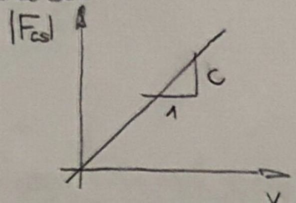
Elméleti összefoglaló:

A közegellenállás és a lengőrendszert alkotó anyagok belső csillapítása következtében a szabad-lengések során a mechanikai energia csökken, hő termelődik. Vagyis nem maradhat fenn az állandó amplitúdójú rezgés.

A gépészmérnöki gyakorlatban beszélhetünk viszkózus csillapításról, mely a sebességgel arányos. Ilyen pl.: a folyadékok lamináris áramlása, egymáson csúszó kent felületek, lengéscsillapítók.

A csillapítóerő $F_{cs} = cv$ a sebességgel ellentétes irányban lép fel.

Karakterisztika:

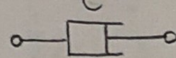


c − csillapítási tényező $\left[\frac{Ns}{m}\right]$

↳ értéke pozitív és negatív sebességek esetén azonos, de vannak kivételek

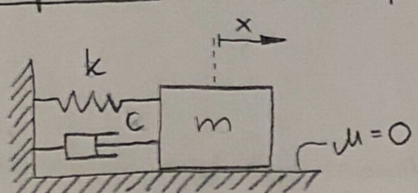
Más csillapítási karakterisztikák:
- Áramló gázok
- Turbulens áramlás
- Száraz (Coulomb) súrlódás

Csillapító elem ikonja:



tömege és merevsége elhanyagolható

Alapmodell: 1DoF, csillapított, gerjesztetlen, lineáris lengőrendszer



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{=2\xi\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

ξ − relatív (Lehr-féle) csillapítási tényező [1]
(D-vel is jelölik)

Karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

karakterisztikus exponensek: $\boxed{\lambda_{1,2} = \xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}$

ω_d − csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája

$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ Szigorúan véve a csillapított rendszer mozgástörvénye nem periodikus! Ekkor T_d két szomszédos kitérés (csúcs) között eltelt idő.

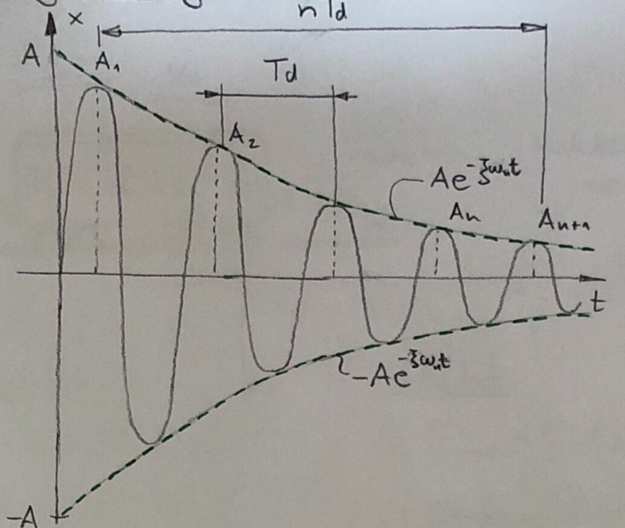
Csillapítások besorolása:

Gyenge csillapítás: $0 < \xi < 1$, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$

Kritikus csillapítás: $\xi = 1$

Erős csillapítás: $\xi > 1$

Mozgástörvény:



A csillapítási tényező becslése: (méréssel)

Periódusidő becslése:

$$T_{mért} = \frac{t(A_{i+1}) - t(A_1)}{i} \qquad i = 1, 2 \ldots$$

Logaritmikus dekrementum módszere: Azt használja ki, hogy az egymás utáni lengésamplitúdók aránya megegyezik:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\xi\omega_n T}$$

$$\Downarrow$$

$$\Lambda = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \xi\omega_n T$$

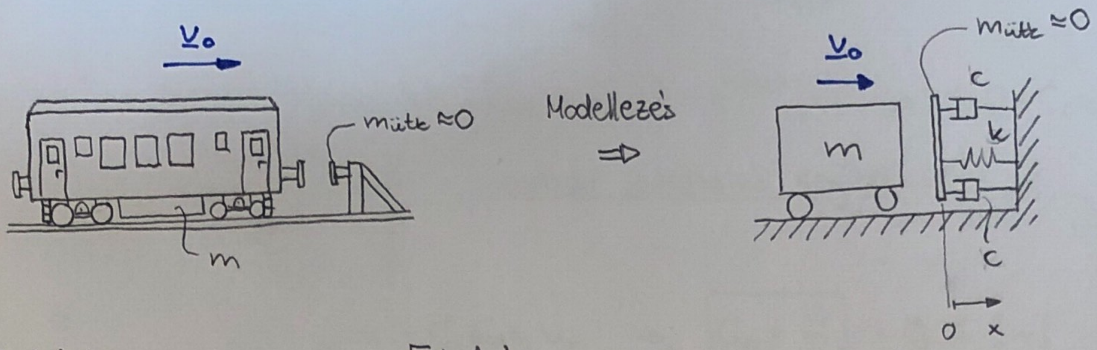
pontosabb eredményt kapunk, ha több periódust is figyelembe veszünk

$$\frac{A_1}{A_{n+1}} = \frac{A_1}{\cancel{A_2}} \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{A_n}}{A_{n+1}} = e^{n\xi\omega_n T}$$

$$\boxed{\Lambda = \frac{1}{n}\ln\frac{A_1}{A_{n+1}} = \xi\omega_n T} \qquad T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\Rightarrow \quad \xi_{mért} = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$$

Vasúti szerelvény ütköző:



Adatok:

$m = 5 \cdot 10^4$ [kg]

$k = 10^6$ [N/m]

$c = 10^5$ [Ns/m]

$v_0 = 1$ [m/s]

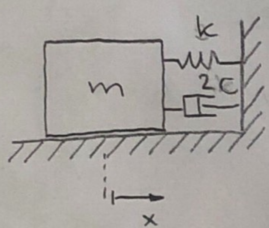
Feladat:

1, $F_{rmax} = ?$ ($\Rightarrow x_{max}$)

2, Disszipált energia az érintés és elválás között?

Megoldás: 1,

Modell redukálása:

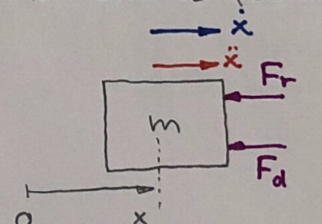


A csillapítás a merevséghez hasonlóan redukálható egy elembe, attól függően, hogy soros vagy párhuzamos kapcsolásról van-e szó!

Kezdeti feltételek: $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v_0$

Hiányos szabadtest ábra: (y irányban nincs releváns dinamikai hatás, így ezek nem kerültek feltüntetésre)



Dinamika alaptétele:

$$\underline{I} = \underline{F}$$

$$m\ddot{x} = -F_r - F_d$$

ahol $F_r = kx$

$F_d = 2c\dot{x}$

Behelyettesítve:

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \underbrace{\frac{2c}{m}}_{=2\xi\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2} = 0} \quad + KF.$$

ω_n - csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája

ξ - relatív / Lehr-féle csill. tényező

Ez alapján a rendszer főbb paraméterei:

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{\underline{4{,}47}}\ \frac{rad}{s}$ $\qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \underline{\underline{4}}\left[\frac{rad}{s}\right] \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_d} = \underline{\underline{1{,}57}}\ [s]$

$\xi = \frac{1}{2\omega_n}\frac{2c}{m} = \underline{\underline{0{,}45}}\ [1]$ $\qquad f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \underline{\underline{0{,}64}}\ Hz$

Mozgásegyenlet általános megoldása:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\right)$$

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\left(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\right) + e^{-\xi\omega_n t}\left(-C_1\omega_d\sin(\omega_d t) + C_2\omega_d\cos(\omega_d t)\right)$$

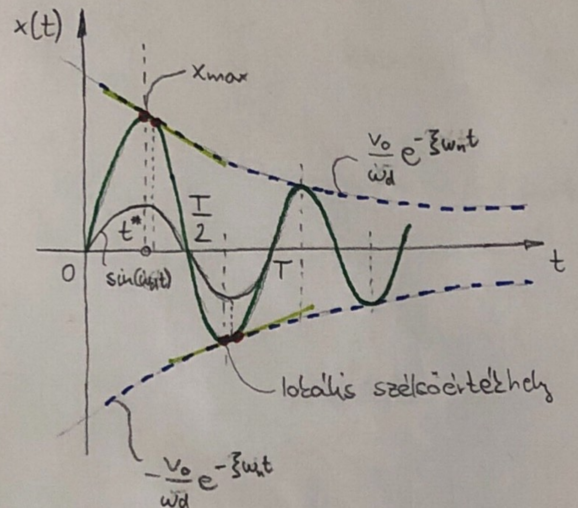
C_1 és C_2 meghatározható a kezdeti feltételek segítségével:

$x(0) = 0$ $\qquad \boxed{C_1 = 0}$

$\dot{x}(0) = v_0$ $\qquad -C_1\xi\omega_n + C_2\omega_d = v_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = \frac{v_0}{\omega_d}} = \underline{\underline{0{,}25}}\,[m]$

Így a mozgástörvény:

$\boxed{x(t) = 0{,}25\,e^{-2t}\sin(4t)}$ (Ez addig érvényes, amíg a kocsi nem válik el az ütközőtől.)



