Elméleti összefoglaló:

Rezgéstan, mint tudományterület a tanulmányaink során többször is előfordul:

- elektromágneses rezgőkörök leírása hasonlóan történik, mint a lengőrendszerek leírása
- lineáris szabályzások (PD szabályozó)
- hangok forrása
- molekulák, kristályok első közelítésben modellezhetők rugó-tömeg lengőrendszerrel

Gépészmérnöki gyakorlat:

- rugalmas felfüggesztések, járműdinamika
- szilárdságtan, fáradásos igénybevételek
- gépalapozás, rezgésszigetelés
- gépkarbantartás, rezgésfelügyelet

Ütközés:

Ütközés során megváltozik az ütköző testek sebességállapota.

Ütközési modell:
- nem vesszük figyelembe az ütközés időtartama alatt lejátszódó folyamatokat
- az ütközés előtti sebességállapot $[\underline{\Omega}_i, \underline{c}_i]$, és az ütközési tényező (e) segítségével számolható az ütközés utáni sebességállapot $[\underline{\omega}_i, \underline{v}_i]$, ahol $i = 1,2$
- akkor jöhet létre ütközés, ha a testek érintkeznek és az érintkezési pontok seb.-e eltérő

Alapvető feltevések:
- az ütközés olyan rövid idő alatt játszódik le, hogy a testek eközben nem mozdulnak el
- olyan nagy erők lépnek fel ütközés közben, hogy minden más erő elhanyagolható (kivéve ha a test a környezethez van rögzítve, ekkor a kényszererők figyelembe veendők)
- az ütköző testek az érintkezési pont környékén lokálisan deformálódnak, ettől a ponttól távolabb már elhanyagolhatónak tekinthető
- a mechanikai energiaveszteségre az ütközési tényező (e) segítségével következtethetünk (anyagi tulajdonságoktól függően)

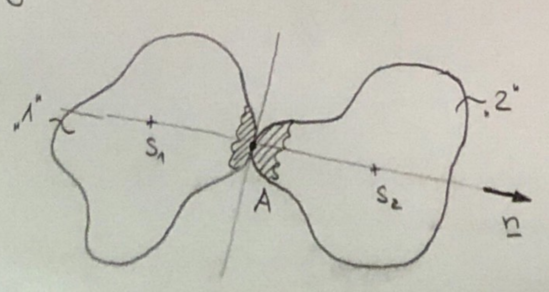
  $e = 1$ tökéletesen rugalmas ütközés

  $e = 0$ tökéletesen rugalmatlan ütközés (képlékeny)

  $0 < e < 1$ részben rugalmas, részben képlékeny ütközés
- az érintkezési pontban nincs súrlódás, a közös érintő síkkal párhuzamosan nem adódik át erő (csak normális irányban)

Centrikus ütközés

Egy test szempontjából centrikus az ütközés, ha nincs a környezethez rögzítve és súlypontja rajta van az ütközési normálison.



- ütközési normális az 1-es test felől a 2-es felé mutat

impulzusmegmaradás:

$$\underline{I}(t_1) - \underline{I}(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_A \, dt$$

perdületmegmaradás:

$$\underline{\Pi}(t_1) - \underline{\Pi}(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_0 \, dt$$

Centrikus ütközés esetén a súlypontok rajta vannak $\underline{n}$ hatásvonalán, tehát, során fellépő az ütközés erő nyomatéka zérus

$$\omega_1 = \Omega_1$$
$$\omega_2 = \Omega_2$$

$$\underline{r}_S = \frac{m_1 \underline{r}_{S1} + m_2 \underline{r}_{S2}}{m_1 + m_2} \qquad \text{(közös súlypont)}$$

