Elmélet:

Több szabadsági fokú lengőrendszerek:

A rezgések stabilis egyensúlyi helyzet körül alakulhatnak ki, ezért nemlineáris egyenleteket az egyensúlyi helyzet körüli sorfejtéssel linearizálunk.

Több szabadsági fokú rendszerek esetén hasonlóan járunk el. Az n szabadsági foknak megfelelően az egyensúlyi helyzettől mérve felvesszük a q_i koordinátákat és felírjuk a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i^* \qquad i = 1 \dots n$$

mozgásegyenleteket. Feltéve, hogy a rendszer kis amplitúdójú rezgéseket végez $\underline{q} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzet körül -, ahol $\underline{q}$ az általános koordináták vektora - az egyenletek linearizálhatók, megoldásaik analitikusan meghatározhatók.

1, Felírjuk a nemlineáris egyenletet, majd linearizálunk

2, T, U, $\mathcal{D}$ -t olyan alakban írjuk fel, hogy rögtön a lineáris egyenletre jussunk (nem alkalmazható, ha időfüggő kényszerek is vannak)

Mátrixegyütthatós differenciálegyenlet:

• Általános tömegmátrix:

Ha az energiakifejezéseket másodfokig sorbafejtjük a megfelelő változó szerint, akkor a Lagrange egyenlet a lineáris mozgásegyenletre vezet. Többváltozós Taylor sorfejtést kell alkalmazni. Ha nincs időfüggő kényszer, akkor T kinetikus energia az általános sebességek másodfokú függvénye, tehát $\underline{q} = \underline{0}$ és $\dot{\underline{q}} = \underline{0}$ körüli Taylor-sorában:

$$T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\Big|_{\underline{q}=\underline{0}, \dot{\underline{q}}=\underline{0}} = \underbrace{\frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\Big|_{\underline{q}=\underline{0}}}_{= m_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underset{\uparrow}{\underline{\underline{M}}} \dot{\underline{q}} + \dots$$

általános tömegmátrix

Young-tétel értelmében a deriválások sorrendje felcserélhető így a tömegmátrix szimmetrikus. A tömeg csak pozitív lehet, így a kinetikus energia egy poz. definit kvadratikus alak, csak zérus seb.-nél nulla az értéke, egyébként pozitív. Így az ált. tömegmátrix poz. definit, sajátértékei pozitívak.

- Általános merevségi mátrix:

$$U(q)\Big|_{q=0} = U(\underline{0}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{q=\underline{0}} q_i + \frac{1}{2!}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q=0}}_{=s_{ij}} q_i q_j + \ldots = \frac{1}{2} q^T \underline{\underline{K}} q$$

általános merevségi mátrix

A konstans tag a pot. energia nullszintjének megválasztásától függ, tehát ez zérusra tehető. Egyensúlyi helyzetben a pot. energiának szélsőértéke van, ezért minden parciális deriváltja zérus. (Elsőfokú tagok eltűnnek.) Az egyensúlyi helyzet stabil, ha a pot. energiának minimuma van. Ez pedig annak felel meg, ha a $\underline{\underline{K}}$ mátrix poz. definit. Young-tétel miatt $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^T$. Ha stabilitás határán vagyunk, akkor $\underline{\underline{K}}$ poz. semidefinit (legalább egy 0 sajátérték).
Időfüggő kényszerek esetén az időfüggő tagokat is figyelembe kell venni.

- Általános csillapítási mátrix:

Hasonlóan a kinetikus energiához:

$$\mathcal{D}(q,\dot{q})\Big|_{\dot{q}=0,\, q=0} = \frac{1}{2!}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\Big|_{q=0}}_{=k_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j + \ldots = \frac{1}{2}\dot{q}^T \underline{\underline{C}}\dot{q}$$

általános csillapítási mátrix

Mátrixegyütthatós differenciálegyenlet:

Az energiakifejezéseket beírva a Lagrange-egyenletbe, az

$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} + \underline{\underline{C}}\dot{q} + \underline{\underline{K}}q = \underline{Q}^*$$

mátrixegyütthatós egyenletet kapjuk. (lineáris), $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{K}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$q \in \mathbb{R}^n$

$\underline{Q}^* \in \mathbb{R}^n$

Csillapítatlan szabad rezgés
(Sajátkörfrekvenciák, lengésképek)

Mozgásegyenlet:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} + \underline{\underline{C}}\dot{q} + \underline{\underline{K}}q = \underline{0}$$

az egyenlet megoldása különböző frekvenciájú csillapodó rezgések kombinációjaként fejezhető ki. n DoF esetén 2n kezdeti feltétel kell.

Sajátkörfrekvenciák: kis csillapításnál $\omega_n = \omega_d$, így $\underline{\underline{M}}\ddot{q} + \underline{\underline{K}}q = \underline{0}$

próbafüggvény: $q = \underline{A}e^{\pm i\omega_n t}$

Behelyettesítve:

$$\underbrace{\left(-\omega_n^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right)}_{=0}\underbrace{\underline{A}e^{\pm i\omega_n t}}_{\neq 0} = \underline{0} \Rightarrow \det\left(-\omega_n^2\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right) = 0 \text{ (Frekvenciaegyenlet)}$$

+ − alakú ...

$\omega_{n1} \leq \omega_{n2} \leq \omega_{n3} \leq \ldots \leq \omega_{nn}$

Lengésképek meghatározása:

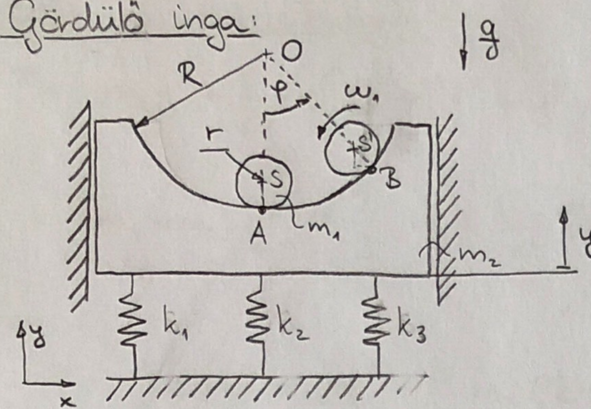
$$(-\omega_{nj}^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}})\underline{A}_j = \underline{0} \qquad j = 1 \ldots n$$

$\underline{A}_j$-re végtelen sok megoldás található (konstans szorzóban különböznek)

Fizikai tartalmuk: a j-edik lengéskép vektor az egyes koordináták lengési amplitúdóinak az arányait adja meg abban az esetben, amikor csak ω_{nj} sajátkörfrekvenciával történik a rezgés.

Az általános megoldás n ilyen különböző körfrekvenciájú és lengésképű rezgés kombinációja.

Gördülő inga:



• Adott: $m_1, m_2, R, r, k_1, k_2, k_3$

Feladat: Írjuk fel a mozgásegyenletet!

Szabadsági fokok száma: $n = 2DoF$

Általános koordináták: $q_1 = y$

$q_2 = \varphi$

Másodfajú-Lagrange-egyenlet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q^*$$

Kinetikus energia:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot y^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_S \omega_1^2}_{\text{súlypontra kell felírni, mert } \underline{v}_B \neq \underline{0}}$$

• Szögsebesség kifejezése a φ szöggel:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{v}_S = \underline{v}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \underline{r}_{OS} \\ \underline{v}_S = \underline{v}_A + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AS} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Mivel } \underbrace{\underline{v}_A = \underline{v}_0}_{\text{együtt mozog}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot y \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ezért } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -(R-r) \\ 0 \end{bmatrix}}^{=\underline{r}_{OS}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\omega_1 \end{bmatrix} \times \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}}^{=\underline{r}_{AS}}$$

$$\begin{bmatrix} (R-r)\dot\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_1 = \frac{(R-r)\dot\varphi}{r}$$

Visszaírva:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot y^2 + \frac{1}{2} m_1 v_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_S \frac{(R-r)^2}{r^2}\dot\varphi^2$$

A súlypont sebessége:

$$\underline{v}_S = \underbrace{\underline{v}_{Sszáll}}_{=\begin{bmatrix} 0 \\ \dot y \\ 0 \end{bmatrix}} + \underline{v}_{Srel}$$

ebből a relatív sebesség:

$$\underline{v}_{Srel} = \underbrace{\underline{\beta}_B}_{\text{B pont rel. sebessége } \underline{0}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{BS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_{Srel} = \begin{bmatrix} -\omega_1 r\cos\varphi \\ -\omega_1 r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ekkor: $\underline{v}_S = \begin{bmatrix} -\omega_1 r\cos\varphi \\ \dot y - \omega_1 r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$

$$v_S^2 = \omega_1^2 r^2\cos^2\varphi + \dot y^2 - 2\dot y\omega_1 r\sin\varphi + \omega_1^2 r^2\sin^2\varphi = \omega_1^2 r^2 + \dot y^2 - 2\dot y\omega_1 r\sin\varphi$$

$$= \frac{(R-r)^2}{\cancel{r^2}}\dot\varphi^2\cancel{r^2} + \dot y^2 + 2\dot y\frac{(R-r)}{\cancel{r}}\dot\varphi\cancel{r}\sin\varphi$$

$$= (R-r)^2\dot\varphi^2 + \dot y^2 + 2\dot y\dot\varphi(R-r)\sin\varphi$$

Ezzel a kinetikus energia:

$$T=\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_1\left[(R-r)^2\dot{\varphi}^2+\dot{y}^2+2\dot{y}\dot{\varphi}(R-r)\sin\varphi\right]+\frac{1}{2}\Theta_s\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_2+m_1)\dot{y}^2+\frac{1}{2}\left(m_1+\frac{\Theta_s}{r^2}\right)(R-r)^2\dot{\varphi}^2+m_1\dot{y}\dot{\varphi}(R-r)\sin\varphi \quad \text{, ahol } \Theta_s=\frac{1}{2}m_1r^2$$

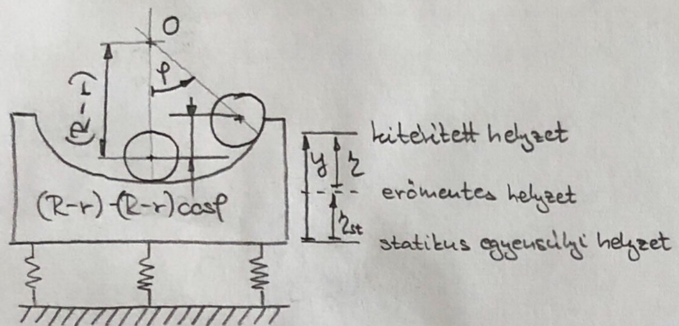
így

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2+\frac{3}{4}m_1(R-r)^2\dot{\varphi}^2+m_1\dot{y}\dot{\varphi}(R-r)\sin\varphi$$

Potenciális energia: Először írjuk fel a rugók erőmentes helyzetétől mért koordinátákkal

$U=U_{rugó}+U_{súly}$ $\qquad U_{rugó}=\frac{1}{2}k_1\zeta^2+\frac{1}{2}k_2\zeta^2+\frac{1}{2}k_3\zeta^2$

$U_{súly}=m_1gh_1+m_2gh_2$, ahol h_1 és h_2 magasságkülönbségek



$$h_1=\zeta+(R-r)(1-\cos\varphi)$$

$$h_2=\zeta$$

$$U_{súly}=m_1g(\zeta+(R-r)(1-\cos\varphi))+m_2g\zeta$$

Tehát a potenciális energia:

$$U=\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)\zeta^2+(m_1+m_2)g\zeta+m_1g(R-r)(1-\cos\varphi)$$

Mivel $\zeta=y-\zeta_{st}$

$$U=\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)(y-\zeta_{st})^2+(m_1+m_2)g(y-\zeta_{st})+m_1g(R-r)(1-\cos\varphi)$$

0 helyzet beállítható úgy hogy ezek 0-k legyenek

$$=\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)y^2+\underbrace{\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)\zeta_{st}^2}_{\text{konstans}}\underbrace{\boxed{-(k_1+k_2+k_3)y\zeta_{st}}+\boxed{(m_1+m_2)gy}}_{\text{Egyensúlyt tartanak}}\underbrace{-(m_1+m_2)g\zeta_{st}}_{\text{konstans}}$$

$$+m_1g(R-r)(1-\cos\varphi)$$

$$(k_1+k_2+k_3)\zeta_{st}=(m_1+m_2)g \Rightarrow \zeta_{st}=\frac{(m_1+m_2)g}{k_1+k_2+k_3}$$

Így

$$\tilde{U}=\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)y^2+m_1g(R-r)(1-\cos\varphi)$$

Deriválások:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(m_1+m_2)\dot{y}+m_1\dot{\varphi}(R-r)\sin\varphi$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial y}=0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(m_1+m_2)\ddot{y}+m_1\ddot{\varphi}(R-r)\sin\varphi+m_1\dot{\varphi}^2(R-r)\cos\varphi} \\ \boxed{\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}=(k_1+k_2+k_3)y}\end{array}\right\} y$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{2} m_1 (R-r)^2 \dot\varphi + m_1 \dot y (R-r)\sin\varphi \\
&\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{2} m_1 (R-r)^2 \ddot\varphi + m_1 \ddot y (R-r)\sin\varphi + m_1 \dot y (R-r)\cos\varphi\, \dot\varphi} \\
&\boxed{\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_1 \dot y \dot\varphi (R-r)\cos\varphi} \\
&\boxed{\frac{\partial U}{\partial \varphi} = m_1 g (R-r)\sin\varphi}
\end{aligned}\right\}\varphi$$

Az egyenletek:

(1): $(m_1+m_2)\ddot y + m_1(R-r)\sin\varphi\,\ddot\varphi + m_1(R-r)\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + (k_1+k_2+k_3)y = 0$

(2): $\frac{3}{2}\cancel{m_1}(R-r)^{\cancel{2}}\ddot\varphi + \cancel{m_1}(\cancel{R-r})\sin\varphi\,\ddot y + \cancel{m_1} g(\cancel{R-r})\sin\varphi = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(R-r)\ddot\varphi + \sin\varphi\,\ddot y + g\sin\varphi = 0$

(kapcsolt nemlineáris egyenletrendszer)

Linearizálás: $\sin\varphi \sim \varphi$, $\cos\varphi \sim 1$, $\dot\varphi^2 \sim 0$, $\sin\varphi\,\ddot\varphi \sim 0$, $\sin\varphi\,\ddot y \sim 0$

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad (m_1+m_2)\ddot y + (k_1+k_2+k_3)y = 0 \\
&(2)\quad \frac{3}{2}(R-r)\ddot\varphi + g\varphi = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ez már két független egyenlet}$$

Mátrixegyütthatós differenciálegyenlet:

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = \underline{0}$$

- $m_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\right|_{\underline{q}=\underline{0}} \Rightarrow m_{11} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot y^2}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = m_1+m_2 \qquad m_{22} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot\varphi^2}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = \frac{3}{2}(R-r)^2 m_1$

$m_{12} = m_{21} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot y \partial \dot\varphi}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = m_1(R-r)\sin\varphi\Big|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = 0$

Így: $\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(R-r)^2 m_1 \end{bmatrix}$

- $k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\underline{q}=\underline{0}} \Rightarrow k_{11} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = k_1+k_2+k_3$

$k_{22} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = m_1 g(R-r)\cos\varphi\Big|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = m_1 g(R-r)$

$k_{12} = k_{21} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \varphi}\right|_{\substack{y=0\\ \varphi=0}} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3 & 0 \\ 0 & m_1 g(R-r) \end{bmatrix}$