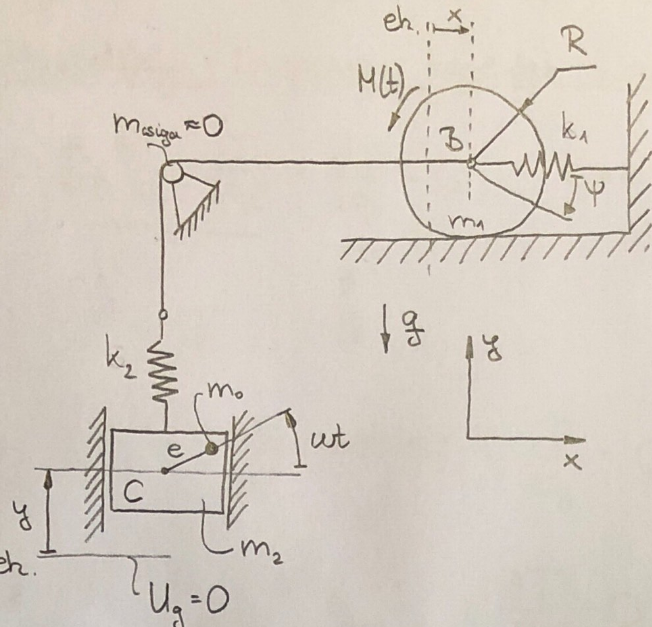
Többszabadságfokú gerjesztett lengőrendszer:



Adatok:

$M(t) = M_0 \cos(\omega t + \varepsilon)$

(A kötél nem lazul le.)

$m_0 = 0{,}1\ kg$	$k_1 = 100\ \frac{N}{m}$
$m_1 = 1\ kg$	$k_2 = 200\ \frac{N}{m}$
$m_2 = 3\ kg$	$M_0 = 3\ Nm$
$R = 0{,}2\ m$	$\omega = 30\ \frac{rad}{s}$
$e = 0{,}01\ m$	$\varepsilon = \frac{\pi}{6}$

Feladat:

1, Mátrixegyütthatós egyenlet felírása!

2, Állandósult állapotbeli mozgás megadása!

3, Az s_2 merevségű rugóban ébredő maximális erő (állandósult állapot)!

Megoldás:

1, $n = 2DoF$ és $\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, ahol $q_1 = y \quad q_2 = \psi$ (egyensúlyi helyzettől mérve)

Mivel kiegyensúlyozatlan tömeggel való gerjesztés is van, így a kinetikus energiában figyelnünk kell a gerjesztő hatásokra!

A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 + \frac{1}{2} \Theta_B \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_c^2 + \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \text{, ahol} \quad v_B = R\dot{\psi},\ \omega_1 = \dot{\psi},\ v_c = \dot{y}$$

$$v_0 = ?\ ,\ \Theta_B = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

v_0 meghatározása:

$$\underline{v}_0 = \underline{v}_c + \underline{\omega}_0 \times \underline{r}_{c0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e\cos(\omega t) \\ e\sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e\omega\sin(\omega t) \\ e\omega\cos(\omega t) + \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

így

$$v_0^2 = e^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \dot{y}^2 + 2e\omega\dot{y}\cos(\omega t) + e^2\omega^2\cos^2(\omega t) = e^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2e\omega\dot{y}\cos(\omega t)$$

Behelyettesítve:

$$T = \frac{1}{2} m_1 R^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{4} m_1 R^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_0 \left(e^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2e\omega\dot{y}\cos(\omega t)\right)$$

$$T = \frac{3}{4} m_1 R^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_0 \left(e^2\omega^2 + \dot{y}^2 + 2e\omega\dot{y}\cos(\omega t)\right)$$

Másodfajú - Lagrange egyenlet alapján:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}}_{\Downarrow\ \underline{\underline{M}} \text{ és } \underline{Q}^0} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q_k}}_{\Downarrow\ \underline{\underline{K}}} = Q_k \qquad k = 1..n$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}$ és $\underline{Q}$ megfelelő komponense számítható!

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_0 + m_2)\dot{y} + m_0 e\omega\cos(\omega t) \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_0+m_2)\ddot{y} \underbrace{- m_0 e\omega^2 \sin(\omega t)}_{\underline{Q}(t)\text{-be megy}}$$

és

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{3}{2} m_1 R^2 \dot{\psi} \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{3}{2} m_1 R^2 \ddot{\psi}$$

Ez alapján a tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_0 + m_2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_1 R^2 \end{bmatrix}$$

Gerjesztés:

$$\underline{Q}^0 = \begin{bmatrix} m_0 e\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\omega t)$$

A merevségi mátrix meghatározása:

Potenciálfüggvény: (nincs útgerjesztés)

$$U = \frac{1}{2} k_1 (R\psi)^2 + \frac{1}{2} k_2 \underbrace{(R\psi - y)^2}_{= R^2\psi^2 - 2R\psi y + y^2} + m_0 g \left(y + e\sin(\omega t)\right)$$

ez is ide tartozna (ki fog esni!)

statikus deformáció és az egyensúlyt tartó nehézségi erők potenciálfüggvényét elhagyva került felírásra

$$k_{ij} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0\right] \text{ alapján}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = m_0 g + k_2 y - k_2 R\psi \qquad \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\bigg|_0 = k_2 \equiv k_{11}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \psi}\bigg|_0 = -k_2 R \equiv k_{12} \equiv k_{21}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = k_1 R^2 \psi + k_2 R^2 \psi - R y k_2 \qquad \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\bigg|_0 = (k_1 + k_2) R^2 \equiv k_{22}}$$

Így a merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 R \\ -k_2 R & (k_1 + k_2) R^2 \end{bmatrix}$$

A nyomatékgerjesztés teljesítménye:

$$P_M = \underline{M}\,\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0\cos(\omega t+\varepsilon)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot\psi\end{bmatrix} = \underbrace{-M_0\cos(\omega t+\varepsilon)}_{Q_2^M}\dot\psi \quad \Rightarrow \quad \underline{Q}^M = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_0\cos(\omega t+\varepsilon)\end{bmatrix}$$

<u>Az általános erővektor:</u>

$$\underline{Q}(t) = \underline{Q}^e(t) + \underline{Q}^M(t) = \begin{bmatrix} m_0 e\omega^2\sin(\omega t) \\ -M_0\cos(\omega t+\varepsilon)\end{bmatrix} = \underline{F}_s\sin(\omega t) + \underline{F}_c\cos(\omega t) \quad \text{alakúra kell hozni}$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{bmatrix} m_0 e\omega^2\sin(\omega t) \\ -M_0\cos(\omega t)\cos\varepsilon + M_0\sin(\omega t)\sin\varepsilon\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_0 e\omega^2 \\ M_0\sin\varepsilon\end{bmatrix}}_{=\underline{F}_s}\sin(\omega t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -M_0\cos\varepsilon\end{bmatrix}}_{=\underline{F}_c}\cos(\omega t)$$

<u>Ezek alapján a mozgásegyenlet:</u>

$$\begin{bmatrix} m_0+m_2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m_1R^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot y \\ \ddot\psi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2R \\ -k_2R & (k_1+k_2)R^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ \psi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0e\omega^2 \\ M_0\sin\varepsilon\end{bmatrix}\sin(\omega t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -M_0\cos\varepsilon\end{bmatrix}\cos(\omega t)$$

2, <u>Állandósult állapotbeli mozgás</u>

Partikuláris megoldás: $q_p = \underline{L}\cos(\omega t) + \underline{N}\sin(\omega t)$, ahol $\underline{L}$ és $\underline{N}$ a következők alapján meghatározhatók:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\omega^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{L} \\ \underline{N}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{F}_c \\ \underline{F}_s\end{bmatrix},$$

Mivel csillapítatlan a rendszer $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{0}}$

<u>Kibontva:</u>

$$\begin{bmatrix} -\omega^2(m_2+m_0)+k_2 & -k_1R & 0 & 0 \\ -k_2R & -\omega^2\frac{3}{2}m_1R^2+(k_1+k_2)R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2(m_2+m_0)+k_2 & -k_2R \\ 0 & 0 & -k_2R & -\omega^2\frac{3}{2}m_1R^2+(k_1+k_2)R^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ N_1 \\ N_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_0\cos\varepsilon \\ m_0e\omega^2 \\ M_0\sin\varepsilon\end{bmatrix}$$

Kifejtve:

$$\left.\begin{aligned}&(-\omega^2(m_2+m_0)+k_2)L_1+(-k_2R)L_2=0\\&(-k_2R)L_1+\left(-\omega^2\frac{3}{2}m_1R^2+(k_1+k_2)R^2\right)L_2=-M_0\cos\varepsilon\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&(-\omega^2(m_2+m_0)+k_2)N_1+(-k_2R)N_2=m_0e\omega^2\\&(-k_2R)N_1+\left(-\omega^2\frac{3}{2}m_1R^2+(k_1+k_2)R^2\right)N_2=M_0\sin\varepsilon\end{aligned}\right\};$$

az adatokat behelyettesítve:

$$\left.\begin{aligned}2590L_1+40L_2&=0\\40L_1+42L_2&=2{,}6\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}L_1&=-0{,}00097\ \text{m}\\L_2&=0{,}06278\ \text{rad}\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}2590N_1+40N_2&=-0{,}9\\40N_1+42N_2&=-1{,}5\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}N_1&=0{,}00021\ \text{m}\\N_2&=-0{,}03591\ \text{rad}\end{aligned}$$

Így:

$$q_P=\begin{bmatrix}-0{,}00097\\0{,}06278\end{bmatrix}\cos(30t)+\begin{bmatrix}0{,}00021\\-0{,}03591\end{bmatrix}\sin(30t)\qquad\begin{bmatrix}(\text{m})\\(\text{rad})\end{bmatrix}$$

3, Maximális rugóerő

$$F_{r2}(t)=F_{r2st}+F_{r2din}(t)$$

$$F_{r2st}=(m_0+m_2)g=30{,}411\ [\text{N}]$$

$F_{r2din}(t)=k_2(R\Psi-y)$, ahol $\Psi(t)=L_2\cos(\omega t)+N_2\sin(\omega t)$

$y(t)=L_1\cos(\omega t)+N_1\sin(\omega t)$

így

$$F_{r2din}(t)=k_2\big((RL_2-L_1)\cos(\omega t)+(RN_2-N_1)\sin(\omega t)\big)=k_2A\sin(\omega t+\delta)$$

ilyen alakban As_2 adja a maximumot

Szétbontva:

$$(RL_2-L_1)\cos(\omega t)+(RN_2-N_1)\sin(\omega t)=A\sin(\omega t)\cos\delta+A\cos(\omega t)\sin\delta$$

Harmonikus egyensúly:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\omega t):&\quad RN_2-N_1=A\cos\delta\\\cos(\omega t):&\quad RL_2-L_1=A\sin\delta\end{aligned}\right\}$$

Négyzetre emelés és összeadás:

$$(RN_2 - N_1)^2 + (RL_2 - L_1)^2 = A^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{(RN_2-N_1)^2 + (RL_2-L_1)^2} = 0{,}0154 \text{ m}$$

$$F_{r2max} = F_{r2st} + F_{r2dinmax} = (m_0 + m_2)g + k_2 A = 30{,}411 + 3{,}083 = \underline{\underline{33{,}494}} \text{ N}$$