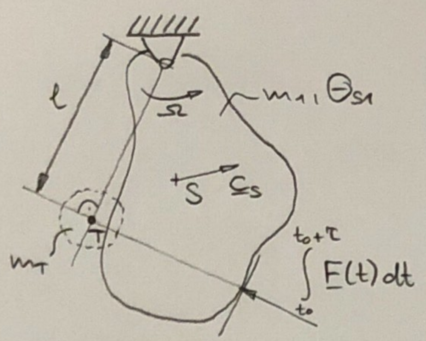
$$\Downarrow \frac{d}{dt}$$

$$\underline{c}_S = \frac{m_1 \underline{c}_{S1} + m_2 \underline{c}_{S2}}{m_1 + m_2} \quad = \underline{v}_S$$

<u>Ütközés lejátszódása</u>: A testek az ütközés első szakaszában benyomódnak. Ez addig tart, amíg el nem érik a közös súlypont sebességét. Az ütközés második szakasza során a benyomódott testek részben visszanyerik eredeti alakjukat. A testek között az ütközés teljes időtartama alatt csak nyomóerő hat. Ebből következik, hogy a sebességek is ilyen értelemben változnak.

<u>Álló tengely körül elforduló test ütközése</u>:

Centrikus ütközéstől eltérően, itt a test kapcsolatban van a környezettel (jelen esetben csuklóval rögzített), így fellépnek az ütközési erő nagyságrendjébe eső kényszererők, ami nem hagyható figyelmen kívül.

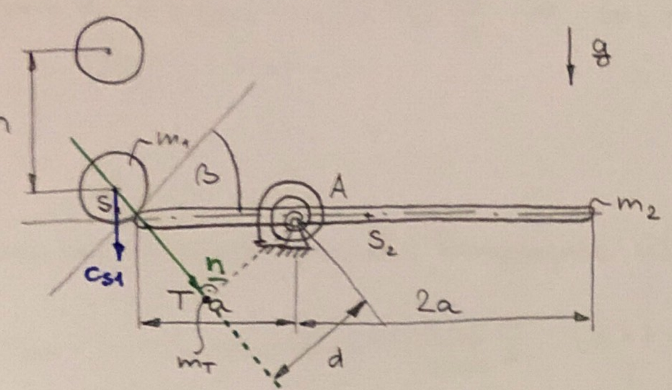


<u>Perdülettétel</u>:

$$\underbrace{\Theta_{01}\omega_1}_{=\frac{v_T}{\ell}} - \underbrace{\Theta_{01}\Omega_1}_{=\frac{c_T}{\ell}} = -\ell \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)\,dt$$

$$m_T = \frac{\Theta_{01}}{\ell^2} \quad \text{redukált tömeg}$$

Álló tengely körül elforduló testek ütközése:



$h = 0{,}115$ m

$m_1 = 6$ kg

$m_2 = 6$ kg

$e = 1$

$\tilde{e} = 0{,}75$

$\beta = 60°$

$a = 0{,}3$ m

Az ütközés m_1 szempontjából centrikus!

m_2 szempontjából a címben ismertetett ütközés

1) Ütközés talppontja:

I. Ütközési normális kijelölése

II. „A"-ból merőleges állítása $\underline{n}$-re (metszéspont: T)

AT távolság:

$$d = a\sin(90° - \beta) = \underline{\underline{0{,}15}}\ \text{m}$$

2, Redukált tömeg számítása:

$$m_T = \frac{\Theta_a}{d^2}\ ,\ \text{ahol}\quad \Theta_a = \frac{1}{12} m_2 (3a)^2 + m_2 \Big(\underbrace{\tfrac{3}{2}a - a}_{=\frac{a}{2}}\Big)^2 = \frac{3}{4} m_2 a^2 + m_2 \frac{a^2}{4}$$

$$= m_2 a^2$$

$$= \underline{\underline{0{,}54}}\ \text{kgm}^2$$

$$m_T = \underline{\underline{24}}\ \text{kg}$$

3, A golyó mozgásállapota az ütközés előtt:

munkatétel alapján: $c_{S1} = \sqrt{2gh} = \underline{\underline{1{,}50}}\ \frac{m}{s}$

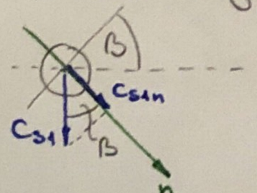
$$[|\Omega_1|, |\underline{c}_{S1}|] = [0,\ 1{,}50]$$

4, A rúd mozgásállapota az ütközés előtt

$$c_T = \Omega_2 d = 0\ \frac{m}{s} \quad (\text{mivel } \Omega_2 = 0\ \frac{rad}{s})$$

$$[|\Omega_2|, |\underline{c}_T|] = [0,\ 0]$$

5, c_{S1} normális irányú komponense:



$$c_{S1n} = c_{S1}\cos\beta = \underline{\underline{0{,}75}}\ \frac{m}{s}$$

6, Közös súlypont sebességének normális komponense:

$$c_{Sn} = \frac{c_{S1n} m_1 + \overbrace{c_{Tn}}^{=0} m_T}{m_1 + m_T} = \underline{\underline{0{,}15}}\ \frac{m}{s}$$

T sebessége az ütközés után:

$$v_T = \underset{c_{sn}}{v_{sn}} + e(\underset{c_{sn}}{v_{sn}} - c_T) = 0{,}3\ \frac{m}{s} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_T}{d} = \underline{\underline{2}}\ \frac{rad}{s} \quad (e = 1 \text{ esetén})$$

$$= \underline{\underline{1{,}75}}\ \frac{rad}{s} \quad (\tilde{e} = 0{,}75 \text{ esetén})$$

7) m_1 sebességének normális komponense ütközés után:

$$v_{s1n} = v_{sn} + e(v_{sn} - c_{s1n}) = \underline{\underline{-0{,}45}}\ \frac{m}{s} \quad (e = 1 \text{ esetén})$$

$$= \underline{\underline{-0{,}3}}\ \frac{m}{s} \quad (\tilde{e} = 0{,}75 \text{ esetén})$$

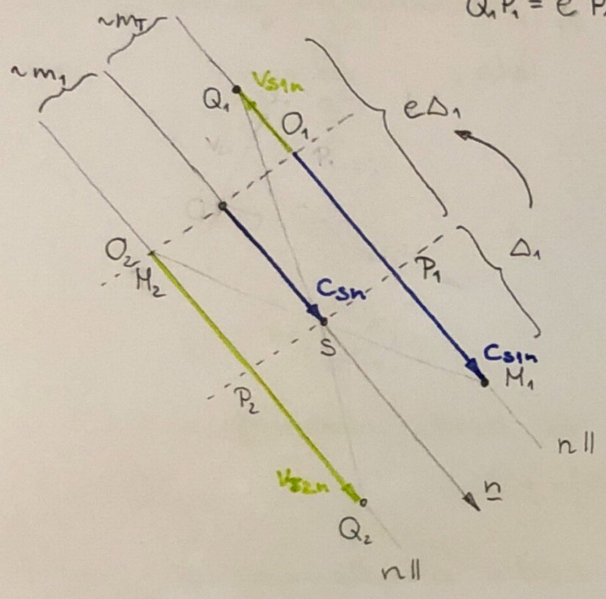
tangenciális komponens:

$$v_{s1t} = c_{s1t} = c_{s1} \cdot \sin\beta = \underline{\underline{1{,}3}}\ \frac{m}{s}$$

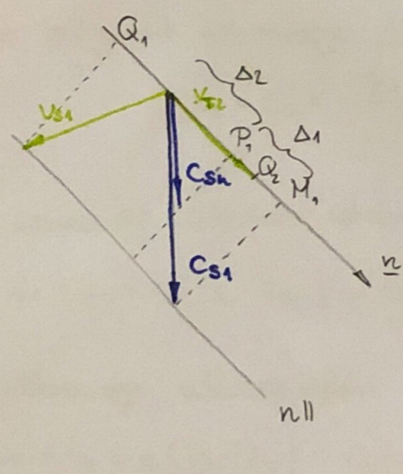
8. Maxwell-ábra: (egyszerűsített)

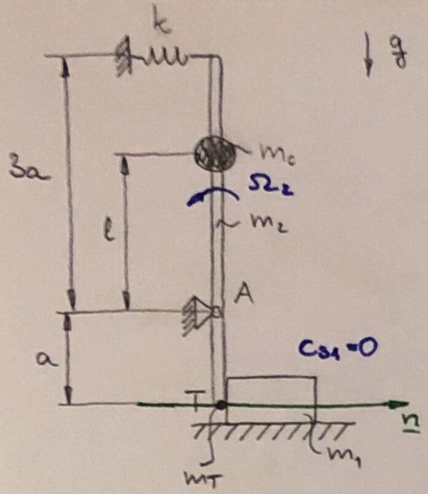
$$Q_1P_1 = e\, P_1M_1$$

$$\left.\begin{aligned} P_1M_1 &= c_{sn} - c_{sn} \\ Q_1P_1 &= v_{s1n} - c_{sn} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{s1} = c_{sn} + e(c_{sn} - c_{sn})$$



Általánosságban:





$m_0 = 0{,}5\,kg$

$m_1 = 4{,}5\,kg$

$m_2 = 3\,kg$

$a = 0{,}25\,m$

$l = 0{,}5\,m$

$\Omega_2 = 6\,\frac{rad}{s}$

$c_1 = 0\,\frac{m}{s}$

$e = 0{,}5$

$v_1 = ?$

m_1 szempontjából centrikus ütközés:

1, Ütközési talppont megkeresése:

I. A-ból ⊥ állítása $\underline{n}$-re

II. AT távolság meghatározása:

$$AT = a = \underline{\underline{0{,}25\,m}}$$

2, Redukált tömeg meghatározása:

$$m_T = \frac{\Theta_a}{a^2} \quad \text{, ahol} \quad \Theta_a = \frac{1}{12} m_2 (4a)^2 + m_2 (\underbrace{4a \cdot \tfrac{1}{2} - a}_{=a})^2 + m_0 l^2$$

$$= \underbrace{\frac{4}{3} m_2 a^2 + m_2 a^2}_{=\frac{7}{3} m_2 a^2} + m_0 l^2 = \underline{\underline{0{,}5625}}\,kgm^2$$

így $m_T = \underline{\underline{9}}\,kg$

3, A rúd sebességállapota ütközés előtt:

$$[|\underline{\Omega}_2|, |\underline{c}_T|] = [6\ ,\ 1{,}5] \qquad \text{ahol } |\underline{c}_T| = |\underline{\Omega}_2| \cdot a = \underline{\underline{1{,}5}}\,\frac{m}{s}$$

A test (1-es) mozgásállapota ütközés előtt:

$$[|\underline{\Omega}_1|, |\underline{c}_{s1}|] = [0\ ,\ 0]$$

4, Közös súlypont sebessége: (normális irány)

$$v_s = c_s = \frac{c_{s1} m_1 + c_T m_T}{m_1 + m_T} = \underline{\underline{1}}\,\frac{m}{s}$$

5, m_1 sebessége ütközés után

$$v_{s1} = v_s + e(v_s - c_{s1}) = \underline{\underline{1{,}5}}\,\frac{m}{s}$$

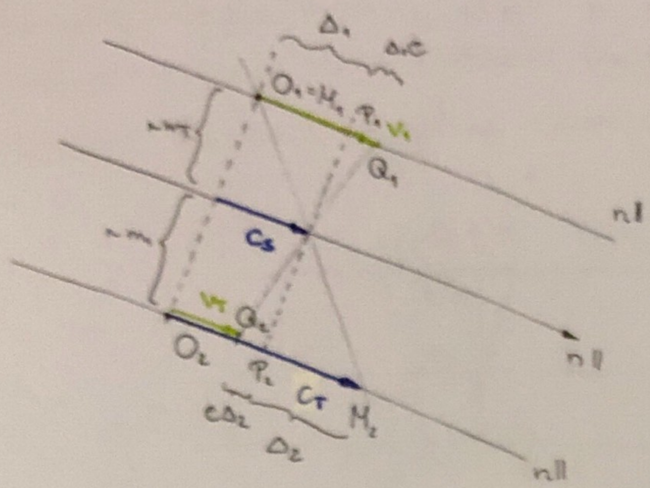
6, m_T sebessége ütközés után

$$v_T = v_s + e(v_s - c_T) = \underline{\underline{0{,}75}}\,\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{v_T}{a} = \underline{\underline{3}}\,\frac{rad}{s}$$

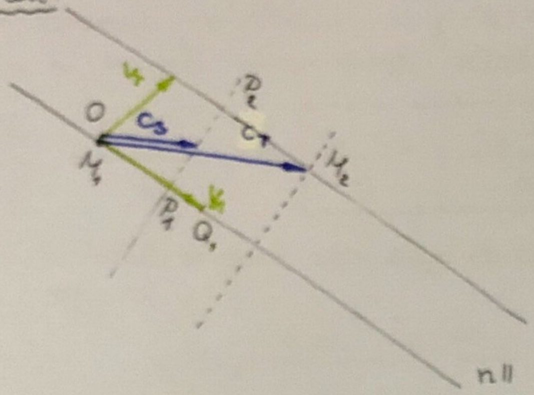
7. Maxwell-ábra

Egyszerűsített:

$$\underbrace{P_1M_1}_{\Delta_1} \cdot c = \underbrace{Q_1P_1}_{t\Delta_1}$$



Általánosított:

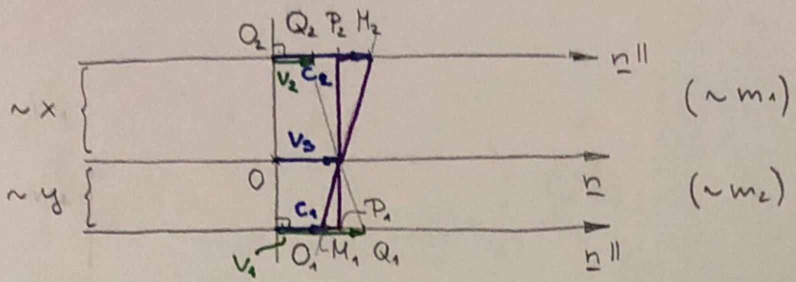


Maxwell ábra arányainak magyarázata:

Miért m_1, illetve m_2 arányában szerkesztünk párhuzamosokat az ütközési normálissal?

Alapvetően, hogyha $m_1 > m_2$, akkor a súlyponti sebesség számításánál az m_1 tömegű test sebességét nagyobb súllyal vesszük figyelembe. Ezzel magyarázhatók a feltüntetett arányok.

Levezetés: Tekintsük az alábbi általános, egyszerűsített Maxwell ábrát:



Tekintsük ismeretlennek és jelöljük x, y-al az $\overline{OO_2}$, illetve $\overline{O_1O}$ távolságokat, és a levezetéshez használjuk ki a hasonló háromszögek tételét: ▽

$$\frac{\overline{P_1M_1}}{y} = \frac{\overline{M_2P_2}}{x} \Rightarrow \boxed{\frac{v_s - c_1}{y} = \frac{c_2 - v_s}{x}}$$

Használjuk ki a közös súlypont sebességének kifejezését:

$$v_s = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{\frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2} - c_1}{y} = \frac{c_2 - \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}}{x}$$

$$\frac{\cancel{c_1 m_1} + c_2 m_2 - c_1(m_1 + m_2)}{y(m_1 + m_2)} = \frac{c_2(m_1 + \cancel{m_2}) - c_1 m_1 - \cancel{c_2 m_2}}{x(m_1 + m_2)}$$

$$\frac{m_2 \cancel{(c_2 - c_1)}}{y \cancel{(m_1 + m_2)}} = \frac{m_1 \cancel{(c_2 - c_1)}}{x \cancel{(m_1 + m_2)}}$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{m_1}{m_2}}$$