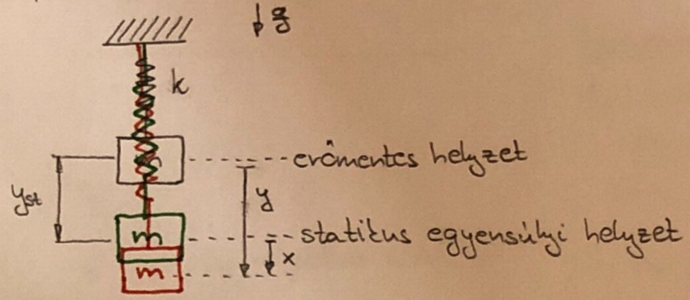
Elméleti összefoglaló: (Konzultáció: kedd 10 - 11)

Nehézségi erő hatása - függőleges irányú rezgés:

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a lengőrendszerre állandó nagyságú erő vagy nyomaték hat a rezgés irányában.

Alapfeladat:

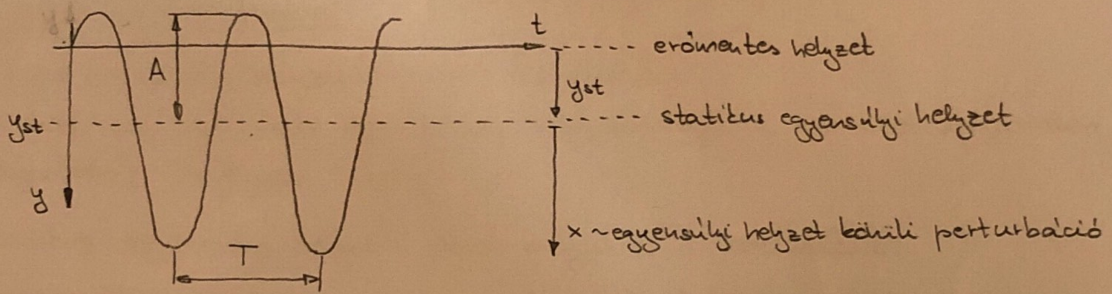


Általános koordináták definiálása:

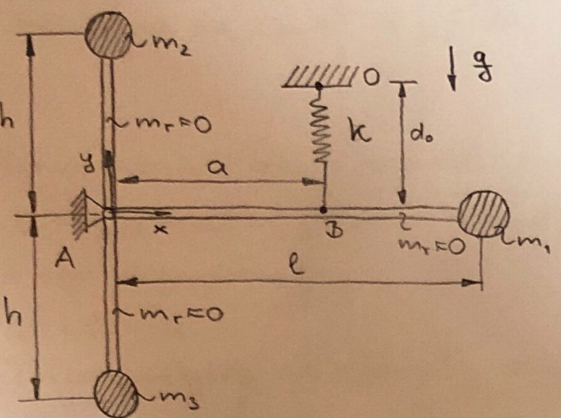
a, Erőmentes helyzettől: y koordinátával $y = y_{st} + x$

b, Statikus egyensúlyi helyzettől: x koordinátával

- Egyensúlyi helyzet körüli lengést valósít meg



A nehézségi erő hatása, rugók előfeszítése, linearizálás:



d_0 - rugó egyensúlyi helyzetben mért hossza

Adatok: $m_1 = 2\,kg$ $h = 0{,}5\,m$

$m_2 = 4\,kg$ $\ell = 1\,m$

$m_3 = 3\,kg$ $a = 0{,}6\,m$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $k = 10000\,\frac{N}{m}$

Feladatok:

1, Linearizált mozgásegyenlet!
(egyensúlyban az ℓ hosszúságú rúd vízszintes)
(kis amplitúdójú rezgések)

2, $\omega_n = ?$, $T_n = ?$, $f = ?$

3, Mozgástörvény, ha $t=0$-ban m_1 sebessége $v_0 = 1\,\frac{m}{s}$ (↓) kitérése $y_0 = -1\,cm$!

4, A rugóerő maximuma?

