után a megoldás gyakorlatilag megegyezik az $x_p(t)$ partikuláris megoldással.

Az egyenlet megoldásánál trigonometrikus függvények lineáris kombinációját használjuk mint partikuláris megoldás, ez alapján a matematikai, illetve mérnöki rezonancia bevezethető és felírható/rajzolható a rezonanciagörbe:

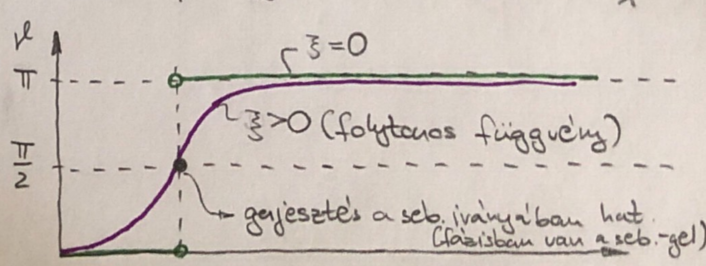
$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}} \quad \text{(nagyítási fgv)}$$

$$\tan\vartheta = \frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} \quad \text{(kialakuló rezgés késése a gerjesztéshez képest, fázisszög)}$$

itt $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$



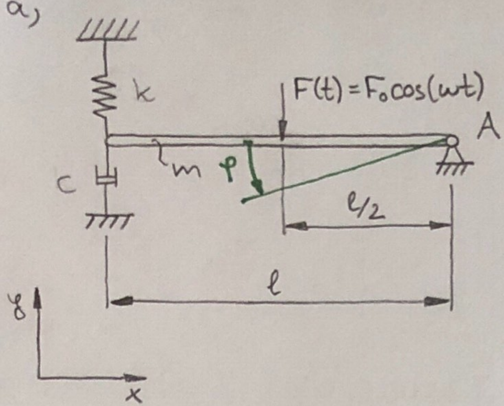
A nagyítás azt adja meg, hogy egy harmonikusan gerjesztett rendszer válasza hányszor nagyobb egy állandó F_0 erővel gerjesztett rendszer válaszánál. (statikus - dinamikus gerjesztés összehasonlítása)



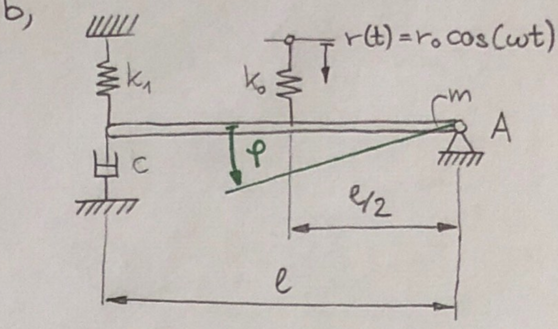
$\vartheta \in [0, \pi]$ mivel (L pozitív - trig. part. meg.

1 DoF, csillapított, gerjesztett rendszer (Vízszintes síkban)

a)



b)



Adatok:

$m = 3\ kg$	$F_0 = 10\ N$	$r_0 = 0{,}01\ m$
$k = 400\ N/m$	$\omega = 30\ \frac{rad}{s}$	$\varphi(0) = \varphi_0 = 0{,}015\ rad$
$c = 28\ Ns/m$	$k_0 = 1000\ N/m$	$\dot\varphi(0) = 0\ \frac{rad}{s}$
$\ell = 1\ m$	$k_1 = 150\ N/m$	

Feladat:

1, Mozgásegyenlet a)-ra b)-re $\omega_n, \zeta, \omega_d, f_0$?

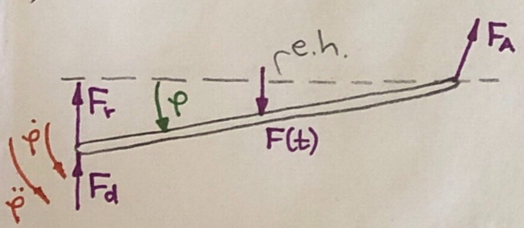
2, Nagyítási görbe és fáziskésés diagram megrajzolása!

3, $\varphi(t)$ mozgástörvény!

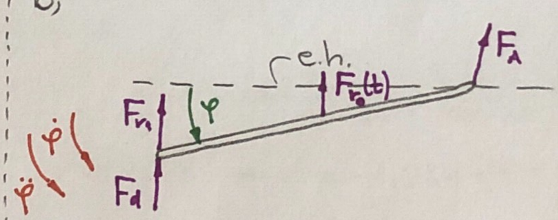
Megoldás:

Szabadtest ábrák: (Hiányos)

a)



b)



Dinamika alaptétele: $\dot\Pi_{A_z} = M_{A_z}$ (linearizálás)

a)

$$\Theta_A\ddot\varphi = F(t)\frac{\ell}{2} - F_r\ell - F_d\cdot\ell$$

ahol

$$F_r = k\varphi\cdot\ell$$

$$F_d = c\dot\varphi\ell$$

$$\Theta_A = \frac{1}{3}m\ell^2$$

$$\Rightarrow \Theta_A\ddot\varphi + c\ell^2\dot\varphi + k\ell^2\varphi = F_0\frac{\ell}{2}\cos(\omega t)$$

b)

$$\Theta_A\ddot\varphi = -F_{r_0}(t)\frac{\ell}{2} - F_{r1}\ell - F_d\cdot\ell$$

ahol

$$F_{r1} = k_1\varphi\ell \quad \text{és} \quad F_{r_0} = k_0\left(\varphi\cdot\frac{\ell}{2} - r(t)\right) = k_0\left(\varphi\frac{\ell}{2} - r_0\cos(\omega t)\right)$$

$$F_d = c\dot\varphi\ell$$

$$\Theta_A = \frac{1}{3}m\ell^2$$

$$\Theta_A\ddot\varphi + c\ell^2\dot\varphi + \left(k_1\ell^2 + k_0\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\varphi = k_0\frac{\ell}{2}r_0\cos(\omega t)$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{c\ell^2}{\Theta_A}}_{=2\xi\omega_n}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{k\ell^2}{\Theta_A}}_{=\omega_n^2}\varphi = \underbrace{\frac{F_0}{\Theta_A}\frac{\ell}{2}}_{=f_0\omega_n^2}\cos(\omega t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \underline{\underline{20}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\xi = \frac{1}{2\omega_n}\frac{3c}{m} = \underline{\underline{0{,}7}}\,[1]$$

$$f_0 = \frac{1}{\omega_n^2}\frac{3F_0}{2m\ell} = \frac{F_0}{2k\ell} = \underline{\underline{0{,}0125}}\,[rad]$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \underline{\underline{14{,}28}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{c\ell^2}{\Theta_A}}_{=2\xi\omega_n}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{k_1\ell^2 + k_0\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\Theta_A}}_{=\omega_n^2}\varphi = \underbrace{\frac{k_0 r_0}{\Theta_A}\cdot\frac{\ell}{2}}_{=f_0\omega_n^2}\cos(\omega t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k_1 + \frac{3}{4}k_0}{m}} = \underline{\underline{20}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

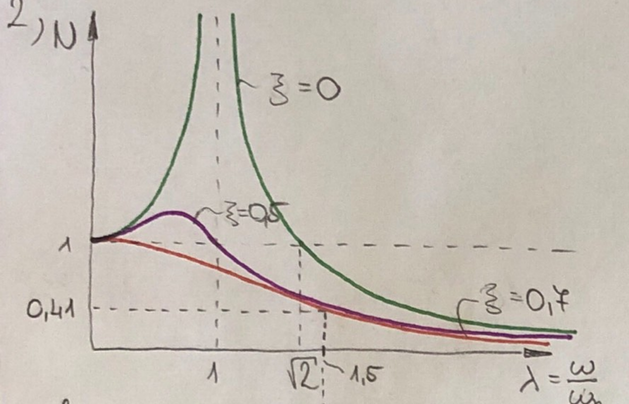
$$\xi = \frac{1}{2\omega_n}\frac{3c}{m} = \underline{\underline{0{,}7}}\,[1]$$

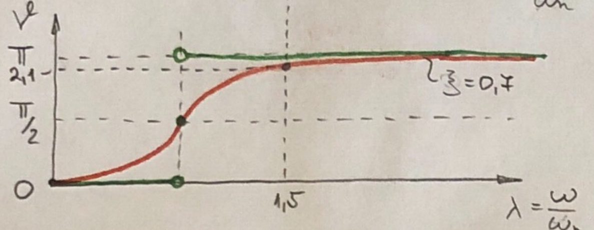
$$f_0 = \frac{1}{\omega_n^2}\frac{3k_0 r_0}{2m\ell} = \underline{\underline{0{,}0125}}\,[rad]$$ (statikus kitérés)

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \underline{\underline{14{,}28}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Azaz a két rendszer mozgásegyenletei megegyeznek!

2)





$\varphi_p(t) = \Phi\cos(\omega t - \nu)$ állandósult állapotbeli megoldás

A frekvenciaviszony: $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n} = \underline{\underline{1{,}5}}\,[1]$

Nagyítás:

$$N = \frac{\Phi}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}} = \underline{\underline{0{,}4092}}\,[1]$$

Amplitúdó:

$$\Phi = N\cdot f_0 = \underline{\underline{0{,}005115}}\,[rad]$$

Fáziskésés:

$$\nu = \arctan\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2} = \underline{\underline{-1{,}034}}\,[rad]$$

De $\nu \in [0,\pi] \Rightarrow \nu = -1{,}034 + \pi = \underline{\underline{2{,}108}}\,[rad]$

3) $\varphi(t) = \varphi_H(t) + \varphi_p(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\right) + \Phi\cos(\omega t - \nu)$

$$\dot{\varphi}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\right) + \omega_d e^{-\xi\omega_n t}\left(-C_1\sin(\omega_d t) + C_2\cos(\omega_d t)\right) - \Phi\omega\sin(\omega t - \nu)$$

C_1 és C_2 KF-ből:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}C_1 + \Phi\cos(-\nu) = \varphi_0 \\ -\xi\omega_n C_1 + \omega_d C_2 - \Phi\omega\sin(-\nu) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}C_1 = \varphi_0 - \Phi\cos(-\nu) = \underline{\underline{0{,}0176}}\,[rad] \\ C_2 = \frac{\xi\omega_n}{\omega_d}C_1 + \frac{\Phi\omega}{\omega_d}\sin(-\nu) = \underline{\underline{0{,}008}}\,[rad]\end{array}$$

$$\underline{\varphi(t) = e^{-14t}\left(0{,}0176\cos(14{,}28t) + 0{,}008\cdot\sin(14{,}28t)\right) + 0{,}005115\cos(30t - 2{,}108)}$$