Elméleti összefoglaló:

A fizikai világ bonyolultsága miatt modellek felállítása történik, melyek a lényeges tulajdonságokat kiragadják. (modellparaméterek meghatározása)

Alap modellek:
- rúd
- lemez
- anyagi pont
- merev test

Lépések:
1, Adott szerkezet mechanikai modellje.
2, Matematikai modell felállítása (differenciálegyenletek).
3, Mozgásegyenlet megoldása (mozgástörvény).
4, Megoldás értelmezése.
5, Következtetések levonása, szerkezet módosítása.

A lengőrendszerek alapvető elemei:

Modellezés során egyszerűsítést jelent, ha a szerkezet szétválasztható tisztán merev, tehetetlen testekre, rugalmas, elhanyagolható tömegű testekre. (Lengőrendszerben betöltött szerep.) Ha ezt nem tehetjük meg, akkor külön elemként vesszük figyelembe a szerkezet tehetetlenségét, merevségét, csillapítását.

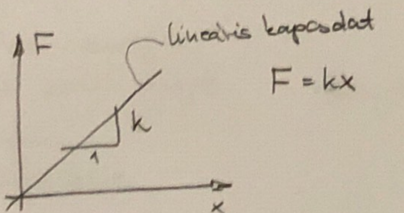
Tehetetlen elemek:

- Haladó mozgás esetén, tömeg : m
- Forgó mozgás esetén, tehetetlenségi nyomaték : Θ_s

Rugalmas elemek:

Merevségükkel jellemezhetők, ami a deformáció és a ható erő (nyomaték) közti kapcsolatot adja.

Csavarrugók:



$$F = kx$$

F - terhelő erő

x - egyensúlyi megnyúlás

k - rugómerevség $\left[\frac{N}{m}\right]$ Egységnyi elmozduláshoz mekkora erő szükséges.

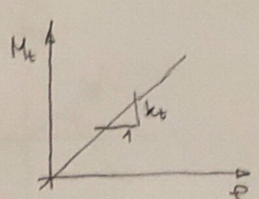
$w = \frac{1}{k}$ - rugóállandó $\left[\frac{m}{N}\right]$ Egységnyi erő mekkora elmozdulást okoz.

Csavarrugóban felhalmozott potenciális energia:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \int_0^x k\xi \, d\xi$$

x megnyúlás hatására, ahol ξ a futó koordináta

Torziós rugók:



$$M_t = k_t \varphi$$

M_t - terhelő nyomaték

φ - egyensúlyi szögelfordulás

k_t - torziós rugómerevség $\left[\frac{Nm}{rad}\right]$

$k_{st} = \frac{1}{k_t}$ - rugóállandó $\left[\frac{rad}{Nm}\right]$

Tárolt potenciális energia:

$$U = \frac{1}{2}k_t\varphi^2 = \int_0^\varphi k_t \eta \, d\eta$$

A rugó által kifejtett erő (nyomaték) ellentétes irányú a kitérítéssel!

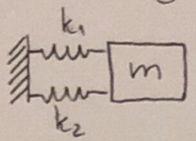
Tengelyek rugalmassága is figyelembe vehető ilyen módon!

Rugókapcsolások:

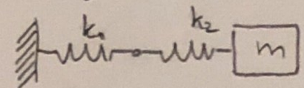
↳ párhuzamos kapcsolás (a rugók deformációja megegyezik) ①

↳ soros kapcsolás (a rugókban ugyanakkora erő ébred) ②

① $F = (k_1 + k_2)x$



② $F = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)x$



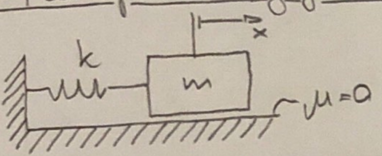
Léteznek több rugalmas elemből álló szerkezetek is, van, hogy nem is soros, nem is párhuzamos kapcsolású rugókkal helyettesíthetők a rugalmas elemeik, ilyenkor valamilyen geometriai összefüggés nyújthat segítséget.

Potenciális energiák egyenlőségének elve: Az eredeti, illetve a helyettesítő rendszer potenciális energiája megegyezik. Ebből meghatározható az eredő rugómerevség.

Lengőrendszerek osztályozása:

1. 1 DoF ⇔ több DoF
2. lineáris ⇔ nemlineáris
3. gerjesztett ⇔ gerjesztetlen
4. csillapított ⇔ csillapítatlan

1 DoF, csillapítatlan, gerjesztetlen, lineáris rendszer:



⇒ mozgásegyenlet: $m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2}x = 0$, ahol ω_n - sajátkörfrekvencia $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Vizsgálat: - kitérített helyzetből vizsgáljuk

↳ egyensúlyi helyzet körüli lengés

- szabadtest ábra
- dinamika alaptétele

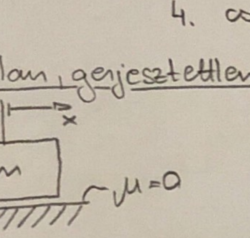
mozgástörvény: $x(t) = \underbrace{A\cos(\alpha t) + B}\sin(\alpha t)$

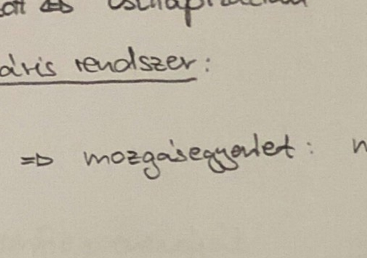
kezdeti feltételekből meghatározhatók

sajátkörfrekvencia: analógia az ω szögsebességgel végbemenő egyenletes körmozgás és a harmonikus lengőmozgás között: $\omega_n = \omega$ jelen esetben $\left[\frac{rad}{s}\right]$

⇕

sajátfrekvencia: f_n vagy ν a jele és $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ [Hz] 1 s alatti lengések száma





$\boxed{1}$ 2π ⇔ 1 lengés (1s alatt)

$\underbrace{2\pi \frac{rad}{s}}_{=\omega_n}$ ⇔ $\underbrace{1\,Hz}_{=f}$

⇓

$f_1 = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,Hz$

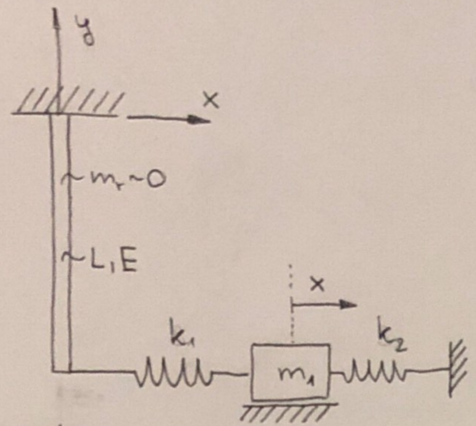
$\boxed{2}$

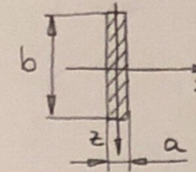
4π ⇔ 2 lengés (1s alatt)

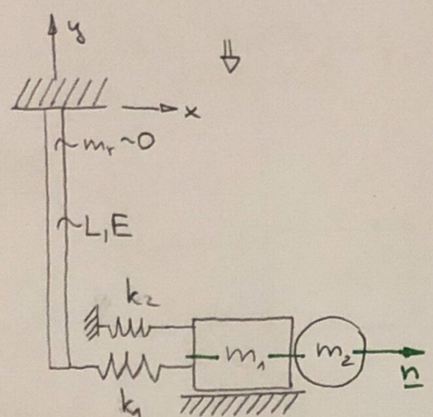
$\omega_n = 4\pi \frac{rad}{s}$ ⇔ $\underbrace{2\,Hz}_{=f}$

$f_2 = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\,Hz$

Egyenértékű rugómerevség, sajátfrekvencia számítása, egyszerű lengőrendszer foronómiai görbéi:



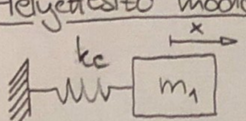




Adatok:
$a = 6$ mm
$b = 25$ mm
$L = 0{,}5$ m
$k_1 = 100$ N/m
$k_2 = 50$ N/m
$m_1 = 5$ kg
$m_2 = 1$ kg
$E = 210$ GPa
$c_1 = 0\ \frac{m}{s}$
$c_2 = -0{,}6\ \frac{m}{s}$
$k = 0{,}5$
(rúd: egyenes, prizmatikus, homogén)

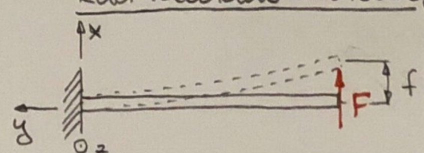
Határozza meg a rendszer sajátkörfrekvenciáját!
Az ütközési feladat megoldásával kapott indítási feltételek mellett határozza meg a maximális sebességet (v_{max}) és gyorsulást (a_{max}), rajzolja fel a foronómiai görbéket!

Helyettesítő modell:



$k_e = ?$

Rúd laterális merevsége:

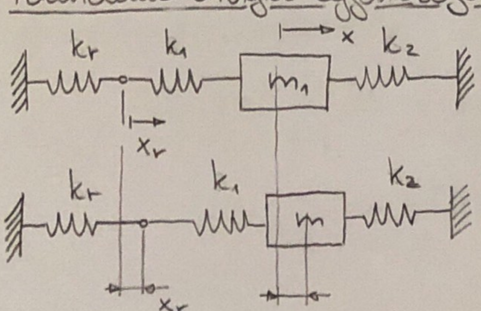


$$f = \frac{FL^3}{3IE} \Rightarrow F = \underbrace{\frac{3IE}{L^3}}_{=k_r} f$$

itt $I = \frac{a^3 b}{12} = \underline{\underline{4{,}5 \cdot 10^{-10}\ m^4}}$

$$k_r = \underline{\underline{2268}}\ \frac{N}{m}$$

a, Potenciális energia egyenlőségének elve:



$$U = \frac{1}{2} k_r x_r^2 + \frac{1}{2} k_1 (x - x_r)^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 \Leftrightarrow U = \frac{1}{2} k_e x^2$$

1 DoF rendszer, általános koordináta: x
x_r kifejezhető x függvényeként!

k_r és k_1 merevségű rugókban ébredő erő nagysága megegyezik, így

$$F_1 = k_1\cdot(x-x_r) = k_r x_r \quad \text{, ebből} \quad \boxed{x_r = \frac{k_1 x}{k_r+k_1}}$$

x_r-t visszaírva a potenciális energiába:

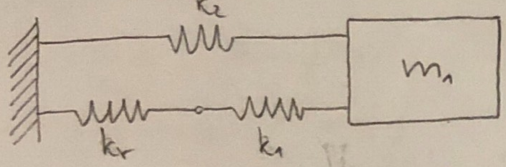
$$U = \frac{1}{2}k_r\left(\frac{k_1 x}{k_r+k_1}\right)^2 + \frac{1}{2}k_1\left(x - \frac{k_1 x}{k_r+k_1}\right)^2 + \frac{1}{2}k_2 x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\frac{k_r k_1^2}{(k_r+k_1)^2} + s_1\left(1 - 2\frac{k_1}{k_r+k_1} + \frac{k_1^2}{(k_r+k_1)^2}\right) + k_2}_{=k_e}\Bigg]x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{k_r k_1^2}{(k_r+k_1)^2} + k_1\left(\frac{k_r^2+2k_rk_1+k_1^2-2k_1(k_1+k_r)+k_1^2}{(k_r+k_1)^2}\right) + k_2\right]x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[k_1k_r\left(\frac{k_1+k_r}{(k_r+k_1)^2}\right) + k_2\right]x^2 \Rightarrow \boxed{k_e = \frac{k_1k_r}{k_r+k_1} + k_2} = \underline{\underline{145,777}}\ \frac{N}{m}$$

Megjegyzés:



k_r-k_1 egymással sorba kapcsolt és ezek k_2-vel párhuzamosan kapcsolt rugók rugómerevségei, így

$$k_e = \frac{k_1k_r}{k_r+k_1} + k_2$$

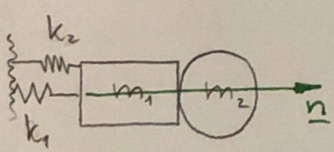
Sajátfrekvencia számítása:

$$m\ddot{x} + k_e x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k_e}{m_1}}_{=\omega_n^2}x = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_1}} = \underline{\underline{5,39}}\ \frac{rad}{s}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \underline{\underline{0,85}}\ Hz$$

$$T_n = \underline{\underline{1,166}}\ s \quad \text{(periódusidő)}$$

Ütközési feladat:



(centrikus ütközés)

ütközés előtti sebességállapot:

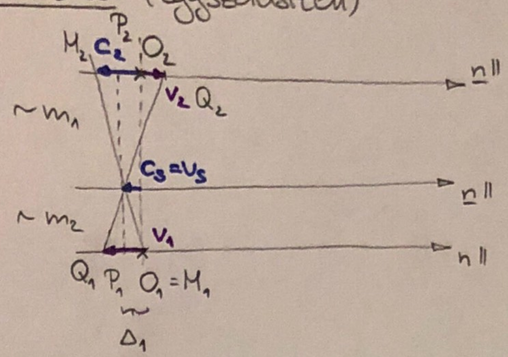
$$[|\underline{\Omega}_1|, |\underline{c}_1|] = [0, 0]$$

$$[|\underline{\Omega}_2|, |\underline{c}_2|] = [0, -0,6\ \tfrac{m}{s}]$$

közös súlypont sebessége:

$$v_S = c_S = \frac{m_1\cdot c_1 + m_2 c_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2 c_2}{m_1+m_2} = -\underline{\underline{0,1}}\ \frac{m}{s}$$

Maxwell ábra: (egyszerűsített)



$\overline{Q_1P_1} = k\,\overline{P_1M_1}$

Vagyis:

$v_1 - v_S = e(v_S - c_1)$

$v_1 = v_S + e(v_S - \underbrace{c_1}_{=0}) = \underline{\underline{-0{,}15\ \frac{m}{s}}}$

Ezzel a kezdeti feltételek:

$x(0) = 0\ m$ (pozíció)

$\dot{x}(0) = -0{,}15\ \frac{m}{s}$ (sebesség)

Mozgástörvény:

$x(t) = C\sin(\omega_n t + \varepsilon) \Rightarrow A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$

$\dot{x}(t) = C\omega_n\cos(\omega_n t + \varepsilon) \Rightarrow -A\omega_n\sin(\omega_n t) + B\omega_n\cos(\omega_n t)$

$\ddot{x}(t) = -C\omega_n^2\sin(\omega_n t + \varepsilon) \Rightarrow -A\omega_n^2\cos(\omega_n t) - B\omega_n^2\sin(\omega_n t)$

kezdeti feltételek figyelembe vétele:

$0 = A\underbrace{\cos(\omega_n 0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(\omega_n 0)}_{=0} \Rightarrow \boxed{A = 0}$

$v_1 = -\underbrace{A}_{=0}\omega_n\sin(\omega_n 0) + B\omega_n\underbrace{\cos(\omega_n 0)}_{=1} \Rightarrow \boxed{B = \frac{v_1}{\omega_n}}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$

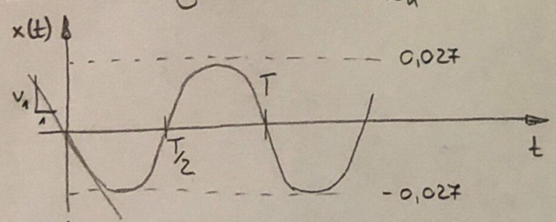
$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{v_1}{\omega_n} = \underline{\underline{-0{,}027\ m}}$

Max: sebesség: $v_{max} = -C\cdot\omega_n = \underline{\underline{0{,}145}}\ \frac{m}{s}$

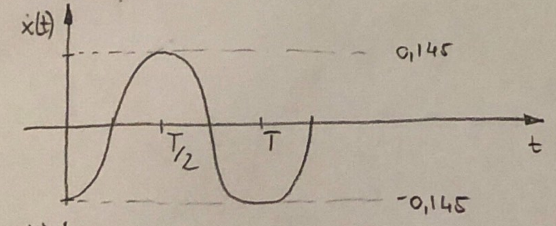
gyorsulás: $a_{max} = -C\omega_n^2 = \underline{\underline{0{,}784}}\ \frac{m}{s^2}$

$\varepsilon = \arctan\left(\underbrace{\frac{A}{B}}_{=0}\right) \Rightarrow \varepsilon = 0 + j\pi$

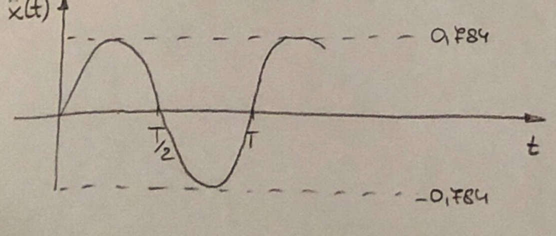
Foronómiai görbék: $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$



$x(t) = -0{,}027\cdot\sin(5{,}39t)$



$\dot{x}(t) = -0{,}145\cos(5{,}39t)$



$\ddot{x}(t) = 0{,}784\sin(5{,}39t)$