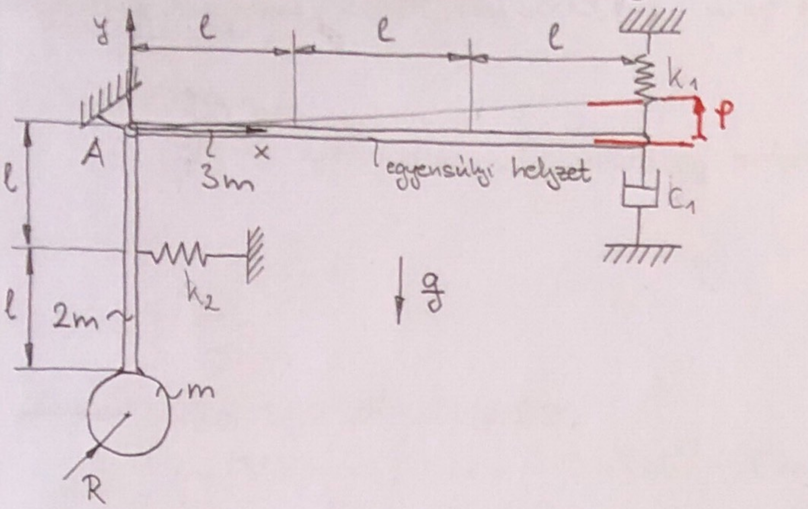
1 DoF, csillapított, gerjesztetlen lengőrendszer:



Adatok:

$l = 0{,}2\ m$ $\quad$ $R = 0{,}1\ m$

$m = 0{,}12\ kg$

$c_1 = 2\ Ns/m$

$k_1 = 300\ N/m$

$k_2 = 10\ N/m$

Csak az k_1 rugó előfeszített!

Feladat:

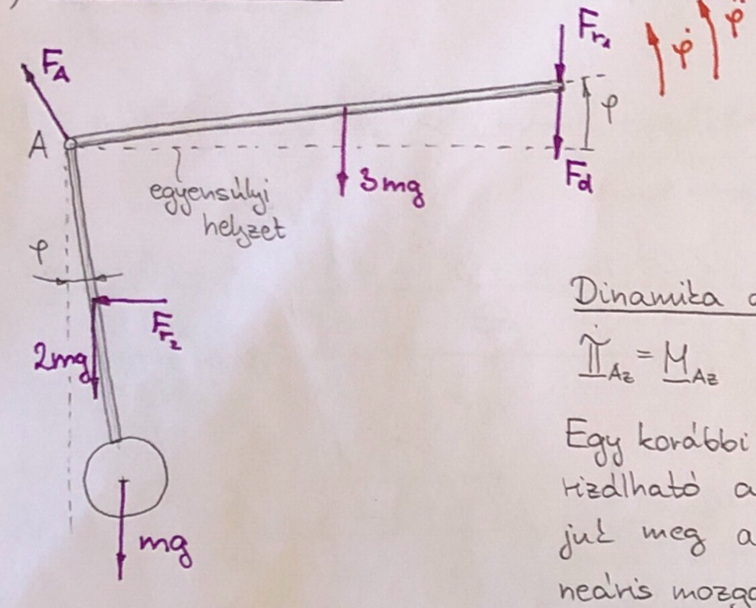
1, ω_n, ξ, ω_d meghatározása (mozgásegyenlet)!

2, $c_{1kr} = ?$, hogy kritikus csillapítású legyen a rendszer?

3, $F_{r_1,max} = ?$, ha $\varphi(0) = \varphi_0 = 0{,}01\ rad$ és $\dot{\varphi}(0) = 0$?

Megoldás:

1, Szabadtest ábra:



Dinamika alaptétele:

$$\underline{\Pi}_{Az} = \underline{M}_{Az}$$

Egy korábbi példa során már beláttuk, hogy hogyan linearizálható a rendszer és milyen egyszerűsítésekkel kaphatjuk meg az egyensúlyi helyzet körüli rezgéseket leíró lineáris mozgásegyenletet.

Ezek alapján:

- a vízszintes rúdszakaszra ható nehézségi erő nem befolyásolja a kialakuló rezgések frekvenciáját (a max rugóerőket igen)
- a rugók megnyúlása közelíthető az ívhosszakkal (egyensúlyi helyzettől mérve)

Tehát:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \pm \ldots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \pm \ldots$$

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = -F_{r_1}\cdot 3l\underbrace{\cos\varphi}_{=1} - F_d\, 3l\underbrace{\cos\varphi}_{=1} - 3mg\cdot\frac{3}{2}l\underbrace{\cos\varphi}_{=1} - F_{r_2}\cdot l\underbrace{\cos\varphi}_{=1} - 2mg\,l\underbrace{\sin\varphi}_{=\varphi} - mg(2l+R)\underbrace{\sin\varphi}_{=\varphi}$$

Így

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = -F_{r_1} 3l - F_d\, 3l \underbrace{-\frac{9}{2}mgl}_{\text{konstans eltolást eredményez}} - F_{r_2} l - 2mgl\varphi - mg(2l+R)\varphi$$

Ez a tag tart egyensúlyt a statikus rugóerő által kifejtett nyomatékkal (egyensúlyi helyzetben) Figyelem, kezdetben csak s_1 rugó előfeszitett!

$F_{r1} \approx k_1 3l \cdot \varphi + \underbrace{F_{r1st}}$

ez a tag oltja ki a nehézségi erőből származó tagot ⇒ így ezeket elhagyjuk

$F_{r2} \approx k_2 l \varphi$

$F_d \approx c_1 \cdot 3l \dot{\varphi}$

Tehetetlenségi nyomaték A pontra:

$$\Theta_A = \underbrace{\frac{1}{12} 3m(3l)^2 + \underbrace{\left(\frac{3}{2}l\right)^2 \cdot 3m}_{=\frac{1}{4}(3l)^2 \cdot 3m}}_{=\frac{1}{3}(3m)(3l)^2} + \underbrace{\frac{1}{12} 2m(2l)^2 + 2l^2 m}_{=\frac{1}{3}(2m)(2l)^2} + \frac{1}{2} mR^2 + m(2l+R)^2 = 0{,}0866\,[kgm^2]$$

Azaz

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = -9l^2 k_1 \varphi - 9l^2 c_1 \dot{\varphi} - l^2 k_2 \varphi - 2mgl\varphi - mg(2l+R)\varphi$$

Átrendezve:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + 9l^2 k_1 \dot{\varphi} + (9l^2 k_1 + l^2 k_2 + \underbrace{2mgl + mg(2l+R)}_{=4mgl+mgR})\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{9l^2 c_1}{\Theta_A}}_{=2\xi\omega_n}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{9l^2 k_1 + l^2 k_2 + mg(4l+R)}{\Theta_A}}_{=\omega_n^2}\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{(9k_1+k_2)l^2 + mg(4l+R)}{\Theta_A}} = \underline{\underline{35{,}55}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\xi = \frac{9l^2 c_1}{2\omega_n \Theta_A} = \underline{\underline{0{,}117}}\,[1] \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \underline{\underline{35{,}31}}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \underline{\underline{5{,}62}}\,[Hz]$$

2, Kritikus csillapítás:

$\xi_{kr} = 1$

$$c_{1kr} = \frac{2\xi_{kr}\omega_n\Theta_A}{9l^2} = \underline{\underline{17{,}10}}\,[Ns/m]$$

3, Ált. megoldás:

$$\varphi(t) = e^{-\omega_n \xi t}\left(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\right)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)\right) + \omega_d e^{-\xi\omega_n t}\left(-C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)\right)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad : \quad C_1 = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \quad : \quad -C_1 \xi \omega_n + \omega_d C_2 = 0 \quad \Rightarrow \underline{C_2} = \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} C_1 = \underline{\frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\varphi_0}$$

$$\varphi_{max} = \varphi(t^*) = ? \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t^*) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\xi\omega_n \cancel{e^{-\xi\omega_n t^*}}\left(C_1 \cos(\omega_d t^*) + C_2 \sin(\omega_d t^*)\right) + \omega_d \cancel{e^{-\xi\omega_n t^*}}\left(-C_1 \sin(\omega_d t^*) + C_2 \cos(\omega_d t^*)\right) = 0$$

$$(\omega_d C_2 - \xi\omega_n C_1)\cos(\omega_d t^*) - (\xi\omega_n C_2 + \omega_d C_1)\sin(\omega_d t^*) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega_d t^*) = \frac{\omega_d C_2 - \xi\omega_n C_1}{\xi\omega_n C_2 + \omega_d C_1}$$

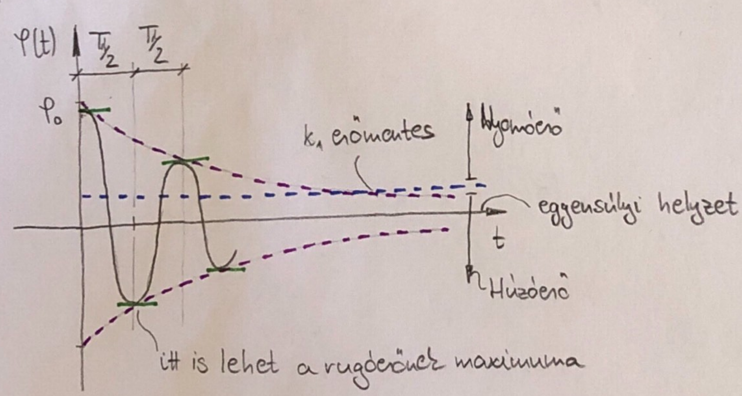
Mivel $C_2 = \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} C_1$, így

$$\tan(\omega_d t^*) = 0 \qquad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\Downarrow$$

$$t^* = \frac{1}{\omega_d}\arctan(0) = 0 + \underbrace{j\frac{T_d}{2}}_{k\frac{\pi}{\omega_d}} \qquad j = 0, 1, 2 \ldots$$

Mivel a kezdeti feltétel egy kitérített helyzetből való elengedésnek felel meg, így $\varphi_{max} = \varphi_0 =$
$= 0{,}01$ [rad], de



A rugóban lévő statikus deformáció miatt a maximális rugóerő nem biztos, hogy a maximális kitérítéskor ébred!

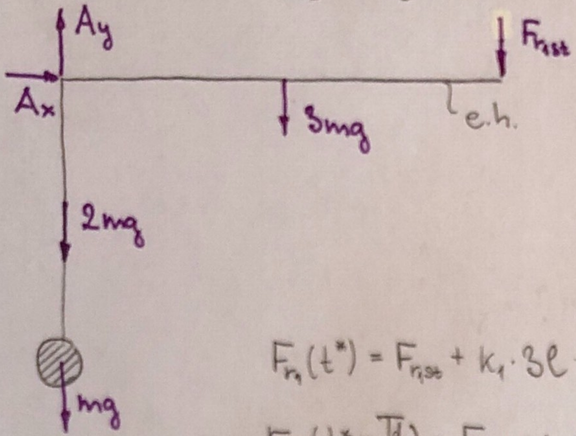
Mindkét helyen meg kell nézni!

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 0{,}178 \text{ [s]}$$

$$\varphi(t^*) = 0{,}01 \text{ [rad]}$$

$$\varphi\left(t^* + \frac{T_d}{2}\right) = \varphi\left(\frac{T_d}{2}\right) = -0{,}007 \text{ [rad]}$$

$F_{r1st} = ?$ statikai egyensúlyból:



$\sum M_A = 0: \quad -\cancel{3}mg\frac{3}{\cancel{2}}\ell - F_{r1st}\cdot 3\ell = 0$

$F_{r1st} = -\frac{3}{2}mg = \underline{\underline{-1,7658}}\,[N]$

$F_{r1}(t^*) = F_{r1st} + k_1 \cdot 3\ell \cdot \varphi(t^*) = 0,034\,[N]$

$F_{r1}\left(t^* + \frac{T_d}{2}\right) = F_{r1st} + k_1\,\varphi\left(t^* + \frac{T_d}{2}\right)3\ell = -3,009\,[N]$

$|F_{r1max}| = \left|F_{r1}\left(\frac{T_d}{2}\right)\right| = \underline{\underline{3,009}}\,[N]$

k_2 rugó mivel $\varphi = 0$-ban erőmentes, így benne biztos $t = 0$-ban ébred a max. rugóerő!