legnagyobb rugóerő meghatározása:

$F_r = k\,x(t) \quad \Rightarrow \quad F_{r\,max} = k\,x_{max}$

$\Downarrow$

lokális szélsőérték

$\dot{x}(t^*) = 0$

Vagyis:

$$\dot{x}(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\xi\omega_n \cancel{e^{-\xi\omega_n t^*}}\cancel{C_2}\cdot\sin(\omega_d t^*) + \cancel{e^{-\xi\omega_n t^*}}\cancel{C_2}\omega_d\cos(\omega_d t^*) = 0$$

$$\boxed{\frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \tan(\omega_d t^*)}$$

$$\Rightarrow \quad t^* = \frac{1}{\omega_d}\arctan\left(\frac{\omega_d}{\xi\omega_n}\right) = \underline{\underline{0{,}277}}\,[s] \quad < \frac{T}{4}$$

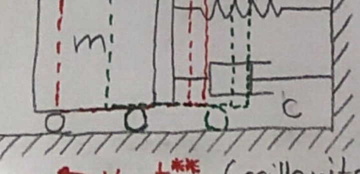
Ez alapján:

$$x_{max} = x(t^*) = \underline{\underline{0{,}12855}}\,[m]$$

Így

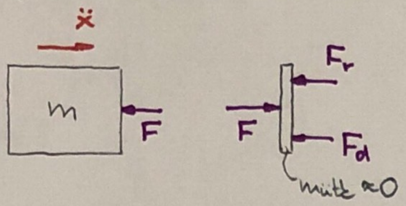
$$F_{r\,max} = k\cdot x_{max} = \underline{\underline{128{,}55}}\,[kN]$$

2) Elválás esetén: kontakterő nem lehet negatív (húzóerő)



$\leftarrow v,\ t^{**}$ (csillapítás miatt hamarabb elválhat)

Hiányos szabadtest ábra:



Dinamika alaptétele:

$$m\ddot{x} = -F$$

$$F = F_r + F_d$$

A kocsi és az ütköző között átadódó erő:

$$F(t) = kx(t) + 2c\dot{x}(t) \quad , \text{ami} \quad F(t) = -m\ddot{x}(t)$$

Ez mikor vált előjelet?

$$F(t^{**}) = 0$$

$$k\cancel{e^{-D\omega t^{**}}} \cdot \cancel{C_2} \sin(\omega_d t^{**}) + 2c\left[-\xi\omega_n \cancel{e^{-\xi\omega_n t^{**}}} \cancel{C_2} \sin(\omega_d t^{**}) + \cancel{e^{-\xi\omega_n t^{**}}} \cancel{C_2}\omega_d \cos(\omega_d t^{**})\right] = 0$$

$$k\sin(\omega_d t^{**}) + 2c\left[-\xi\omega_n \sin(\omega_d t^{**}) + \omega_d \cos(\omega_d t^{**})\right] = 0$$

$$-(k + 2c\xi\omega_n)\sin(\omega_d t^{**}) + 2c\omega_d \cos(\omega_d t^{**}) = 0$$

$$\boxed{\tan(\omega_d t^{**}) = \frac{2c\omega_d}{2c\xi\omega_n - k}}$$

$$\tan(\omega_d t^{**}) = \frac{\frac{2c}{m}\omega_d}{\underbrace{\frac{2c}{m}\xi\omega_n}_{2\xi\omega_n} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2}}$$

$$\boxed{\tan(\omega_d t^{**}) = \frac{2\xi\omega_d}{\omega_n(2\xi^2 - 1)}}$$

$$t^{**} = \frac{1}{\omega_d}\arctan\left(\frac{2\omega_d\xi}{\omega_n(2\xi^2 - 1)}\right) = -0{,}232[s] + \frac{T}{2}$$

$\frac{T}{2}$ ⟶ tan() π periodikus és a $\frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T}{2}$

$$= \underline{\underline{0{,}553}}\ [s]$$

$$\left(0 < t^{**} < \frac{T}{2}\right)$$

Az elválás pillanatában a kocsi sebessége:

$$v_1 = \dot{x}(t^{**}) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t^{**}}\left(C_2 \sin(\omega_d t^{**})\right) + e^{-\xi\omega_n t^{**}} C_2\omega_d \cos(\omega_d t^{**}) = \underline{\underline{-0{,}33}}\ \frac{m}{s}$$

Végzett munka: kinetikus energia megváltozása:

$$W^{disszip} = T(t^{**}) - T(0) \qquad \text{(disszipációs munka)}$$

$$= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \cong \underline{\underline{-22{,}27}}\ [kJ] \quad \Rightarrow E^{disszip} = -W^{disszip} = \underline{\underline{22{,}27}}\ [kJ]$$