Koordináta választás:

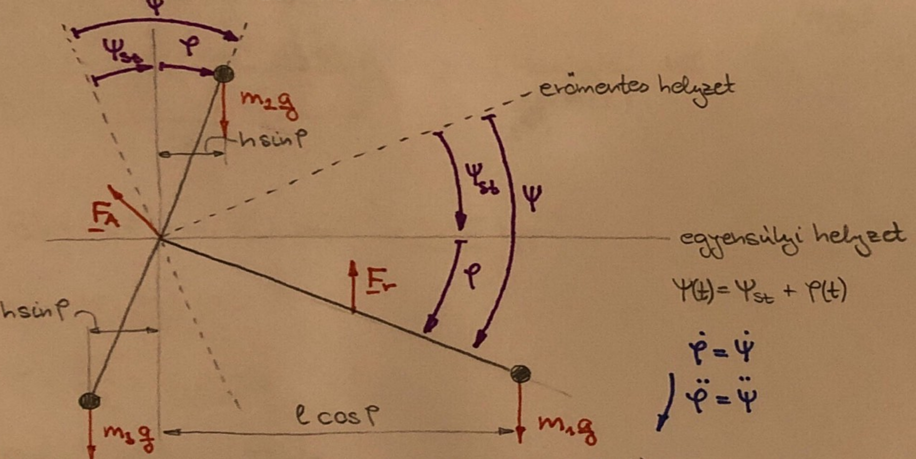
Számolás szempontjából a lehető legegyszerűbb legyen!

Két esetet különíthetünk el:

a, A rugó erőmentes helyzetétől mért koordináta
(ha több rugó van, akkor nem biztos, hogy mindegyik a szerkezet ugyanazon állásában van erőmentes helyzetben) Ez legyen ψ szög.

b, Statikus egyensúlyi helyzet: innen mérjük a φ koordinátát!

Alapelv: Mivel a rendszer az egyensúlyi helyzet körül végez lengéseket, így innen célszerű felvenni az általános koordinátát.



$\psi(t) = \psi_{st} + \varphi(t)$

$\dot{\varphi} = \dot{\psi}$

$\ddot{\varphi} = \ddot{\psi}$

Dinamika alaptétele segítségével (perdülettétel):

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = m_2 g h \sin\varphi - m_3 g h \sin\varphi + m_1 g \ell \cos\varphi - M_r(\varphi)$$

Probléma: A rugó által kifejtett nyomaték függ a rugó nyújtatlan hosszától (ennek segítségével határozható meg a rugó által kifejtett erő). Mivel célunk a linearizált mozgásegyenlet felírása, így levezethető, hogy

$$F_r = F_{r\,st} + F_{r\,din} = \underbrace{F_{r\,st}}_{\text{Egyensúlyi helyzetben kifejtett állandó nagyságú erő}} + \underbrace{k\varphi a}_{\text{Dinamikus (függ } \varphi\text{-től)}}$$ ezzel az ívvel közelítjük a rugó megnyúlását

Levezetés: (kitérített helyzetben vizsgáljuk)

Definiáljuk az $\underline{r}_{AO} = \begin{bmatrix} a \\ d_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorokat!

A rugó megnyúlt hossza kitérítés után:

$$\ell_r = |\underline{r}_{AB} - \underline{r}_{AO}| = \sqrt{a^2(\cos\varphi - 1)^2 + (a\sin\varphi + d_0)^2}$$

A rugó megnyúlása:

$$\Delta\ell = \ell_r - d_0$$

Taylor-sorfejtés az egyensúlyi helyzet körül:

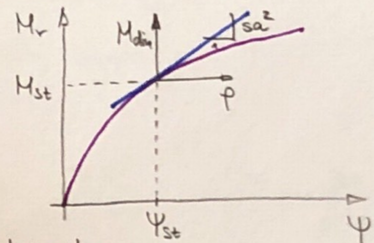
$$\Delta\ell = \underbrace{a\varphi}_{\text{lineáris rész figyelembe vétele}} - \frac{a}{6}\varphi^3 + \frac{a^2}{8d_0}\varphi^4 \pm \mathcal{O}(\varphi^5)$$

A rugó kezdeti hossza csak φ^4 együtthatójában jelenik meg! (Elég hosszúnak tekintjük, így elhanyagoljuk a rugó megnyúlásában)

