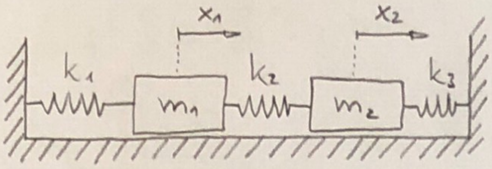
Rugólánc sajátkörfrekvenciái és lengésképei:



$m_1 = 0{,}2\,kg$

$m_2 = 0{,}5\,kg$

$k_1 = k_2 = k_3 = k = 500\,\frac{N}{m}$

Feladat: Mozgásegyenlet felírása! Sajátfrekvenciák! Lengésképek!

$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, 2DoF, ahol $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$

Kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Potenciális energia:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

Mivel nincsenek nempotenciálos erők így $Q^* = 0$ (nincsenek nem ideális kényszerek)

Mozgásegyenlet felírása:

1. **Módszer:** Lagrange-egyenlet alapján:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q^* \quad \text{, ahol } k = 1 \dots n \qquad n = 2 \text{ jelen esetben}$$

így:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 \; ; \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \ddot{x}_1} \; ; \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \; ; \boxed{\frac{\partial U}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)(-1)}\right\} x_1 \text{ szerint}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2 \; ; \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \ddot{x}_2} \; ; \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \; ; \boxed{\frac{\partial U}{\partial x_2} = k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1)}\right\} x_2 \text{ szerint}$$

Ez alapján a mozgásegyenlet:

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \\ &(2) \quad m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Mivel } k = k_i \; i = 1..3 \Rightarrow$$

$$(1) \quad m_1 \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0$$

$$(2) \quad m_2 \ddot{x}_2 + 2k x_2 - k x_1 = 0$$

Ez átírható mátrixegyenletté:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{=\ddot{\underline{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{=\underline{\underline{k}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{Q}^*}$$

Észrevehető, hogy jelen esetben rögtön lineáris egyenletrendszert kaptunk!

2. Módszer: Rögtön mátrixegyütthatós differenciálegyenlet:

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{S}}\,\underline{q} = \underline{Q}^* \quad \text{, ahol}$$

$$m_{ij} = \left[\left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|_{\underline{q}=\underline{0}} \right] \quad \text{és} \quad k_{ij} = \left[\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}=\underline{0}} \right]$$

Ez alapján:

$$m_{11} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} \right|_{\underline{0}} = m_1 \qquad m_{22} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \right|_{\underline{0}} = m_2 \qquad m_{12} = m_{21} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \right|_{\underline{0}} = 0$$

$$\left(= \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} \right)$$

Így a tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} [kg]$$

Majd:

$$k_{11} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \right|_{\underline{0}} = k_1 + k_2 \qquad k_{22} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right|_{\underline{0}} = k_2 + k_3 \qquad k_{12} = k_{21} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\underline{0}} = -k_2$$

$$\left(= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} \right)$$

Így a merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \xRightarrow{k = k_i \; i=1\ldots3} \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & -500 \\ -500 & 1000 \end{bmatrix} \left[\frac{N}{m}\right]$$

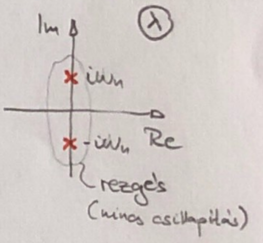
Ez alapján a mozgásegyenlet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}}_{=\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{=\ddot{\underline{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1000 & -500 \\ -500 & 1000 \end{bmatrix}}_{=\underline{\underline{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{Q}^*}$$

Sajátfrekvenciák:

Kiindulási egyenlet: $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = \underline{0}$ próbafüggvény: $\underline{q} = \underline{A} e^{\overset{=\lambda}{i\omega_n} t}$

$\ddot{\underline{q}} = \underline{A} (i\omega_n)^2 e^{i\omega_n t}$



$$\underbrace{(-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}})}_{=0} \underbrace{\underline{A} e^{i\omega_n t}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{csak ha} \\ t \to -\infty}} = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Frekvenciaegyenlet:

$$\det(-\omega_n^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) = 0 \quad \Rightarrow \omega_{n1}, \omega_{n2}$$

$$\begin{vmatrix} -0{,}2\omega_n^2+1000 & -500 \\ -500 & -0{,}5\omega_n^2+1000 \end{vmatrix} = 0{,}1\omega_n^4 - 7\cdot 10^2\omega_n^2 + 75\cdot 10^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{n1} = 36{,}34\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_{n2} = 75{,}36\ \frac{rad}{s}$$

<u>Lengésképek meghatározása</u>: $A_{11} = A_{21} = 1$

$$\begin{bmatrix} -0{,}2\cdot\omega_{nk}^2+1000 & -500 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ A_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ elég csak az első sort vizsgálni

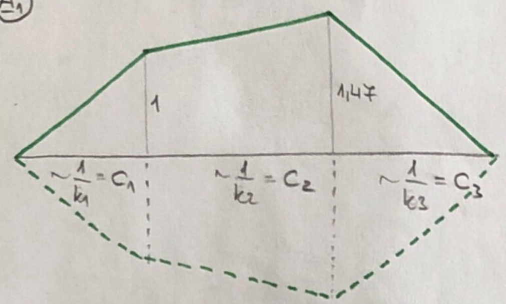
$$\Rightarrow 1000 - 0{,}2\omega_{nk}^2 - 500A_{k2} = 0$$

$$A_{k2} = \frac{1000-0{,}2\omega_{nk}^2}{500} \quad \begin{cases} A_{12} = 1{,}47 \\ A_{22} = -0{,}27 \end{cases}$$

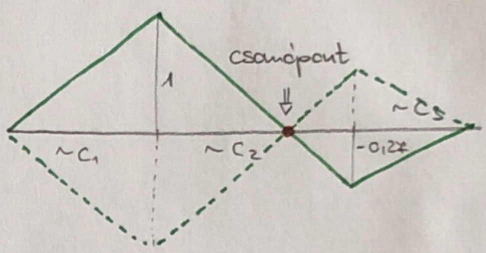
$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}47 \end{bmatrix};\ \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}27 \end{bmatrix}$$

<u>Szemléltetés:</u>

$\underline{A}_1$



$\underline{A}_2$



A rugó csomópontba erő pontja mozdulatlan marad, tehát azt a pontot akár le is rögzíthetjük

Ha lerögzítjük, akkor a rugók sorosan kapcsoltak, érdemes a rugóállandóknak megfelelően rajzolni az ábrát.