Ez alapján a rugó által kifejtett nyomaték:

$$M_r = M_{st} + \underbrace{k\varphi a^2}_{= ka^2 \cdot \varphi \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{=1}}$$

($\varphi = 0$ közelében)



A nehézségi erővel kapcsolatos tagok linearizálása $\varphi = 0$ körül:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = m_2 g h \cdot \varphi - m_3 g h \varphi + m_1 g \ell - M_{rst} - k\varphi a^2$$

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + (m_3 g h + k a^2 - m_2 g h)\varphi = \underbrace{m_1 g \ell - M_{rst}}_{=0}$$

Egyensúly esetén, vagyis $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$ esetén az egyensúlyi erők eredője zérus, így az egyenlet jobb oldala zérus. ($\varphi = 0$ esetén van egyensúly)

Vagyis: $M_{rst} = m_1 g \ell = a F_{rst}$

$$F_{rst} = \frac{m_1 g \ell}{a}$$

Így:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} + (m_3 g h + k a^2 - m_2 g h)\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{m_3 g h + k a^2 - m_2 g h}{\Theta_A}}_{=\alpha^2}\varphi = 0$$ (Homogén diff. egyenlet)

ahol

$$\Theta_A = m_1 \ell^2 + m_2 \cdot h^2 + m_3 h^2 = \underline{\underline{3{,}75}}\ \mathrm{kgm^2}$$

$$\omega_n = \underline{\underline{30{,}963}}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \underline{\underline{0{,}203}}\ \mathrm{s}$$

$$f = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \underline{\underline{4{,}93}}\ \mathrm{Hz}$$

Kezdeti feltételek:

$y(0) = -1\ \mathrm{cm} = -0{,}01\ \mathrm{m}$

$v(0) = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (\uparrow)$

$\Rightarrow$

$\varphi(0) = -\frac{y(0)}{\ell} = 0{,}01\ \mathrm{rad}$

$\dot{\varphi}(0) = \frac{v(0)}{\ell} = 1\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

itt is linearizáltunk!

A mozgásegyenlet általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1 \cos(\omega_n t) + c_2 \sin(\omega_n t) \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = c_1$$
$$\dot\varphi(t) = -c_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + c_2 \omega_n \cos(\omega_n t) \qquad \dot\varphi(0) = c_2 \omega_n$$

kezdeti feltételekkel: $c_1 = \underline{\underline{0{,}01 \text{ rad}}}$, $c_2 = \frac{v_0}{\omega_n l} = \underline{\underline{0{,}033 \text{ rad}}}$

Maximális szögkitérés az egyensúlyi helyzettől: (amplitudó)

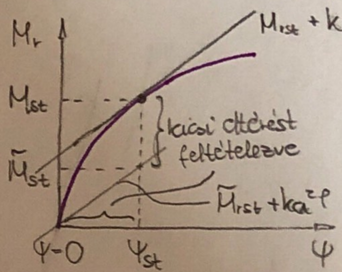
$$\Phi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \underline{\underline{0{,}0338 \text{ rad}}}$$

Maximális rugóerő:

$$F_{rmax} = F_{rst} + F_d \cong \underbrace{ka(\Psi_{st} + \Phi)}_{\text{ív (rugó megnyúlása)}}$$

Ψ_{st} becslése: M_{rst} segítségével $\Rightarrow$ $\frac{m_1 g l}{a} = ka\Psi_{st}$ $\Rightarrow$ $\Psi_{st} = \frac{m_1 g l}{ka^2} = \underline{\underline{0{,}00545 \text{ rad}}}$

ez elég kicsi, elfogadható a közelítés



(kinagyított ábra)

$\Psi = 0$ körül linearizálunk jelen esetben ugyanazt az összefüggést használva

$$\Psi = \Psi_{st} + \varphi \quad \Rightarrow \quad \tilde M_{rst} = ka^2 \Psi_{st} \qquad (\tilde M_{rst} \cong M_{rst})$$

$(\Psi = 0 \Rightarrow M_r = 0)$

$\tilde M_{st}$ – közelítés

$$\Rightarrow F_{rmax} \approx ka\Psi_{st} + ka\Phi = \underline{\underline{235{,}557 \text{ N}}}$$

Egyéb: