

Rezgéstan

Csernák Gábor - Stépán Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Műszaki Mechanikai Tanszék

2019

Lektorálta:
Szabó Zsolt

Illusztrációk:
Takács Dénes
Horváth Hanna Zsófia

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	IV
Jelölésjegyzék	VII
Előszó	IX
1. Bevezetés	1
1.1. A Rezgés tan jelentősége	1
1.2. Ütközés	3
1.2.1. Ütközési modell, alapfeltevések	3
1.2.2. Centrikus ütközés	5
1.2.3. Álló tengely körül elforduló test ütközése	10
1.2.4. Excentrikus ütközés	12
1.2.5. Hirtelen rögzítés	15
1.3. Mechanikai lengőrendszerek	16
1.3.1. A lengőrendszer alapvető elemei	17
1.3.2. A lengőrendszerek osztályozása	22
2. Egy szabadsági fokú lengőrendszerek	23
2.1. Csillapítatlan, szabad harmonikus rezgés	23
2.1.1. Alapfogalmak, a mozgásegyenlet és a mozgástörvény	23
2.1.2. A kezdeti feltételek figyelembevétele	27
2.1.3. A mozgás időbeli lefolyása	28
2.1.4. A nehézségi erő hatása I. – függőleges irányú rezgés	30
2.1.5. Rugók előfeszítése	33
2.2. Linearizálás	37
2.2.1. A nehézségi erő hatása II. – ingák	37
2.2.2. Linearizálás és rugók	42
2.2.3. Nehézségi erő kettős szerepben	45
2.3. Viszkózus csillapítású szabad rezgés	49
2.3.1. A mozgásegyenlet	51
2.3.2. Gyenge csillapítás	52
2.3.3. Kritikus csillapítás	57
2.3.4. Erős csillapítás	57
2.3.5. Lengéscsillapítók és linearizálás	61
2.3.6. Az ütközés tárgyalása a csillapított lengőrendszer modellje alapján	62
2.4. Száraz súrlódással csillapított szabad rezgések	66
2.4.1. Súrlódási modell	66

2.4.2.	A mozgásegyenlet és a mozgástörvény	67
2.5.	A másodfajú Lagrange-egyenlet	71
2.5.1.	A kényszerek osztályozása	72
2.5.2.	A másodfajú Lagrange-egyenlet levezetése	75
2.5.3.	Az általános erő meghatározása	79
2.5.4.	A másodfajú Lagrange-egyenlet és a Newton-Euler-módszer	84
2.5.5.	Példák a Lagrange-egyenlet alkalmazására	85
2.6.	Gerjesztett lengőrendszerek	92
2.6.1.	Gerjesztés típusok	92
2.6.2.	Harmonikus gerjesztés analitikus vizsgálata – erőgerjesztés	95
2.6.3.	Útgerjesztés	102
2.6.4.	Kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés	106
2.6.5.	Rezgésszigetelés	109
2.6.6.	Paraméteres gerjesztés	112
2.6.7.	Tranziens gerjesztés	114
3.	Több szabadsági fokú lengőrendszerek	117
3.1.	Mátrix együtthatós mozgásegyenlet	118
3.1.1.	A kinetikus energia és az általános tömegmátrix	118
3.1.2.	A potenciális energia és az általános merevségi mátrix	119
3.1.3.	A disszipatív potenciál és az általános csillapítási mátrix	122
3.1.4.	A mátrix együtthatós differenciálegyenlet felírása	122
3.2.	Csillapítatlan szabad rezgés	123
3.2.1.	Sajátkörfrekvenciák és lengésképek	123
3.2.2.	A mozgás időbeli lefolyása és a lengésképek fizikai tartalma	125
3.2.3.	Példák a sajátkörfrekvenciák és lengésképek kiszámítására	126
3.3.	Numerikus szimuláció	135
3.4.	Harmonikusan gerjesztett rezgések	138
3.4.1.	A stacionárius megoldás meghatározása	138
3.4.2.	Erő- vagy nyomatékgerjesztett rendszerek stacionárius megoldása	140
3.4.3.	Rezonancia és antirezonancia	144
3.4.4.	A mátrix együtthatós differenciálegyenlet időfüggő kényszerek esetén	147
3.4.5.	Giroszkópikus mátrix	154
3.5.	Rudak hajlítólengései	157
3.6.	Tengelyek kritikus fordulatszámja	161
3.6.1.	Egy szabadsági fokú modell	161
3.6.2.	Jeffcott-rotor	164
	Tárgymutató	169
	Felhasznált és ajánlott irodalom	173

Jelölésjegyzék

A	Amplitúdó
\mathbf{A}	Lengéskép vektor
$B_{1,2}$	Komplex értékű együtthatók a mozgástörvényben
$C_{1,2}$	Valós értékű együtthatók a mozgástörvényben
\mathbf{C}	Csillapítási mátrix
\mathbf{D}_A	A pontra számított kinetikai nyomaték
\mathcal{D}	Disszipatív potenciál (Rayleigh-féle függvény)
E	Mechanikai energia
\mathbf{E}	Egységmátrix
\mathbf{F}	Erővektor általában
\mathbf{F}_N	Normálerő
\mathbf{F}_S	Súrlódási erő
\mathbf{I}	Impulzus (lendület)
K	Ütközés lökésközpontja
\mathbf{K}	Merevségi mátrix
\mathbf{M}_A	A pontra számított nyomaték
N	Nagyítási függvény, nagyítás
P	Teljesítmény
Q_i	Az általános erő i -edik komponense
S	Súlypont
T	Ütközés talppontja
T	Kinetikus energia
T_n	Csillapítatlan rendszer lengésének periódusideje

T_d	Csillapított rendszer lengésének periódusideje
U	Potenciális energia
\mathbf{W}	Rugóállandó mátrix
\mathbf{a}_A	Merev test A pontjának gyorsulása
\mathbf{c}_{S1}	Az (1) test súlypontjának ütközés előtti sebessége
c	Csillapítási tényező
e	Ütközési tényező
f_0	Statikus kitérés (statikus deformáció)
f_n	Csillapítatlan rendszer sajátfrekvenciája
g	Nehézségi gyorsulás
k	Merevség
k_t	Torziós merevség
m	Tömeg
m_K	A K lökés középpontba redukált tömeg
m_T	A T talppontba redukált tömeg
\mathbf{n}	Ütközési normális
q_i	i -edik általános koordináta
r	Excentricitás
\mathbf{r}_{AB}	A -ból B pontba mutató helyvektor
\mathbf{v}	Sebességvektor általában
\mathbf{v}_A	Merev test A pontjának sebessége
\mathbf{v}_{S1}	Az (1) test súlypontjának ütközés utáni sebessége
v_0	Kezdeti sebesség
w	Rugóállandó
w_t	Torziós rugóállandó
x_0	Kezdeti kitérés
$\mathbf{\Pi}_S$	Súlypontra számított perdület
Θ_z	z tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték

Ω	Szögsebességvektor ütközés előtt
ε	Szöggyorsulásvektor
ε	Fázisszög
φ	Szög általában vagy szögelfordulás
λ	Karakterisztikus gyök vagy frekvenciahányados (hangolás)
μ	Súrlódási tényező
θ	Fáziskésés (fázisszög)
ω	Szögsebességvektor
ω	Gerjesztés körfrekvenciája
ω_n	Csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája
ω_d	Csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája
ζ	Relatív (Lehr-féle) csillapítási tényező

Előszó

Ez a kiadvány elsősorban gépészmérnök hallgatóknak kíván segítséget nyújtani a rezgés tan alapvető összefüggéseinek és módszereinek ismertetésével. Az itt közölt tananyagot a BME Gépészmérnöki Karán alapképzésben oktatott Rezgés tan illetve az öt éves egyetemi képzésben oktatott Lengés tan tantárgyak tematikája és 2012-ben megjelent "A műszaki rezgés tan alapjai" című jegyzetünk alapján állítottuk össze. Jelentős mértékben kiegészítettük és átírtuk a korábban megfogalmazott szövegrészeket, mert abban – terjedelmi korlátok miatt – nem volt lehetőségünk minden részletkérdés tisztázására. Fontos különbség az is, hogy ebben a kötetben az angolszász szakirodalomban leginkább elfogadott jelöléseket alkalmazzuk. A jegyzet írása során a gépészmérnöki gyakorlat számára legfontosabb témakörökre helyeztük a hangsúlyt. Bízunk abban, hogy mind a hallgatók, mind az esetleg érdeklődő szakemberek haszonnal forgatják majd ezt a könyvet.

Ezúton mondunk köszönetet Takács Dénesnek, elsősorban az ábrák átgondolt, pontos és esztétikus megrajzolásáért, de azért is, mert mindig számíthattunk hasznos, lényeglátó megjegyzéseire.

Köszönetet mondunk a BME Műszaki Mechanikai Tanszéken dolgozó kollégáinknak is, akik a tantárgy oktatása során folyamatosan segítették a tananyag alakulását, fejlődését.

Csernák Gábor, Stépán Gábor

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A Rezgés tan jelentősége

A Rezgés tan tantárgy célja a mechanikai rendszerekben előforduló ismétlődő mozgások vizsgálata. Ez a tudományterület kiemelt fontosságú a gépészmérnöki gyakorlatban:

- A legkézenfekvőbb alkalmazási terület a rugalmas felfüggesztések, ezen belül is a járművek rezgéseinek dinamikai vizsgálata.
- Rezgés tan ismeretek a szilárdsági méretezéshez is szükségesek fáradásos igénybevételek esetén.
- A gépalapozások tervezése, precíziós műszerek, egyéb szerkezetek rezgés szigetelése is egyszerű rezgés tan modelleken alapul.
- A gépek karbantartása, ellenőrzése is történhet ún. rezgés felügyelet alapján – ennek egyszerű hétköznapi példája, hogy a meghibásodás gyakran felismerhető a gép hangjának megváltozásáról.

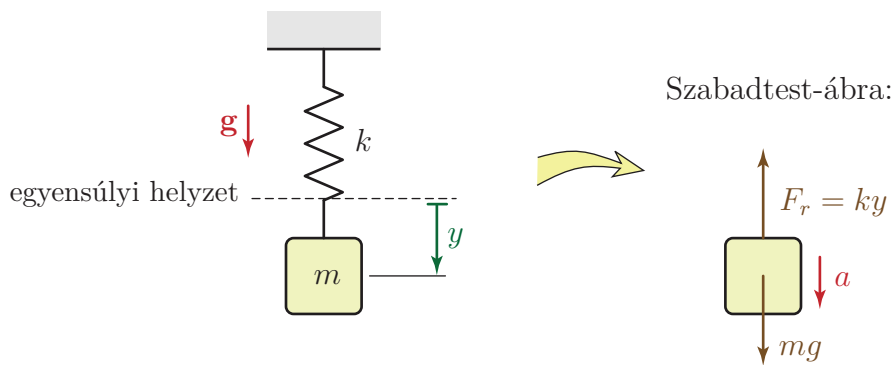
A rezgés tan – mint tudomány¹ – jelentősége azonban messze túlmutat a mechanikán. Az alábbiakban felsorolunk néhány olyan területet, ahol alkalmazhatóak a rezgés tan eredményei:

- Az elektromágneses rezgőköröket ugyanolyan jellegű differenciálegyenletek írják le, mint a mechanikai lengőrendszereket.
- A lineáris szabályozások (pl. PD szabályozás) működése is tárgyalható a rezgés tan megközelítési módját használva.
- A hangok forrása is rezgés.
- A molekulák, kristályok első közelítésben modellezhetők rugókkal összekapcsolt tömegpontokként – ez a modell többek között a fajhő számítására is használható.

A Rezgés tan tananyag elsajátításához szilárdan megalapozott előismeretek szükségesek. Tekintsük át egy egyszerű példán keresztül, hogy a mechanika és a matematika mely eredményeire támaszkodunk a lengőrendszerek vizsgálata során!

Az 1.1. ábrán egy rugóra függesztett hasáb látható. Ha kísérleteket végzünk egy ilyen mechanikai rendszerrel, a következőket állapíthatjuk meg:

¹Itt és a következőkben a tantárgy nevét nagy, a tudományterület nevét kis kezdőbetűvel írjuk.



1.1. ábra. Egy egyszerű lengőrendszer.

1. Található egy egyensúlyi helyzet, melyben a rendszer mozdulatlan, a rugó pedig megnyúlik a hasáb súlya következtében.
2. Ez az egyensúlyi helyzet stabil, hiszen akár felfelé, akár lefelé térítjük ki a testet, a rá ható erők eredője mindig a kitéréssel ellentétes értelmű, az egyensúlyi helyzet felé mutat.
3. Ha kitérített helyzetéből elengedjük a lengőrendszert vagy megütjük a hasábot, akkor az rezgő mozgásba kezd. Ez a mozgás a stabil egyensúlyi helyzet körül szimmetrikusan történik.

A fenti megfigyelések rávilágítanak arra, hogy a vázolt lengőrendszer vizsgálatához a mechanika három alapvető részterületének ismerete is szükséges:

- a stabil egyensúlyi helyzet meghatározásához a *statika* tételeit,
- a rugalmas elem deformációja és az azt okozó erő közötti kapcsolat (rugómerevség) meghatározásához a *szilárdságtan* eredményeit,
- a mozgás leírásához pedig a *dinamika* alaptételét használjuk.

A rezgéstani feladatok megoldása során a cél nem csupán a mozgás jellemzőinek egy adott pillanatban való meghatározása (tipikusan ezzel foglalkoznak a Dinamika tantárgy keretében), hanem a mozgás *folyamatának* leírása alkalmas függvényekkel. Ehhez a matematika számos területén is járatosnak kell lenni:

- A rezgéstanban a dinamika alaptételét *differenciálegyenlet* alakjában írjuk fel, ezt nevezük *mozgásegyenletnek*.
- A mozgásegyenlet megoldása a *mozgástörvény*. Ún. *harmonikus rezgések* esetén (ha lineáris a differenciálegyenlet), *exponenciális* és *trigonometrikus függvényekkel* írható le a mozgás.
- A mozgásegyenlet felírása néha elég bonyolult feladat a dinamika alaptétele segítségével – elsősorban akkor, ha több összekapcsolt testből áll a vizsgált rendszer (mint például egy forgattyús mechanizmus), vagy általános térbeli mozgást végez a test (például egy pörgettyű) [5]. Az ún. *másodfajú Lagrange-egyenlet* megkönnyíti a mozgásegyenlet

felírását. Ennek alkalmazásához azonban szükséges a *kinematika* ismerete, a *kinetikus és potenciális energia* megfelelő kifejezése és a *tehetetlenségi nyomaték* számítása, valamint helyesen kell alkalmazni a *differenciálási szabályokat* (pl. összetett függvény deriválása).

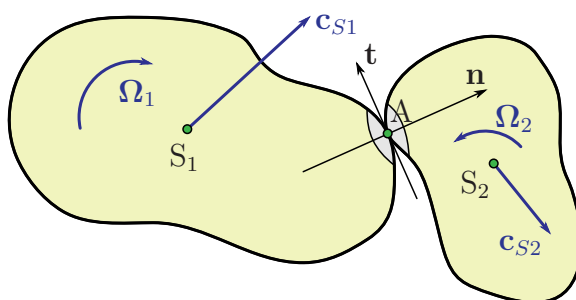
A fenti példában láthattuk, hogy mozgás (rezgés) csak akkor jön létre, ha kitérítjük a rendszert a stabil egyensúlyi helyzetéből és/vagy kezdeti sebességet adunk a rezgő mozgásra képes testnek. Ez utóbbi gyakran ütközéssel érhető el. Az ütközés tárgyalása azért is illeszkedik jól a Rezgés tananyagába, mert a következő, 1.2. fejezetben bemutatandó ütközési modell a rezgés taneszköztárát felhasználva pontosítható – ezt a részletesebb modellt a 2.3.6. fejezetben mutatjuk be.

1.2. Ütközés

1.2.1. Ütközési modell, alapfeltevések

Az ütközés során megváltozik az ütköző testek sebességállapota. A legegyszerűbb modell – amit ebben a fejezetben ismertetünk (1.2. ábra) – nem foglalkozik az ütközés időtartama alatt lejátszódó folyamatokkal, csak egy számítási algoritmust ad, mellyel az ütközés előtti sebességállapot és az ütközést jellemző e ütközési tényező ismeretében kiszámítható az ütközésben résztvevő testek ütközés utáni sebességállapota. Csak két test ütközésével foglalkozunk, azaz kizárjuk azt az esetet, amikor három vagy több test egyszerre vesz részt az ütközésben.

A továbbiakban $[\Omega_1; \mathbf{c}_{S1}]_{S1}$ és $[\Omega_2; \mathbf{c}_{S2}]_{S2}$ a két test ütközés *előtti*, míg $[\omega_1; \mathbf{v}_{S1}]_{S1}$ és $[\omega_2; \mathbf{v}_{S2}]_{S2}$ a testek ütközés *utáni* sebességállapotát jellemző vektorkettősöket jelöli, ahol S_1 és S_2 a két test súlypontja. Akkor jöhet létre ütközés, ha a két test érintkezik és a testek érintkezési pontjainak a sebessége eltérő.



1.2. ábra. Két test ütközése. Az ábrán a testek ütközés előtti sebességállapotát ábrázoltuk; \mathbf{t} a közös érintő egységvektora, \mathbf{n} pedig az érintőre merőleges ütközési normálist jelöli.

A modell felállítása során az alábbi feltevésekből indulunk ki:

1. Az ütközés olyan rövid idő alatt játszódik le, hogy a testek közben nem mozdulnak el (három vagy több szabadon mozgó test együttes ütközését is ezért zárjuk ki).

1.1. megjegyzés: Három test együttes ütközése például akkor valósulhat meg, ha egy test csuklósan kapcsolódik a környezethez és úgy ütközik egy másik testtel. Ebben az

esetben elképzelhető, hogy a csuklós kapcsolatban is ütközések játszódnak le. Több test egyszerre történő ütközését gyakran két test közötti ütközések sorozatával modellezzük.♣

2. Az ütközés során olyan nagy erők lépnek fel, hogy közben minden más erő elhanyagolható. Kivételt képezhetnek a test valamely pontját a helytálló környezethez rögzítő kényszerekben ébredő reakcióerők.
3. Az ütköző testek az érintkezési pont környékén (lokálisan) deformálódnak. Ettől a ponttól távolabb már elhanyagolhatónak tekintjük a deformációkat, ezért alkalmazhatjuk a sebességállapot számítására a merev testek kinematikája keretében tanult összefüggéseket. A tehetetlenségi nyomaték változását is elhanyagoljuk, ugyanebből az okból.
4. Az ütközést az e *ütközési tényezővel* jellemezzük, amiből következtetni lehet az ütközés során bekövetkező mechanikai energiaveszteségre. Az ütközési tényező a testek anyagi tulajdonságaitól és az ütközés körülményeitől függően a következő értékeket veheti fel:
 - rugalmas testek: $e = 1$, tökéletesen rugalmas ütközés,
 - képlékeny testek: $e = 0$, tökéletesen rugalmatlan ütközés,
 - részben rugalmasan, részben képlékenyen deformálódó testek: $0 < e < 1$.

Az ütközés során fellépő erők nagyságát nem vizsgáljuk ebben a modellben, azonban maga az ütközési tényező függhet az átadódó erő nagyságától. Gondoljunk például egy gépkocsi karosszériájára, mely kis erők hatására rugalmasan, nagy erők hatására képlékenyen deformálódik (behorpad).

5. Az érintkezési pontban fellépő súrlódási erőt elhanyagoljuk. Ebből az következik, hogy nem adódik át erő a közös érintősíkkal párhuzamosan, csak az érintősíkra merőleges \mathbf{n} *ütközési normális* irányában. Feltesszük, hogy az ütközés ideje alatt ez az irány nem változik meg. Sima felszínű testek vagy egy sima és egy „csúcsos” (éles) felszínű test közös érintősíkja egyértelműen meghatározható az érintkezési pontban. Két csúcs érintkezése – ahol nem definiálható a közös érintő – csak nulla valószínűséggel következhet be.
6. Síkbeli ütközésekre korlátozódunk, tehát feltesszük, hogy
 - a síkmozgás feltételét kényszer biztosítja *vagy*
 - az ütközési normális mindkét test súlyponti tehetetlenségi fősíkjába² esik, és a testek az ütközés előtt is ezzel a síkkal párhuzamos síkmozgást végeznek.

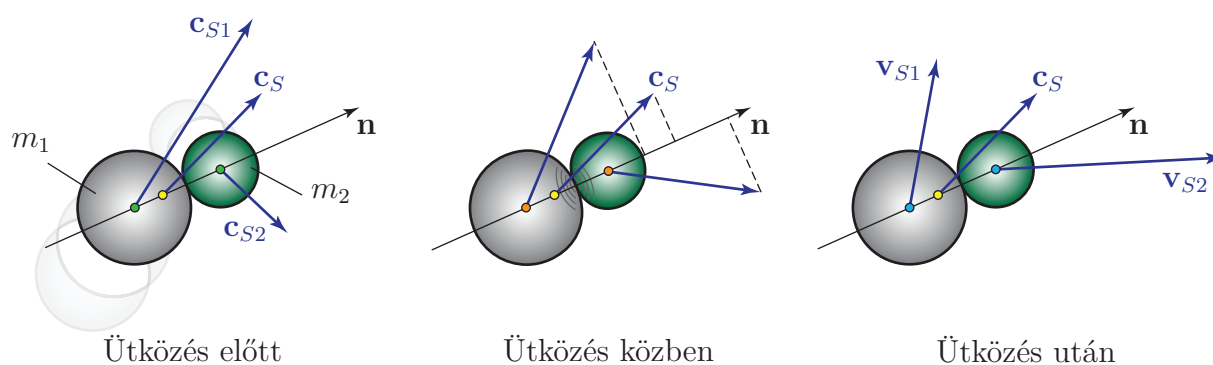
Az ütközés utáni sebességállapot számítási algoritmusok különböző ütközéstípusok esetén más és más lehet. Fontos, hogy még egymással ütköző testek esetében is előfordulhat, hogy a két test szempontjából különböző típusú az ütközés! A legegyszerűbb ütközéstípus a *centrikus ütközés*, az összes többi ütközési problémát is erre vezetjük vissza.

²A tehetetlenségi fősík két főtehetlenségi irány által kifeszített sík. A harmadik főirány erre a síkra merőleges, ugyanúgy, mint az ütközés során átadódó nyomaték. Így a feltevésből következően mind kinematikai, mind dinamikai értelemben síkmozgást végez az ütköző test.

1.2.2. Centrikus ütközés

Egy test szempontjából centrikus az ütközés, ha a test mozgását kényszerek nem korlátozzák (szabad mozgást végez), és a súlypontja rajta van az ütközési normális hatásvonalán.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor mindkét test szempontjából centrikus az ütközés! Ilyen pl. két szabadon mozgó homogén golyó vagy korong ütközése, amit az 1.3. ábra szemléltet.



1.3. ábra. Két golyó ütközése. Csak az \mathbf{n} irányú sebességkomponensek változnak, a közös súlypont \mathbf{c}_S sebessége állandó marad, azaz $\mathbf{c}_S = \mathbf{v}_S$.

Mivel az ütközés erejéhez képest minden más erő elhanyagolható, az ütközés ereje pedig belső erő, két test centrikus ütközése során a teljes impulzus (lendület) megmarad:

$$\mathbf{I}_{\text{utána}} = \mathbf{I}_{\text{előtte}} \Rightarrow m_1 \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2} = m_1 \mathbf{c}_{S1} + m_2 \mathbf{c}_{S2}. \quad (1.1)$$

A két testből álló rendszer közös súlypontjának helyvektora definíció szerint

$$\mathbf{r}_S = \frac{m_1 \mathbf{r}_{S1} + m_2 \mathbf{r}_{S2}}{m_1 + m_2},$$

tehát a közös súlypont sebessége az ütközés előtt, illetve az ütközés után ennek idő szerinti differenciálásával kapható:

$$\mathbf{c}_S = \frac{m_1 \mathbf{c}_{S1} + m_2 \mathbf{c}_{S2}}{m_1 + m_2} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_S = \frac{m_1 \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2}}{m_1 + m_2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{c}_S(m_1 + m_2) = m_1 \mathbf{c}_{S1} + m_2 \mathbf{c}_{S2} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_S(m_1 + m_2) = m_1 \mathbf{v}_{S1} + m_2 \mathbf{v}_{S2}. \quad (1.2)$$

A fenti képleteket összevetve az impulzusmegmaradást kifejező (1.1) egyenlettel, arra jutunk, hogy a két test közös súlypontjának a sebessége nem változik az ütközés során:

$$\mathbf{c}_S = \mathbf{v}_S. \quad (1.3)$$

Az ütköző testekre ható erő nem ismert. Feltéve, hogy ennek az erőnek a nagysága egy $F(t)$ függvény szerint változik, és az ütközés a t_0 pillanattól a $t_0 + \tau$ pillanatig tart, az egyes

testek impulzusának megváltozása – ami szintén párhuzamos az \mathbf{n} ütközési normálissal az 5. feltevés miatt – az *erőimpulzussal* vagy más néven *erőlökéssel* fejezhető ki:

$$\Delta \mathbf{I}_1 \equiv m_1 \mathbf{v}_{S1} - m_1 \mathbf{c}_{S1} = -\mathbf{n} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F dt \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{I}_2 \equiv m_2 \mathbf{v}_{S2} - m_2 \mathbf{c}_{S2} = \mathbf{n} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F dt. \quad (1.4)$$

A fenti egyenlet felírása során feltételeztük, hogy az \mathbf{n} ütközési normális az 1-es test felől a 2-es test felé mutat. Természetesen fordított irányban is felvehető az ütközési normális; az \mathbf{n} vektor tulajdonképpen a sebességek számításához használt koordinátatengelyt definiálja. Az ütközés erejének hatásvonalja egybeesik az \mathbf{n} ütközési normális hatásvonalával, ezért a testek súlypontjainak \mathbf{n} irányú sebességkomponensei ($v_{S1}^{(n)}$ és $v_{S2}^{(n)}$) megváltoznak. Centrikus ütközés esetén a súlypontok rajta vannak \mathbf{n} hatásvonalán, tehát az ütközés során fellépő erő nyomatéka mindkét test súlypontjára nulla. Mivel a modellben elhanyagolhatónak tekintjük az ütközés ideje alatt ható más erőket, a testek perdülete megmarad, az ütközés utáni $\boldsymbol{\omega}_{1,2}$ szögsebességek megegyeznek az ütközés előttiéikkel: $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_2$.

A kísérleti tapasztalatok szerint a súlypontok sebességeinek \mathbf{n} irányú komponenseiből képzett

$$e \equiv \frac{v_{S1}^{(n)} - v_S^{(n)}}{v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)}} = \frac{v_{S2}^{(n)} - v_S^{(n)}}{v_S^{(n)} - c_{S2}^{(n)}} \quad (1.5)$$

ütközési tényező egy adott anyagpárra mindig közelítőleg ugyanakkora értékű³, bármelyik test sebességeit helyettesítjük is be. Itt $c_{Si}^{(n)}$ és $v_{Si}^{(n)}$ ($i = 1, 2$) a két test S_1 illetve S_2 súlypontjának \mathbf{n} irányú sebességkomponensét jelöli az ütközés előtt és után, míg $v_S^{(n)} = c_S^{(n)}$ a közös súlypont sebességének \mathbf{n} irányú komponense.

Az ütközési tényezőnek egy adott anyagpárra történő kísérleti meghatározása után az ilyen anyagokból készült testek ütközés utáni sebessége az alábbi képletekkel számítható:

$$\begin{aligned} v_{S1}^{(n)} &= v_S^{(n)} + e(v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)}) \quad \text{és} \\ v_{S2}^{(n)} &= v_S^{(n)} + e(v_S^{(n)} - c_{S2}^{(n)}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

A fenti képletek alapján a következő módon képzelhetjük el az ütközés folyamatát: a testek az ütközés első szakaszában benyomódnak, és sebességük normális komponense megváltozik. Ez addig tart, amíg el nem éri a közös súlypont $v_S^{(n)}$ sebességét, azaz sebességváltozásuk ezalatt $v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)}$ illetve $v_S^{(n)} - c_{S2}^{(n)}$.

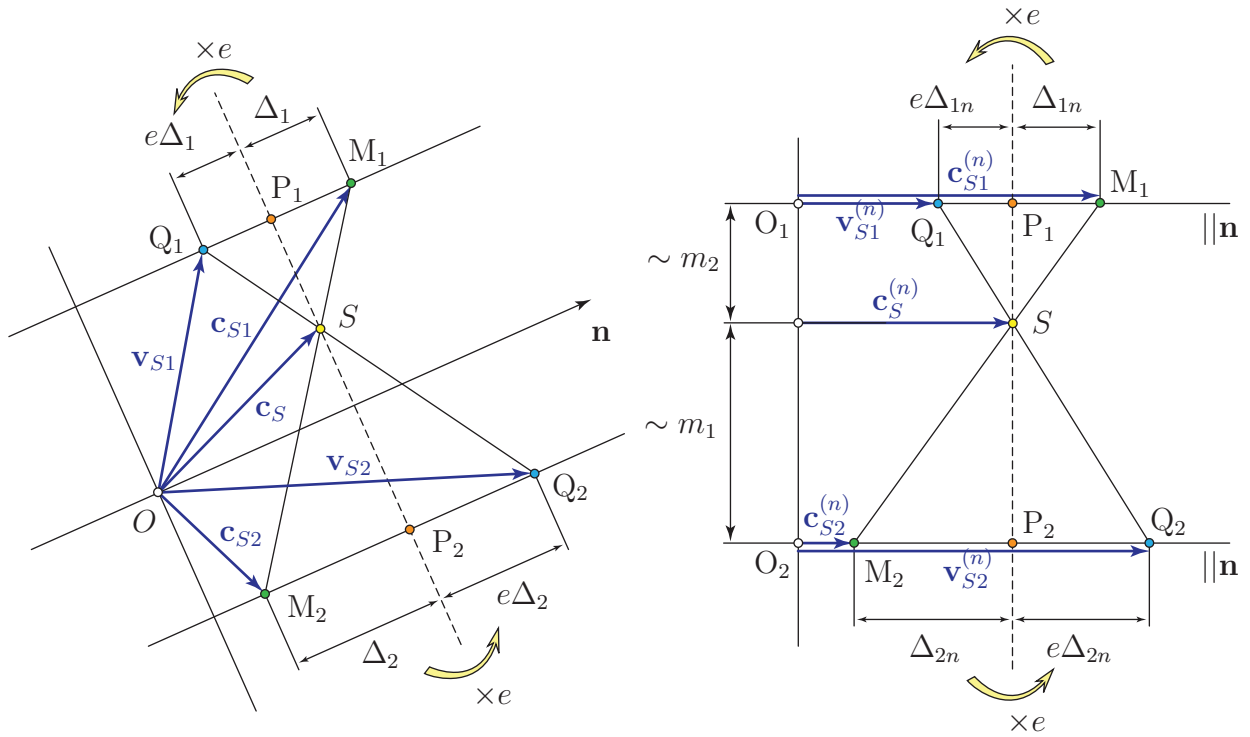
Az ütközés második szakaszában a benyomódott testek részben visszanyerik eredeti alakjukat. Mivel a testek között az ütközés teljes időtartama alatt csak nyomóerő hathat, a sebességük továbbra is ugyanolyan értelemben változik (növekszik vagy csökken), mint az ütközés első szakaszában, de a nem tökéletesen rugalmas deformáció miatt már nem következik be ugyanakkora sebességváltozás, csak annak az $e \leq 1$ -szerese.

Maxwell-ábrák

Az (1.6) képletek megjegyzése helyett javasolt egy egyszerűen áttekinthető grafikus szerkesztési eljárás alkalmazása, az ún. *Maxwell-ábra* rajzolása. A Maxwell-ábra nagy előnye, hogy szemléletesen ábrázolja az ütközés két szakaszában lejátszódó folyamatokat.

A szerkesztés lépései az 1.4. ábra alapján a következők:

³Az ütközési tényező számos tényezőtől függhet (például az ütköző testek sebességkülönbségétől, az érintkezési pont környezetében fellépő mechanikai feszültségek nagyságától), de ezt sok esetben elhanyagolhatjuk.



1.4. ábra. Maxwell-ábra és egyszerűsített Maxwell-ábra szerkesztése.

- Felvesszük az \mathbf{n} ütközési normálist, és egy O pontjából (mint origóból) felmérjük a súlypontok ütközés előtti sebességvektorait: \mathbf{c}_{S1} , \mathbf{c}_{S2} . A vektorok végpontjait M_1 -gyel és M_2 -vel jelöljük.
- (1.2) alapján kiszámítjuk a közös súlypont $\mathbf{c}_S \equiv \mathbf{v}_S$ sebességét, és szintén berajzoljuk az ábrába. A vektor végpontja az S pont.
- A \mathbf{c}_{S1} és \mathbf{c}_{S2} vektorok M_1 és M_2 végpontjain át párhuzamosokat húzunk \mathbf{n} -nel, az S ponton keresztül pedig merőlegest állítunk \mathbf{n} -re. A behúzott egyenesek metszéspontjait jelöljük P_1 -gyel és P_2 -vel.
- Az ütközés során a sebességvektorok \mathbf{n} -re merőleges irányú komponensei nem változhatnak, tehát az ütközés utáni sebességvektorok végpontjai is rajta lesznek az \mathbf{n} -nel párhuzamos egyeneseken, a Q_1 és Q_2 pontokban. Mivel $\overline{P_1M_1} = v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)}$ és $\overline{Q_1P_1} = v_{S1}^{(n)} - v_S^{(n)}$, az ütközési tényező értelmezése alapján $\overline{Q_1P_1} = e \overline{P_1M_1}$ és $\overline{Q_2P_2} = e \overline{P_2M_2}$, tehát az ütközés utáni sebességvektorok végpontjai meghatározhatók.

Feltevéseink szerint a sebességvektoroknak csak az \mathbf{n} irányú komponensei változnak, ezért gyakran csak egy *egyszerűsített Maxwell-ábrát* rajzolnak. Ehhez két segédegyenest kell rajzolni az \mathbf{n} ütközési normállal párhuzamosan, melyeken a két test megfelelő sebességkomponenseit tüntetjük fel. A szerkesztés lépései megegyeznek az általános eset lépéseivel. Ha a két segédegyenes \mathbf{n} -től mért távolsága arányos az m_1 és m_2 tömegekkel, és a $c_{S1}^{(n)}$, $v_{S1}^{(n)}$ sebességeket az m_2 -vel (!) arányos távolságban felvett egyenesre, a $c_{S2}^{(n)}$, $v_{S2}^{(n)}$ sebességeket pedig az m_1 -gyel arányos távolságban felvett egyenesre rajzoljuk fel, akkor az ütközés előtti- és

utáni sebességvektorok végpontjait összekötő egyenesek éppen a közös súlypont sebességét megadó vektor S végpontjában metsződnek.

A fejezetben ismertett eljárások akkor is használhatók, ha az ütközésben részt vevő egyik test tömegét végtelenül nagyra tekinthetjük – például ha falnak vagy a talajnak ütközik egy test. Ekkor a nagy tömegű test sebessége nem változik, sőt, annak az ütközés előtti sebességével egyezik meg a közös súlypont sebessége. Ebben az esetben akár el is hagyható a Maxwell-ábrának a végtelen tömegű testre vonatkozó része. Például az 1.5. ábrán egy ilyen esetet láthatunk, ahol $m_2 \rightarrow \infty$, ezért $O_2 \equiv S \equiv Q_2$.

Az ütközési tényező mérése

Az ütközési tényező méréséhez lapot és m_1 tömegű golyót készítünk az ütköző testek anyagából. A lapot végtelen nagy m_2 tömegűnek tekinthető alapra helyezzük és a golyót H magasságból leejtjük, mely h magassáig pattan vissza, az 1.5. ábrának megfelelően.

A munkatétel alapján

$$m_1 g H = \frac{1}{2} m_1 c_1^2, \quad (1.7)$$

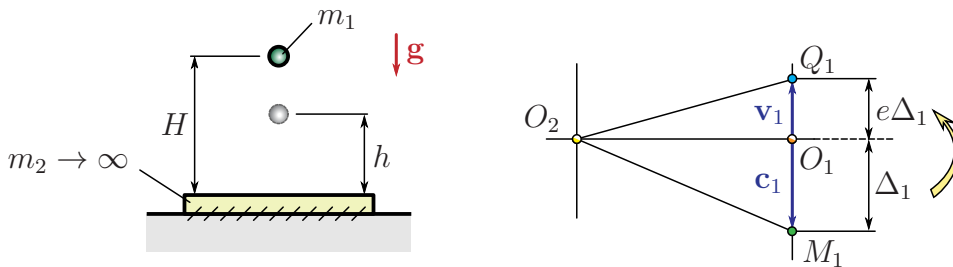
amiből a golyó becsapódásának sebessége $|c_1| = \sqrt{2gH}$. Ehhez hasonlóan, a visszapattanás sebessége $|v_1| = \sqrt{2gh}$.

Mivel az álló alap tömegét végtelen nagyra tekintjük ($m_2 \approx \infty$ és $c_2 = 0$), a közös súlypont sebessége is nulla: $v_S = 0$. Felhasználva az (1.6) képletet, a golyó visszapattanásának sebessége kifejezhető az ütközési tényezővel is:

$$v_1 = 0 + e(0 - c_1) = -ec_1, \quad (1.8)$$

azaz

$$e = \frac{|v_1|}{|c_1|} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (1.9)$$



1.5. ábra. Az ütközési tényező mérésének egy lehetséges módja, és az ütközés Maxwell-ábrája.

1.2. megjegyzés: A golyó leesésének ideje a magasság gyökével arányos:

$$\frac{1}{2} g t_H^2 = H \quad \Rightarrow \quad t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad (1.10)$$

és hasonlóan számítható a felpattanás t_h ideje is. Ebből következik, hogy a leesés és a rákövetkező felpattanás idejének aránya az ütközési tényezővel egyenlő:

$$\frac{t_h}{t_H} = \sqrt{\frac{h}{H}} = e. \quad (1.11)$$

A felpattanás után újra leesik a test, ami szintén t_h ideig tart. Az egymás utáni idők mértani sorozatot alkotnak, e hányadossal. Figyelembe véve, hogy a leesés ideje t_H , az utána következő i -edik felpattanás és újabb leesés együttes ideje pedig $2t_H e^i$, a modell szerint végtelen sok ütközés játszódik le véges idő alatt⁴:

$$t_{\text{össz}} = \sum_{i=1}^{\infty} 2t_H e^i + t_H = 2t_H \frac{1}{1-e} + t_H. \quad (1.12)$$

Ezt a jelenséget tapasztalhatjuk, amikor ping-pong labdát pattogtatunk egy asztalon: a folyamat végén jól hallhatóan sűrűsödnek az ütközések. ♣

Speciális esetek

Érdeemes megvizsgálni a tökéletesen rugalmas ($e = 1$) és a tökéletesen rugalmatlan ($e = 0$) ütközések eseteit az (1.6) képletek alapján.

- Ha $e = 1$, akkor

$$\begin{aligned} v_{S1}^{(n)} &= v_S^{(n)} + (v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)}) \equiv 2v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)} \quad \text{és} \\ v_{S2}^{(n)} &= 2v_S^{(n)} - c_{S2}^{(n)}. \end{aligned}$$

Következésképpen tökéletesen rugalmas ütközés esetén

$$v_{S1}^{(n)} - v_{S2}^{(n)} = c_{S2}^{(n)} - c_{S1}^{(n)}, \quad (1.13)$$

azaz a két test ütközés előtti és utáni relatív sebessége ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú.

Ha a két tökéletesen rugalmas test *tömege* egyenlő, akkor (1.2) miatt $v_S^{(n)} = (c_{S1}^{(n)} + c_{S2}^{(n)})/2$, amiből $v_{S1}^{(n)} = c_{S2}^{(n)}$ illetve $v_{S2}^{(n)} = c_{S1}^{(n)}$. Tehát ebben a speciális esetben a két test sebességet cserél.

- Ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan, azaz $e = 0$, akkor

$$\begin{aligned} v_{S1}^{(n)} &= v_S^{(n)} + 0(v_S^{(n)} - c_{S1}^{(n)}) \equiv v_S^{(n)} \quad \text{és} \\ v_{S2}^{(n)} &= v_S^{(n)}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy mindkét test ütközés utáni sebessége megegyezik a közös súlypont sebességével, a két test szorosan egymás mellett marad.

Fontos speciális eset az ún. *egyenes ütközés* esete, amikor a súlypontok sebességének nincs érintő irányú összetevője, azaz pl. $c_{S1} = c_{S1}^{(n)}$ és $v_S = v_S^{(n)}$. Ekkor a testek ütközés előtti kinetikus energiája összesen

$$T_e = \frac{1}{2} (m_1 c_{S1}^2 + m_2 c_{S2}^2), \quad (1.14)$$

a tökéletesen rugalmatlan ütközés után pedig

$$T_u = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_S^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{(m_1 c_{S1} + m_2 c_{S2})^2}{(m_1 + m_2)}. \quad (1.15)$$

⁴Ezt Zeno-féle viselkedésnek nevezik.

A fenti két egyenlet alapján meghatározható az ütközés során bekövetkező energiavesztés:

$$\Delta E = T_u - T_e = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_{S1} - c_{S2})^2. \quad (1.16)$$

Ebből a képletből látható, hogy ha a 2-es indexű test az ütközés előtt nyugalomban volt ($c_{S2} = 0$), akkor

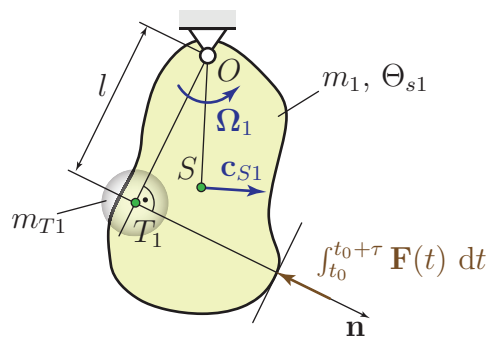
$$\Delta E = T_u - T_e = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} m_1 c_{S1}^2 \equiv -\frac{m_2}{m_1 + m_2} T_e. \quad (1.17)$$

Ez az energia részben a testek melegedését idézi elő, részben azok maradó alakváltozására fordítódik. Arra következtethetünk, hogy a maradó alakváltozásra jutó energia a testek tömegarányától függ, amit a műszaki alkalmazásokban a célnak megfelelően választhatunk meg. Például kovácsoláskor a munkadarab deformációjára szeretnénk fordítani az ütközés előtti mozgási energia minél nagyobb részét. Mivel a munkadarab tömege általában nem változtatható, azt nagy tömegű üllőre helyezik, így ezek együttes m_2 tömege már megfelelően nagy lesz a kalapács (illetve gépi kovácsolás esetén az ún. medve) m_1 tömegéhez képest.

1.2.3. Álló tengely körül elforduló test ütközése

Számos ütközési problémában az egyik – vagy mindkettő – test egy rögzített tengely körül képes elfordulni. Ebben az esetben nem alkalmazható közvetlenül az (1.6) képlet, hiszen az ütközés során a csuklóban is az ütközési erőnek megfelelő nagyságrendű erő alakulhat ki, ami nem hagyható figyelmen kívül. Ezt az esetet is szeretnénk visszavezetni centrikus ütközésre.

Tegyük fel, hogy a vizsgált test az O csukló körül tud elfordulni! Ütközés előtti szögsebessége Ω_1 – ez meghatározza sebességállapotát, hiszen $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ –, az O ponton átmenő, Ω_1 -gyel párhuzamos tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka pedig Θ_{o1} . Célunk az ütközés utáni szögsebesség meghatározása.



1.6. ábra. Álló tengely körül elforduló test ütközése.

Az ütközésben részt vevő másik testről $\mathbf{F}(t)$ erő adódik át az ütközés τ ideje alatt, az 1.6. ábrának megfelelően. Ennek az erőnek az O pontra számított nyomatéklökése (nyomatékipulzusa) $-l \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt$, ahol l az $\mathbf{F}(t)$ erő hatásvonalának (az \mathbf{n} ütközési normális egyenesének) az O csuklótól mért távolsága. A negatív előjel annak felel meg, hogy az 1.6. ábrán az Ω_1 szögsebességgel ellentétes a nyomatéklökés iránya. A perdülettel miatt az O

pontra számított perdület megváltozása egyenlő a nyomatékklökéssel, azaz

$$\Delta \Pi_{o1} \equiv \Theta_{o1} \omega_1 - \Theta_{o1} \Omega_1 = -l \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt. \quad (1.18)$$

A levezetés egyszerűsítése érdekében vegyünk fel egy T_1 -gyel jelölt ún. *ütközési talppontot*, melyet az O pont \mathbf{n} -re történő merőleges vetítésével kapunk, tehát $OT_1 = l$. Az (1.18) egyenlet átírható a következő alakba:

$$\frac{\Theta_{o1}}{l^2} (l\omega_1) - \frac{\Theta_{o1}}{l^2} (l\Omega_1) = - \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt. \quad (1.19)$$

A zárójeles kifejezések a talppont ütközés előtti és utáni sebességét adják meg, hiszen $c_{T1} = l\Omega_1$ és $v_{T1} = l\omega_1$. Bevezetve az

$$m_{T1} = \frac{\Theta_{o1}}{l^2}$$

redukált tömeget, az

$$m_{T1} v_{T1} - m_{T1} c_{T1} = - \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt \quad (1.20)$$

egyenletre jutunk, ami ugyanolyan alakú, mint a centrikus ütközésre kapott (1.4) egyenletek. Ez alapján a talppont sebességváltozásának és az erőlökezésnek a kapcsolatát

$$v_{T1} - c_{T1} = - \frac{1}{m_{T1}} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt \quad (1.21)$$

alakban is felírhatjuk, ahol a redukált tömeg reciproka az erőlökezés együtthatója.

A fentiekből következően az álló tengely körül elforduló testet egy T_1 pontban lévő, m_{T1} tömegű pontszerű testtel helyettesíthetjük, ami már centrikusan ütközik. Ennek a helyettesítő testnek ugyanakkora az O pontra számított tehetetlenségi nyomatéka, mint a valódi testnek, ezért azt tökéletesen helyettesíti a perdülettételben. A kinematikai számítások során természetesen figyelembe kell vennünk azt is, hogy az O pont sebessége nulla marad.

A fentiek alapján a feladat megoldásának algoritmus a következő:

1. A T_1 talppont meghatározása: az O tengelytől merőlegest bocsátunk az \mathbf{n} ütközési normálisra.
2. Az $m_{T1} = \Theta_{o1}/l^2$ redukált tömeg meghatározása, ahol l a talppont távolsága a tengelytől.
3. A talppont ütközés előtti sebességének meghatározása: $c_{T1} = l\Omega_1$.
4. Ha a másik test is álló tengely körül tud elfordulni, akkor értelemszerűen meg kell határozni a megfelelő T_2 talppontját, m_{T2} redukált tömegét és a c_{T2} sebességet.
5. Most már visszavezettük a feladatot két m_{T1} illetve m_{T2} tömegű, \mathbf{c}_{T1} illetve \mathbf{c}_{T2} sebességű test centrikus ütközésére. A közös súlypont sebességét a

$$\mathbf{c}_S = \frac{m_{T1}\mathbf{c}_{T1} + m_{T2}\mathbf{c}_{T2}}{m_{T1} + m_{T2}}$$

képlet segítségével határozzuk meg.

6. A centrikus ütközési feladat megoldása Maxwell-ábrával vagy az (1.6) képlettel. Eredményként megkapjuk a talppont ütközés utáni \mathbf{v}_{T1} sebességét.
7. Az ütközés utáni szögsebesség számítása: $\omega_1 = v_{T1}/l$.

1.2.4. Excentrikus ütközés

Ha a test egyik pontja sem rögzített, és az ütközési normális nem megy át a test súlypontján, akkor az ütközés *excentrikus*. Ahogy korábban már említettük, ez a besorolás nem magát az ütközést, hanem az abban részt vevő test szerepét jellemzi. Például egy teniszütőnek csapódó teniszlabda szempontjából az ütközés centrikus, az ütő szempontjából pedig excentrikus. Egy hintára felugró kisgyerek esetében a hinta szempontjából álló tengely körül elforduló test ütközéséről, a kisgyerek szempontjából pedig excentrikus ütközésről beszélhetünk. A fentiek szerint a továbbiakban csak egy darab testre írjuk fel a megfelelő egyenleteket, így a fizikai mennyiségek indexeit is elhagyjuk. Síkbeli ütközésekre korlátozódunk, tehát feltesszük, hogy az ütközési normális a test súlyponti tehetetlenségi fősíkjába esik.

Ezúttal nincs a testnek rögzített pontja, ezért mind az impulzustételt, mind a súlypontra felírt perdület-tételt fel kell használnunk:

$$\Delta \mathbf{I} \equiv m \mathbf{v}_S - m \mathbf{c}_S = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(t) dt, \quad (1.22)$$

$$\Delta \mathbf{\Pi}_S \equiv \Theta_S \boldsymbol{\omega} - \Theta_S \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{r}_{SA} \times \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(t) dt \equiv \mathbf{r}_{SA} \times \Delta \mathbf{I}, \quad (1.23)$$

ahol \mathbf{r}_{SA} a súlypontból az $\mathbf{F}(t)$ erő A támadáspontjába mutató vektor, az 1.7. ábrának megfelelően. Ez az erő adódik át az ütközésben részt vevő másik testről. A fentiek szerint

$$\mathbf{v}_S - \mathbf{c}_S = \frac{1}{m} \Delta \mathbf{I} \quad \text{és} \quad (1.24)$$

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\Theta_s} \mathbf{r}_{SA} \times \Delta \mathbf{I}. \quad (1.25)$$

Most is hasonlóan járunk el, mint az álló tengely körül elforduló testek vizsgálata során: egy olyan, véges számú anyagi pontból álló helyettesítő testet keresünk, mellyel visszavezethető az ütközés a centrikus ütközés esetére⁵.

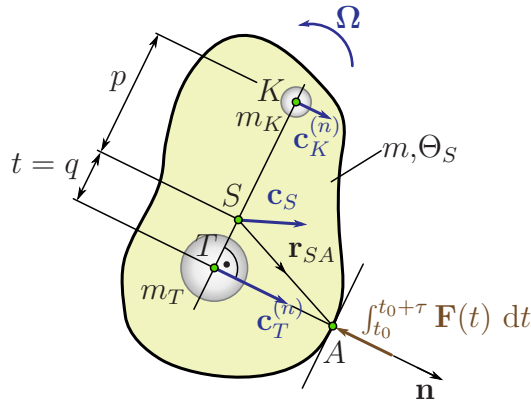
Első lépésben azonosítjuk a testnek azokat a pontjait, melyeknek a sebessége az átadódó $\Delta \mathbf{I}$ erő-lökéssel párhuzamosan, és annak nagyságával arányosan változik. Ezek közül fogunk kiválasztani egy megfelelő T pontot, amit most is ütközési talppontnak nevezünk. Az (1.21) képlethez hasonlóan, a T pont sebességváltozása és az erő-lökés közötti arányossági tényezőt $1/m_T$ -vel fogjuk jelölni, ahol m_T a redukált tömeg.

A keresett T pont ütközés előtti és utáni sebessége kifejezhető a súlypont sebességével és a szögsebességgel:

$$\mathbf{c}_T = \mathbf{c}_S + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{ST}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ST}. \quad (1.27)$$

⁵A keresett testet *diszkrét merev testnek* nevezhetjük [5] alapján.



1.7. ábra. Excentrikus ütközés. t és q az S súlypont távolságát jelöli a T talpponttól illetve az \mathbf{n} ütközési normálistól. A levezetés eredményeképpen kijön, hogy $t = q$. A K lökésközpont p távolságra van a súlyponttól.

Innen a sebesség megváltozása

$$\mathbf{v}_T - \mathbf{c}_T = \mathbf{v}_S - \mathbf{c}_S + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{r}_{ST}. \quad (1.28)$$

Az (1.24) és (1.25) egyenletek alapján

$$\mathbf{v}_T - \mathbf{c}_T = \frac{1}{m} \Delta \mathbf{I} + \frac{1}{\Theta_s} (\mathbf{r}_{SA} \times \Delta \mathbf{I}) \times \mathbf{r}_{ST}. \quad (1.29)$$

Ebből a kifejezésből látszik, hogy $\mathbf{r}_{SA} \parallel \Delta \mathbf{I}$ esetén – ami a centrikus ütközés esete – a fenti hármasszorzat nulla lenne és visszakapnánk az (1.24) képletet, azaz ekkor $T \equiv S$ lenne.

Ha valóban excentrikus ütközéssel állunk szemben, akkor $\mathbf{r}_{SA} \not\parallel \Delta \mathbf{I}$. Ekkor a hármasszorzatot kifejtve,

$$\mathbf{v}_T - \mathbf{c}_T = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\Theta_s} (\mathbf{r}_{SA} \mathbf{r}_{ST}) \right) \Delta \mathbf{I} - \frac{1}{\Theta_s} \mathbf{r}_{SA} (\mathbf{r}_{ST} \Delta \mathbf{I}). \quad (1.30)$$

Ez a kifejezés akkor lesz párhuzamos a $\Delta \mathbf{I}$ erőlökéssel, ha a második tag nulla, azaz ha $\mathbf{r}_{ST} \perp \Delta \mathbf{I}$. Mivel az erőlökés az ütközési normálissal párhuzamos, az ütközés talppontját a súlyponton átmenő, ütközési normálisra merőleges egyenesen kell keresnünk. A redukált tömeg reciproka definíció szerint a $\Delta \mathbf{I}$ együtthatója a sebességváltozást megadó (1.30) képletben, amiből

$$\frac{1}{m_T} = \frac{1}{m} + \frac{1}{\Theta_s} (\mathbf{r}_{SA} \mathbf{r}_{ST}) \Rightarrow m_T = \frac{m \Theta_s}{\Theta_s + m \mathbf{r}_{SA} \mathbf{r}_{ST}} = \frac{m \Theta_s}{\Theta_s + m q t}. \quad (1.31)$$

Itt t a talppont és a súlypont – egyelőre nem ismert – távolságát, q pedig az ütközési normális súlyponttól mért (ismert) távolságát adja meg (lásd 1.7. ábra).

A talppont helyének meghatározásához figyelembe kell vennünk, hogy egy szabadon mozgó merev test dinamikailag nem helyettesíthető egyetlen tömegponttal. Ezért egy olyan helyettesítő testet konstruálunk, ami két darab, m_T és m_K tömegű tömegpontból áll, úgy, hogy a teljes tömege, tehetetlenségi nyomatéka és súlypontjának helye is megegyezzen az eredeti testével. Egy ilyen test dinamikailag egyenértékű a síkmozgást végző eredeti testtel.

A helyettesítő test súlypontja csak akkor eshet egybe az eredetivel, ha az m_K tömegű testet is a súlyponton átmenő, \mathbf{n} -re merőleges egyenesen keressük. Ennek a K pontnak a súlyponttól mért távolságát p -vel jelölve (1.7. ábra), a fentiek alapján az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} m_T &= \frac{m \Theta_s}{\Theta_s + m q t}, \\ m_T + m_K &= m, \\ m_T t^2 + m_K p^2 &= \Theta_s, \\ m_T t - m_K p &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Az (1.32) egyenletrendszert megoldva, a következő eredmények adódnak az ismeretlen m_T , m_K , t és p mennyiségekre:

$$m_T = \frac{m \Theta_s}{\Theta_s + m q^2}, \quad t = q, \quad m_K = \frac{m^2 q^2}{\Theta_s + m q^2}, \quad p = \frac{\Theta_s}{mq}. \quad (1.33)$$

Ebből következik, hogy az ütközés talppontja az ütközési normálison helyezkedik el ($t = q$).

Az ütközési talppont mellett bevezetett K pontot *lökésközéppontnak* nevezik. Ez a pont azzal a különleges tulajdonsággal rendelkezik, hogy ütközés előtti és utáni sebessége megegyezik. Ennek belátásához alkalmazzuk a K pontra az (1.30) képletet (a második tag itt is nulla, mert $\mathbf{r}_{SK} \perp \Delta \mathbf{I}$):

$$\mathbf{v}_K - \mathbf{c}_K = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{\Theta_s} (\mathbf{r}_{SA} \mathbf{r}_{SK}) \right) \Delta \mathbf{I}. \quad (1.34)$$

Mivel $\mathbf{r}_{SA} \mathbf{r}_{SK} = -qp$ és $p = \frac{\Theta_s}{mq}$,

$$\mathbf{v}_K - \mathbf{c}_K = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\Theta_s} qp \right) \Delta \mathbf{I} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\Theta_s} q \frac{\Theta_s}{mq} \right) \Delta \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (1.35)$$

A lökésközéppont megkeresésének számos műszaki alkalmazása lehetséges. Például ha azt szeretnénk, hogy egy tengely körül elforduló test ütközése során az ütközésből csapágyerők ne keletkezzenek, akkor célszerű a tengelyt a lökésközéppontba helyezni. Ugyanezt az elvet használhatjuk ki a kalapács használata során, mikor a szerszám nyelét ott fogjuk meg, ahol a kezünkre lökések nem adódnak át.

A feladat megoldásának algoritmus (most 1-es indexszel jelölve az excentrikusan ütköző testet) a következő:

1. A T_1 talppont meghatározása: az S_1 súlypontból merőlegest bocsátunk az \mathbf{n} ütközési normálisra.
2. Az $m_{T1} = \Theta_{S1}/q^2$ redukált tömeg meghatározása, ahol q a talppont távolsága a súlyponttól.
3. A talppont ütközés előtti normális sebességkomponensének meghatározása: $c_{T1}^{(n)} = c_{S1}^{(n)} + q\Omega_1$.
4. A lökésközéppont normális sebességkomponensének meghatározása: $c_{K1}^{(n)} = c_{S1}^{(n)} - p\Omega_1$.
5. Ha a másik test szempontjából is excentrikus az ütközés, akkor értelemeszerűen meg kell határozni a megfelelő T_2 talppontját, m_{T2} redukált tömegét és a $c_{T2}^{(n)}$, $c_{K2}^{(n)}$ sebességeket.

6. Most már visszavezettük a feladatot két m_{T1} illetve m_{T2} tömegű, $\mathbf{c}_{T1}^{(n)}$ illetve $\mathbf{c}_{T2}^{(n)}$ sebességű test centrikus ütközésére. A közös súlypont normális irányú sebességkomponensét a

$$\mathbf{c}_S^{(n)} = \frac{m_{T1}\mathbf{c}_{T1}^{(n)} + m_{T2}\mathbf{c}_{T2}^{(n)}}{m_{T1} + m_{T2}}$$

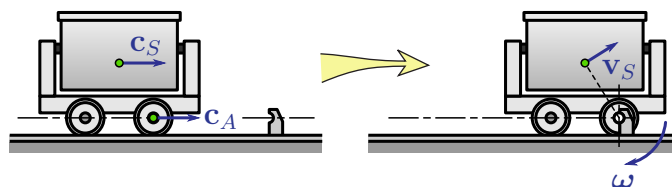
képlet segítségével határozzuk meg.

7. A centrikus ütközési feladat megoldása Maxwell-ábrával vagy az (1.6) képlettel. Eredményként megkapjuk a talppont ütközés utáni \mathbf{v}_{T1} sebességét.
8. Az ütközés utáni szögsebesség számítása során azt használhatjuk ki, hogy a lökésközpont sebessége nem változik: $\omega_1 = (v_{T1}^{(n)} - c_{K1}^{(n)})/(p + q)$.

1.2.5. Hirtelen rögzítés

A műszaki gyakorlatban olyan ütközési esetekkel is találkozhatunk, amikor egy mozgó test valamely A pontját hirtelen rögzítjük – például beleakad valamibe a test, vagy nekiütközik a helytálló környezetnek, ahogy az 1.8. ábrán illusztráljuk.

A hirtelen rögzítés nem tekinthető az excentrikus ütközés egy speciális esetének, mert ebben az esetben a rögzített pontnak nem csak az ütközési normális irányú sebességkomponense lesz nulla. Ez az oka, hogy más megoldási módszert kell alkalmazni, mint a korábbi esetekben. Azt használhatjuk ki, hogy a rögzítés során fellépő erőnek a rögzítési pontra szá-



1.8. ábra. Példa hirtelen rögzítésre. \mathbf{c}_A és \mathbf{c}_S : ütközés előtti sebességek, \mathbf{v}_S : ütközés utáni sebesség.

mított nyomatéka nulla. Következésképpen a térben álló A rögzítési pontra számított \mathbf{D}_A kinetikai nyomaték is nulla. A kinetikai nyomaték és a perdületderivált közötti összefüggés szerint

$$\mathbf{D}_A = \dot{\mathbf{H}}_A + \mathbf{v}_A \times m\mathbf{c}_S. \quad (1.36)$$

Nulla nyomaték esetén $\mathbf{D}_A = \mathbf{0}$, így

$$\dot{\mathbf{H}}_A = -\mathbf{v}_A \times m\mathbf{c}_S. \quad (1.37)$$

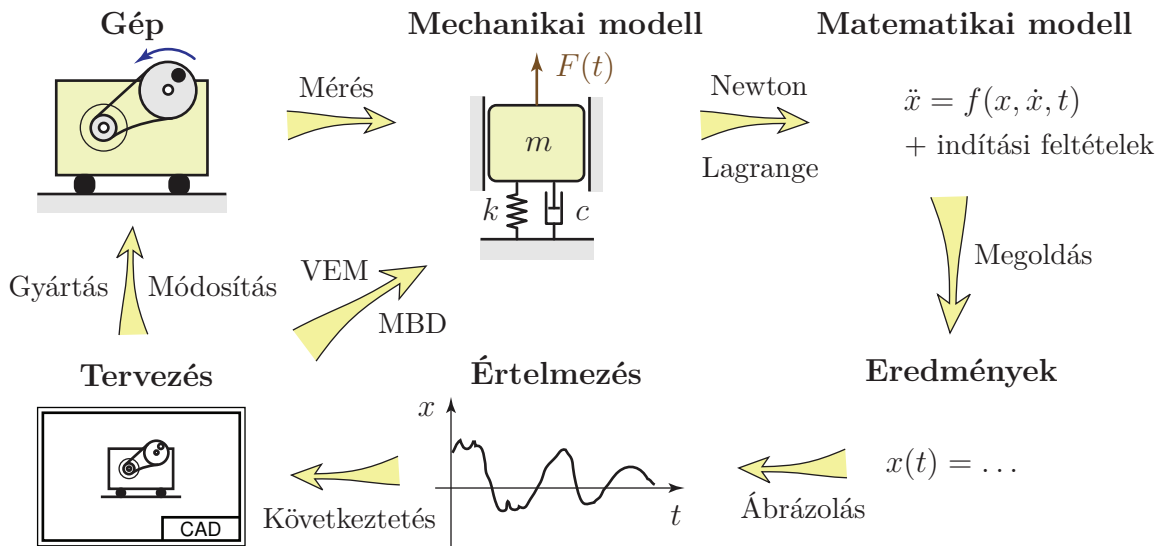
Bár a súlypont sebessége változik az ütközés során, az A pont áll, ezért $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy a perdületderivált végig nulla marad, azaz az A pontra számított perdület állandó az ütközés során. Ez alapján meghatározható a test rögzítés utáni szögsebessége.

1.3. Mechanikai lengőrendszerek

A fizikai világ bonyolultsága miatt a jelenségek leírásához modelleket kell felállítanunk. Az alkalmazott modell természetesen függ attól, hogy milyen kérdéseket akarunk megválaszolni egy adott vizsgálat során. Például szilárdságtanban a különféle anyagmodellek mellett a rúd-, lemez- és héjmodellt, dinamikában pedig az anyagi pont- és merev test modellt vezetik be. Ezek a modellek általában jól megragadják az adott tudományterület által vizsgált jelenségek szempontjából lényeges tulajdonságokat⁶.

A rezgésstanban talán még absztraktabbak a modellek, mint a mechanika más területein, ezért általában a mozgásegyenlet felírása a legnehezebb lépés a feladatok megoldása során. A mozgásegyenlet megoldása már számos, a gyakorlatban fontos modell esetében egyszerű végképletekkel megadható. A fentiek alapján a rezgéstani feladatok mérnöki megoldása az alábbi lépésekben történik (lásd 1.9. ábra):

1. Az adott gép, szerkezet mechanikai modelljének felállítása.
2. Matematikai modell felállítása, azaz a mozgásegyenlet felírása differenciálegyenlet alakjában a dinamika alaptétele vagy a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével (lásd 2.5. fejezet).
3. A mozgásegyenlet megoldása a kezdeti (indítási) feltételeknek megfelelően.
4. A megoldás értelmezése, ábrázolása.
5. Következtetések levonása, a vizsgált gép (vagy a terv) módosítása.



1.9. ábra. Rezgéstani feladatok mérnöki megoldásának folyamata. VEM: véges-elem módszer, MBD: multi-body dynamics (többszemélyes-dinamikai) programcsomag.

⁶Ugyanazt a jelenséget nyilván nemcsak mechanikai, hanem elektromosságtani, hőtani, sőt, jogtudományi vagy közgazdasági modellekkel is leírhatjuk, a vizsgálatunk céljától függően. Például egy közlekedési baleset körülményeit az összes felsorolt szempontból érdemes lehet megvizsgálni.

1.3.1. A lengőrendszer alapvető elemei

Amint a Bevezetésben is említettük, egyensúlyi helyzet körül végzett rezgések során a kitéréssel ellentétes irányú erő vagy nyomaték hat a rezgő testre. Ezt az erőt gyakran egy rugalmas test (rugó) deformációjára vezethetjük vissza.⁷ Ezért a modellezés során jelentős egyszerűsítést jelent, ha a vizsgált szerkezet szétválasztható merev, tehetetlen testekre, valamint rugalmas, de elhanyagolható tömegű részekre. Ennek értelmében a modellek egyes elemeit csak a lengőrendszerben betöltött szerepüknek megfelelő paraméterekkel jellemezzük, pl. a rugalmas elemeket tömeg nélkülinek, a tehetetlen elemeket pedig tökéletesen merevnek tekintjük. A valóságban természetesen egy adott alkatrész több szerepet is betölthet: figyelembe vehetjük a tömegét, rugalmasságát és belső csillapítását is, de ezeket a tulajdonságait külön-külön elemek képviselik a modellben.

Tehetetlen elemek

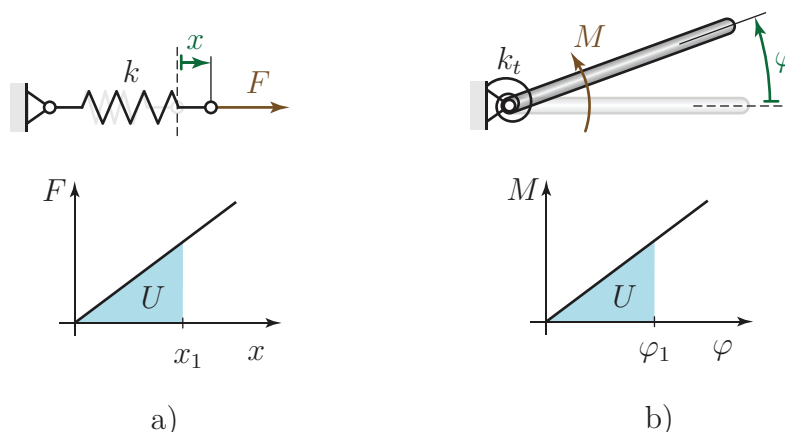
- Haladó mozgás esetén a tehetetlen elem mértékadó paramétere a tömeg: m ,
- forgó mozgás esetén pedig a tehetetlenségi nyomaték, melyet általában a test súlypontjára (Θ_s) vagy rögzített pontjára (Θ_a) számítunk ki⁸.

Rugalmas elemek

A rugalmas elemeket merevségükkel jellemezzük, ami a deformáció és a ható erő (vagy nyomaték) közötti kapcsolatot adja meg. A rugalmas elemek az alábbi módon csoportosíthatók.

1. Rugók

- 1.a) **Csavarrugók.** Egy egyik végén rögzített csavarrugót F erővel terhelve, a rugó egyensúlyi x megnyúlása (vagy összenyomódása) és az erő nagysága között közel lineáris kapcsolatot találunk.



1.10. ábra. Csavarrugók (a) és torziós rugók (b) ábrázolása és karakterisztikája.

⁷Ez nem mindig van így, lásd 2.2.1. fejezet.

⁸Ebben a könyvben többnyire síkmozgást végző testekből álló lengőrendszereket vizsgálunk. Ekkor eleendő a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték megadása.

Az $F(x)$ függvény meredeksége kis deformációk esetén⁹ állandó érték, melyet *rugómerevségnek* vagy egyszerűen *merevségnek* nevezünk:

$$k \equiv \frac{F}{x} = \text{állandó.} \quad (1.38)$$

A k rugómerevség azt adja meg, hogy egységnyi hosszváltozás előidézéséhez mekkora erő szükséges. Mértékegysége N/m. Gyakorlati szempontból fontos a rugómerevség reciproka, az ún. *rugóállandó* is:

$$w \equiv \frac{1}{k}.$$

A rugóállandó – melynek mértékegysége m/N – azt adja meg, hogy egységnyi erő mekkora deformációt okoz.

A fenti gondolatmenetben $F = kx$ és $F = x/w$ a rugó megnyújtásához szükséges külső erőt jelölte. A *rugó által kifejtett erő* (rugóerő) azonban a kitéréssel ellentétes, azaz $F_r = -kx$. Szabadtest-ábrákon a könnyebb érthetőség kedvéért a negatív előjel kiírása helyett megfelelő irányban felvett, $F_r = kx$ rugóerőt tüntetünk fel.

A későbbiekben fel fogjuk használni, hogy egy csavarrugóban felhalmozott *potenciális energia* (*rugalmas energia, alakváltozási energia*) x_1 megnyújtás vagy összenyomás hatására

$$U = \int_0^{x_1} kx \, dx = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{x_1^2}{2w}. \quad (1.39)$$

- 1.b) **Torziós (spirál-) rugók.** A spirálrugókat a k_t *torziós rugómerevséggel* jellemezzük, melynek mértékegysége Nm/rad és az egységnyi szögelfordulás előidézéséhez szükséges nyomatékot adja meg. Bevezethető a $w_t = 1/k_t$ *torziós rugóállandó* is, rad/Nm mértékegységgel. A rugó által kifejtett nyomaték φ szögelfordulás esetén $M_r = -k_t\varphi$.

A torziós rugóban felhalmozott potenciális (rugalmas, alakváltozási) energia

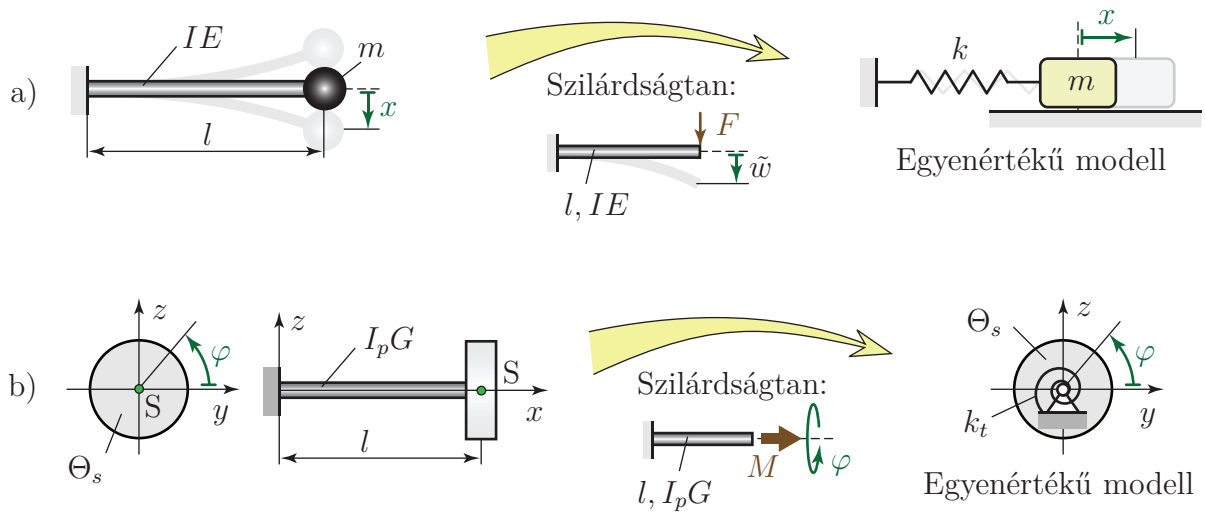
$$U = \int_0^{\varphi_1} k_t\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}k_t\varphi_1^2 = \frac{\varphi_1^2}{2w_t}. \quad (1.40)$$

A tengelyek, rudak, lemezek – vagy bármilyen alkatrész – rugalmasságukból eredően szintén viselkedhetnek rugóként. Az alábbiakban csak a rugalmas rudakkal foglalkozunk, mert elvileg hasonló módon lehet eljárni bármilyen rugalmas alkatrész esetében.

2. Rugalmas tengelyek és rudak, mint rugók

- 2.a) **Hajlítólengést végző rúd.** A rúd befogásától, alakjától és a terhelés helyétől függően végtelenül sokféle eset lehetséges, de ezek lényegében azonos módon kezelhetők. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor egy egyik végén befogott, egyenes, prizmatikus (teljes hosszában azonos keresztmetszetű), homogén rúd másik végére m tömegű pontszerű testet rögzítünk, az 1.11./a ábrának megfelelően.

⁹Csak kis deformációk esetén tehetjük fel, hogy az anyag lineárisan rugalmas [14].



1.11. ábra. Rugalmas rudakat tartalmazó lengőrendszerek egyenértékű modelljei.

A rúd hossza l , hajlítómerevsége IE . A hajlítólengések vizsgálata során a rúd tömegét első közelítésben elhanyagoljuk. Feltesszük, hogy a lengőrendszer pontjai ugyanabban a síkban tudnak elmozdulni (ezt a síkot mutatja az 1.11./a ábra). Kis kitérések esetén az m tömegű test jó közelítéssel a rúd egyensúlyi súlypontvonalára merőlegesen mozog, az ábrán jelölt x koordinátával párhuzamosan.

A lengőrendszerhez található egy *egyenértékű modell*, melyben a rudat megfelelő merevségű csavarrugóval helyettesítjük. Az egyenértékű modell rugójának paraméterét a rugóállandó definíciója alapján határozhatjuk meg. A rugóállandó az egységnyi erőhöz tartozó elmozdulást adja meg, tehát meg kell határoznunk, hogy a rúd végére ható egységnyi erő hatására mekkora elmozdulás következik be. Ezt például a szilárdságtan munkatételei (Betti- és Castigliano-tétel), a rugalmas szál differenciálegyenlete vagy az ún. járulékképletek segítségével számíthatjuk ki, de numerikus módszerek, például a végelem módszer is használható erre a célra. A vizsgált példában a lehajlás [14]:

$$\tilde{w} = \frac{Fl^3}{3IE},$$

tehát egységnyi erővel

$$w = \frac{l^3}{3IE} \quad \text{amiből} \quad k = \frac{3IE}{l^3}. \quad (1.41)$$

2.b) **Csavarólengést (torziós lengést) végző rúd.** Ez az eset is az előzőhöz hasonlóan tárgyalható, de most a rúd végének egységnyi nyomaték hatására történő elfordulása adja meg a torziós rugóállandót, és annak a reciproka a torziós rugómerevség. Például az 1.11./b ábrán látható, l hosszúságú, $I_p G$ csavarómerevségű, egyik végén befogott rúd esetén a rúd szabad végének elfordulási szöge M csavarónyomaték hatására [14]:

$$\varphi = \frac{Ml}{I_p G},$$

amiből egységnyi nyomatékot véve adódik a torziós rugóállandó és merevség:

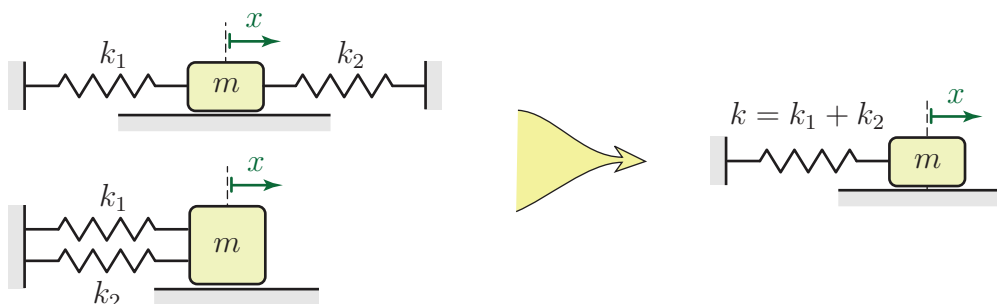
$$w_t = \frac{l}{I_p G} \quad \text{és} \quad k_t = \frac{I_p G}{l}. \quad (1.42)$$

Természetesen sok egyéb elrendezés is elképzelhető különböző peremfeltételekkel és koordinátákkal, de minden esetben az egységnyi erő vagy nyomaték hatására bekövetkező elmozdulás vagy elfordulás számértéke adja meg a rugóállandót. Számos speciális eset tárgyalása megtalálható a szakirodalomban [14]. Itt jegyezzük meg, hogy több szabadsági fokú lengőrendszerek esetében több különböző helyen ható egységnyi erők vagy koncentrált erópárok által okozott elmozdulások kiszámítására lehet szükség. Az így kapott elmozdulások az ún. *rugóállandó mátrix* elemeinek a számértékét adják meg, amiről a 3.5. fejezetben lesz szó.

Rugókapcsolások

Előfordul, hogy egy lengőrendszerben több rugó össze van kapcsolva, de az egyes rugók megnyúlása, valamint a bennük ébredő erő érdektelen, csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan hat az összekapcsolt rugókkal modellezett rugalmas szerkezet a rendszer más elemire. Ebből a szempontból az összekapcsolt rugók egyenértékűen helyettesíthetők egyetlen rugóval, melynek eredő rugómerevsége meghatározható. Az alábbiakban két speciális rugókapcsolást vizsgálunk meg.

- a) **Rugók párhuzamos kapcsolása.** Ebben az esetben a rugók *deformációja* megegyezik, ilyen eseteket mutat az 1.12. ábra.

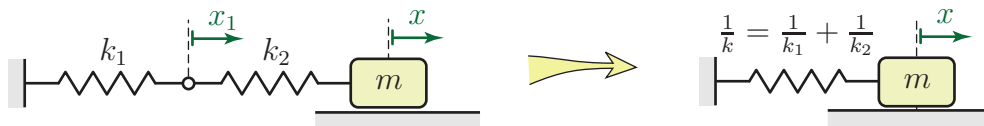


1.12. ábra. Rugók párhuzamos kapcsolása és az egyenértékű modell.

Az ábra példáiban a hasáb x kitérése esetén mindkét rugónak ugyanekkora a deformációja, tehát a hasábra ható eredő erő $F = k_1 x + k_2 x$. Ha a két rugót egyetlen, k merevségű rugóval helyettesítjük, az erő értéke nem változhat, így $F \equiv k x = (k_1 + k_2) x$. Következésképpen párhuzamos kapcsolás esetén az eredő rugómerevség az egyes merevségek összege:

$$k = k_1 + k_2. \quad (1.43)$$

Ez az összefüggés tetszőleges n számú rugó esetére is általánosítható $k = \sum_{i=1}^n k_i$ alakban.



1.13. ábra. Rugók soros kapcsolása és az egyenértékű modell.

- b) **Rugók soros kapcsolása.** Soros kapcsolásról akkor beszélünk, ha a vizsgált test kitérése során ugyanakkora erő ébred a rugókban.

Tegyük fel, hogy az 1.13. ábra szerint a hasáb elmozdulása x , míg a k_1 rugó megnyúlása x_1 ! Ekkor a k_2 rugó megnyúlása $x_2 = x - x_1$. Ha a két rugóban ugyanakkora erő ébred, akkor

$$F \equiv k_1 x_1 = k_2 (x - x_1),$$

amiből x_1 kifejezhető:

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x. \quad (1.44)$$

Ha helyettesítjük a sorosan kapcsolt rugókat egyetlen k merevségű rugóval, annak ugyanakkora $F = k_1 x_1$ erő hatására x deformációt kell szenvednie, ezért $F = kx$ miatt

$$kx = k_1 x_1.$$

x_1 fenti kifejezését behelyettesítve és x -szel egyszerűsítve kapjuk a soros kapcsolás esetén érvényes eredő rugómerevség kifejezését:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (1.45)$$

Ezt a kifejezést átírhatjuk a rugóállandó segítségével:

$$w \equiv \frac{1}{k} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \equiv w_1 + w_2. \quad (1.46)$$

Általánosan is igaz, hogy tetszőleges n számú sorosan kapcsolt rugó eredő rugóállandója az egyes rugóállandók összege: $w = \sum_{i=1}^n w_i$.

Természetesen e két eset kombinációja is előfordulhat, illetve lehetséges olyan kapcsolat is, ami se nem soros, se nem párhuzamos. Ezekben az esetekben általában található valamilyen geometriai összefüggés a rugók megnyúlásai között. Ezt kihasználva abból a követelményből vezethető le az eredő rugómerevség, hogy az eredeti és a helyettesítő rendszerben ugyanakkora legyen a rugókban felhalmozott potenciális energia. Például n rugóból álló rendszernél $U_{\text{eredeti}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i x_i^2$ és $U_{\text{helyettesítő}} = \frac{1}{2} k x^2$. Ha az (1.44) képlethez hasonlóan kifejezhető az x_i megnyúlások az x koordinátával, akkor a k rugómerevség az $U_{\text{eredeti}} = U_{\text{helyettesítő}}$ egyenletből számítható. Ezt a technikát – kissé módosítva – a másodfajú Lagrange-egyenlet használata során fogjuk alkalmazni (lásd pl. a 2.5. fejezet 2.29. megjegyzését).

1.3. megjegyzés: A valóságos szerkezetek esetében időre van szükség a jelek terjedéséhez. Mechanikai szempontból az adott anyagra jellemző hangsebesség határozza meg a deformációk terjedési sebességét. Ezért ha erő hat egy rugalmas test valamelyik pontjában, akkor az erő által okozott deformáció nem azonnal, hanem kicsit késve jelentkezik a támadásponttól távolabbi pontok közelében. Ezt a hatást a modelljeink elhanyagolják: feltesszük, hogy a rezgést jellemző periódusidő töredéke alatt eljutnak a deformációs hullámok a rugó egyik végétől a másikig. ♣

1.3.2. A lengőrendszerek osztályozása

A lengőrendszereket – pontosabban a modelleket – több szempont szerint osztályozhatjuk. Egy lengőrendszer lehet

több szabadsági fokú	\longleftrightarrow	egy szabadsági fokú,
csillapított	\longleftrightarrow	csillapítatlan,
gerjesztett	\longleftrightarrow	szabad,
nemlineáris	\longleftrightarrow	lineáris.

Ebben a könyvben csak lineáris lengőrendszereket fogunk vizsgálni. A következő fejezetben a rezgés tan legalapvetőbb fogalmait és módszereit mutatjuk be az egy szabadsági fokú¹⁰ lengőrendszerek kapcsán. A jegyzet 3. fejezetében ezeket a fogalmakat és módszereket általánosítjuk a több szabadsági fokú rendszerek esetére. Mivel az egy szabadsági fokú, lineáris, csillapítatlan szabad rezgések modellje a legegyszerűbb, ezzel a modellel kezdjük a lengőrendszerek vizsgálatát.

¹⁰A szabadsági fok megadásánál az angol "degrees of freedom" kifejezésből származó DoF jelölést fogjuk használni, pl. 1 DoF = egy szabadsági fokú.

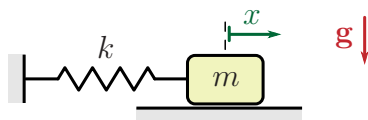
2. fejezet

Egy szabadsági fokú lengőrendszerek

2.1. Csillapítatlan, szabad harmonikus rezgés

2.1.1. Alapfogalmak, a mozgásegyenlet és a mozgástörvény

Minden egy szabadsági fokú (1 DoF), csillapítatlan, szabad lengőrendszerhez¹ található egy egyenértékű egyszerű lengőrendszer, a következő alakban:



2.1. ábra. 1 DoF, szabad, csillapítatlan lengőrendszer alapmodellje.

Ezt az egyszerű modellt az 1 DoF, csillapítatlan, szabad lengőrendszerek *alapmodelljének* nevezzük.² Itt a k merevség és az m tömeg a lengőrendszer paraméterei, x pedig a rezgő test elmozdulását megadó koordináta. A koordináta felvételekor mindig tisztázni kell, hogy milyen állapotnak felel meg az $x = 0$ helyzet és merre mutat a megfelelő koordinátatengely pozitív iránya. Jelen esetben a rugó erőmentes helyzetétől mérjük a koordinátát (ez egybeesik az egyensúlyi helyzettel), a 2.1. ábrán feltüntetett irányban.

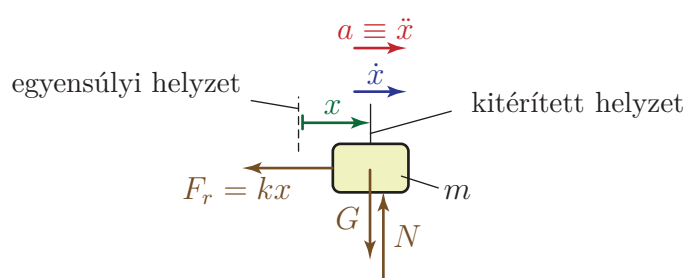
Célunk a mozgás időbeli lefolyásának – az $x(t)$ mozgástörvénynek – a meghatározása, tehát nemcsak egy pillanatot vizsgálunk, hanem a rezgés folyamatát. Ehhez egy matematikai modellt – differenciálegyenletet – állítunk fel a dinamika alaptétele segítségével. Az első lépésben szabadtest-ábrát (2.2. ábra) rajzolunk az *egyensúlyi helyzetéből kitérített* rendszerre.

Célszerű a pozitív irányban kitérített, $x > 0$ helyzet ábrázolása, mert így jobban átlátható, hogy milyen előjellel kerülnek be az egyes tagok a mozgásegyenletbe. A szabadtest-ábra alapján felírhatók a dinamika alaptételének vetületi egyenletei:

$$\begin{aligned}ma &= -F_r, \\ 0 &= N - mg.\end{aligned}$$

¹A lengőrendszereket rezgő rendszereknek vagy oszcillátoroknak is nevezhetjük.

²Az alapmodell bemutatása szempontjából csak az x koordinátával párhuzamos mozgások relevánsak, az arra merőleges irányban egy kényszerfeltétel biztosítja, hogy ne legyen elmozdulás. A 2.1. ábrán a példa teljessége kedvéért feltételeztük, hogy a kényszerpályára merőleges irányú nehézségi erőterben mozog az m tömegű test.



2.2. ábra. Az alapmodell szabadtest-ábrája. Az x koordinátatengely felvett iránya egyben az \dot{x} sebesség és az \ddot{x} gyorsulás pozitív irányát is kijelöli.

Mivel csak x irányú gyorsulás lehetséges, elég csak az első egyenletet vizsgálni:

$$ma = -kx.$$

Ebből az egyenletből már látszik, hogy miért az egyensúlyi helyzetből kitérített helyzetben kell megrajzolni a szabadtest-ábrát: egyensúlyban az egyenlet mindkét oldala nulla lenne. Ez még nem differenciálegyenlet, de $a \equiv \ddot{x}$ figyelembevételével megkapjuk a mozgásegyenletet:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (2.1)$$

ami egy közönséges, másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet. Az egyenlet *másodrendű* volta azzal kapcsolatos, hogy a dinamika alaptételében a gyorsulás arányos az erővel, ezért a koordináta második deriváltja jelenik meg az egyenletben. Mivel a lengőrendszer szabad (nincs gerjesztés), a mozgásegyenlet *homogén*: nincsenek benne olyan tagok, melyek x -et vagy annak valamely deriváltját ne tartalmazzák. Végül, az egyenlet *lineáris*, mert a rugóerő lineárisan függ a kitéréstől.

A differenciálegyenlet megoldásához célszerű az egyenletet ún. *sztenderd alakra* hozni. Ezt úgy tehetjük meg, hogy elosztjuk az egyenlet minden tagját a gyorsulás együtthatójával, azaz m -mel:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.2)$$

Ez azért előnyös, mert így mindössze egyetlen paraméter marad az egyenletben. Mivel ez egy lineáris differenciálegyenlet, a megoldást kereshetjük

$$x(t) = Be^{\lambda t} \quad (2.3)$$

alakban, ahol a két bevezetett paraméter általában komplex szám, azaz $B \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{C}$. A fenti kifejezést kétszer deriválva idő szerint:

$$\ddot{x}(t) = B\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Visszahelyettesítve a (2.2) egyenletbe:

$$B\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m}Be^{\lambda t} = 0,$$

tehát

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)Be^{\lambda t} = 0. \quad (2.4)$$

Ennek az összefüggésnek minden időpillanatban teljesülnie kell. Az exponenciális függvény csak $t \rightarrow -\infty$ -ben tart nullához, a B együtthatóról pedig feltételezzük, hogy nem nulla, ugyanis $B = 0$ annak felelne meg, hogy nem jön létre rezgés³. Tehát a zárójelben szereplő kifejezésnek kell nullának lennie, így kapjuk az ún. *karakterisztikus egyenletet*:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0. \quad (2.5)$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

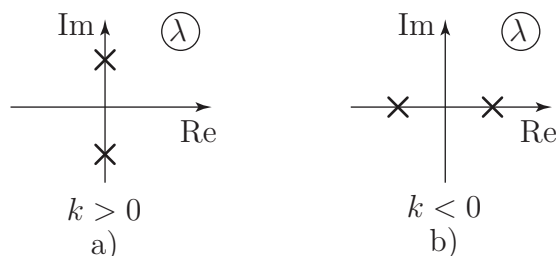
$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Vezessük be az

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

jelölést! ω_n a *csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája*⁴, melynek mértékegysége rad/s. A mozgásegyenlet megoldása szempontjából két élesen elkülönülő esetet különböztethetünk meg:

- $k > 0$, azaz $m > 0$ miatt $\omega_n > 0$, λ tiszta képzetes szám. Ekkor létrejöhet rezgés, mi elsősorban ezzel az esettel fogunk foglalkozni.
- $k < 0$, tehát ω_n képzetes, λ valós szám. Ebben az esetben nem alakul ki rezgés⁵.



2.3. ábra. A karakterisztikus egyenlet gyökeinek elhelyezkedése a komplex síkon pozitív (a) és negatív (b) merevség esetén.

Tekintsük először azt az esetet, amikor $k > 0$! A mozgásegyenlet ún. *általános megoldása* két (2.3) alakú alapmegoldás lineáris kombinációja, a karakterisztikus egyenlet két gyökével az exponenciális függvény kitevőjében:

$$x(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} \equiv B_1 e^{i\omega_n t} + B_2 e^{-i\omega_n t}. \quad (2.7)$$

Az Euler-féle összefüggés alapján átírható a megoldás trigonometrikus alakba:

$$x(t) = B_1 \left(\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t) \right) + B_2 \left(\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t) \right).$$

³ $B = 0$ is megoldása a mozgásegyenletnek, ez az egyensúlyi helyzetnek felel meg.

⁴Angolul *natural angular frequency*.

⁵Negatív merevség a valóságban is előfordulhat, lásd pl. a 2.2.3. fejezet példáját.

Az egyenlet átrendezésével bevezethető C_1 és C_2 együtthatók segítségével két azonos argumentumú trigonometrikus függvény összegeként írható fel a megoldás:

$$x(t) = \underbrace{(B_1 + B_2)}_{=C_1} \cos(\omega_n t) + i \underbrace{(B_1 - B_2)}_{=C_2} \sin(\omega_n t). \quad (2.8)$$

A fenti, kitérést megadó függvénynek valós értékűnek kell lennie. A C_1 és C_2 együtthatók – melyek a kezdeti feltételek (kezdeti kitérés és sebesség) alapján határozhatók meg – akkor valósak, ha a B_1 és B_2 együtthatók egymás komplex konjugáltjai: $B_1 = \overline{B_2}$. Ebben az esetben a mozgástörvény függvényalakja

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t). \quad (2.9)$$

A (2.9) képlettel megadható mozgást *harmonikus rezgésnek* nevezzük.

2.4. megjegyzés: Előre lehetett sejteni, hogy a megoldás szinusz és koszinusz függvényeket fog tartalmazni, ezek a függvények ugyanis arányosak második deriváltjuk (-1)-szeresével. ♣

Az általános megoldás más alakban is felírható:

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \varepsilon). \quad (2.10)$$

Itt A a rezgés *amplitúdója*, ε pedig a *fázisszög*. Az állítás bizonyításához bontsuk fel a (2.10) kifejezést a trigonometria egyik *addíciós tétele* alapján:

$$A \sin(\omega_n t + \varepsilon) = A \sin(\varepsilon) \cos(\omega_n t) + A \cos(\varepsilon) \sin(\omega_n t). \quad (2.11)$$

Ennek a kifejezésnek minden pillanatban meg kell egyeznie a (2.9) mozgástörvénnyel. A \sin és \cos függvények lineáris függetlensége miatt ez csak úgy lehetséges, ha a (2.9) és (2.11) kifejezésekben a megfelelő együtthatók megegyeznek, azaz

$$\begin{aligned} \cos(\omega_n t) \text{ együtthatói: } & C_1 = A \sin(\varepsilon), \\ \sin(\omega_n t) \text{ együtthatói: } & C_2 = A \cos(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A fenti két egyenletből a fordított irányú kapcsolat is kiolvasható:

$$\begin{aligned} A &\equiv \sqrt{A^2 \sin^2(\varepsilon) + A^2 \cos^2(\varepsilon)} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \text{illetve} \\ \tan(\varepsilon) &\equiv \frac{A \sin(\varepsilon)}{A \cos(\varepsilon)} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{miatt} \\ \varepsilon &= \arctan \frac{C_1}{C_2}, \quad \varepsilon \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Mivel az \arctan függvény értékészlete $[-\pi/2, \pi/2]$, a fázisszög megfelelő értékének kiszámításához szükség lehet arra, hogy hozzáadjunk π -t az $\arctan(C_1/C_2)$ kifejezéshez. Ezzel kapcsolatban lásd a 2.5. megjegyzést.

2.1.2. A kezdeti feltételek figyelembevétele

A (2.2) egyenlet megoldásáról tudjuk, hogy felírható

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

alakban. Ez a képlet bármilyen lineáris, egy szabadsági fokú rendszer csillapítatlan szabad rezgésére érvényes. C_1 és C_2 bármilyen valós szám lehet – ezért nevezik ezt általános megoldásnak. Az együtthatók meghatározásához további információkat kell tudnunk a mozgásról. Ezek lehetnek ún. *peremfeltételek* – pl. $x(t_0) = x_0$ és $x(t_1) = x_1$ –, mint a rugalmas szál differenciálegyenlete esetében [14], de ekkor meglehetősen nehézkesen oldható meg a feladat. A dinamikában és a rezgésstanban peremfeltételek helyett inkább *kezdeti feltételeket* szoktak megadni:

$$x(t=0) \equiv x(0) = x_0, \quad (2.14)$$

$$v(t=0) \equiv \dot{x}(0) = v_0. \quad (2.15)$$

A kezdeti feltételek egyenleteiből látszik, hogy melyik pillanatban kell vizsgálnunk a kitérés és sebesség értékét: $t = 0$ -ban. A kezdeti kitérés (2.9) alapján

$$x(0) \equiv C_1 \cos(\omega_n 0) + C_2 \sin(\omega_n 0) = C_1. \quad (2.16)$$

A sebesség kifejezését (2.9) idő szerinti differenciálásával kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\equiv -C_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + C_2 \omega_n \cos(\omega_n t), \quad \text{amiből} \\ \dot{x}(0) &\equiv -C_1 \omega_n \sin(\omega_n 0) + C_2 \omega_n \cos(\omega_n 0) = C_2 \omega_n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.14) és (2.16), valamint (2.15) és (2.17) összehasonlításából:

$$C_1 = x_0 \quad \text{és} \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_n}. \quad (2.18)$$

Tehát az adott kezdeti feltételekhez tartozó megoldás

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t).$$

A C_1 , C_2 együtthatók számítása során két különböző jellegű információt használtunk fel. Egyrészt ismertek a kezdeti feltételek – ezeket a lengőrendszerrel független, azon kívüli hatások határozzák meg: például ütközés másik testtel, vagy a modellezett gép üzemeltetéséből adódó egyéb információk. Másrészt pedig ismert a lengőrendszer mozgástörvényének általános alakja. Ezt a kétféle információt kell összevetni a számítás során.

Hasonlóan lehet számolni az A amplitúdó és az ε fázisszög értékét is a kezdeti feltételekből. A kezdeti kitérés (2.10) alapján

$$x(0) \equiv A \sin(\omega_n 0 + \varepsilon) = A \sin(\varepsilon),$$

a kezdeti sebesség pedig (2.10) differenciálásával adódik, ami $t = 0$ -ban:

$$\dot{x}(0) = A \omega_n \cos(\omega_n 0 + \varepsilon) = A \omega_n \cos(\varepsilon).$$

Ezekből az egyenletekből (2.14) és (2.15) alapján

$$x_0 = A \sin(\varepsilon) \quad \text{és}$$

$$\frac{v_0}{\omega_n} = A \cos(\varepsilon).$$

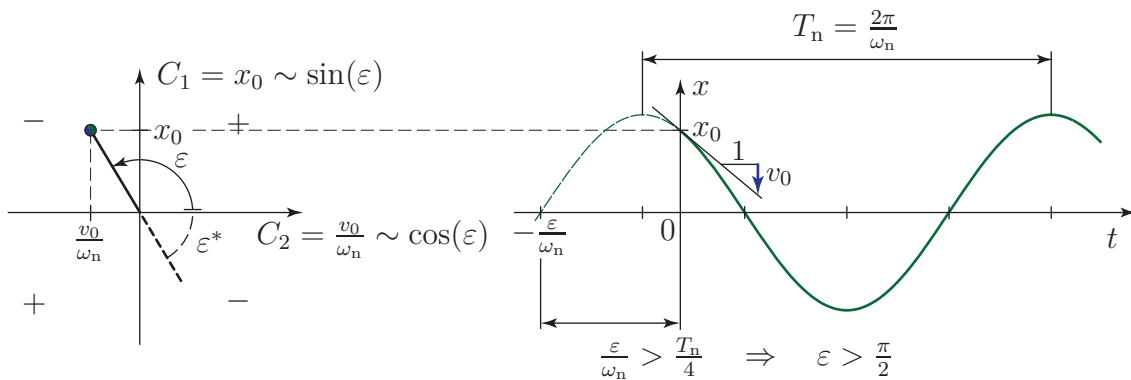
A (2.12) egyenlet kapcsán mondottak szerint adódik A és ε :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_n^2}},$$

$$\tan(\varepsilon) = \frac{\omega_n x_0}{v_0},$$

összhangban a (2.13) és (2.18) képletekkel.

2.5. megjegyzés: Amint a 2.4. ábra is mutatja, C_1 és C_2 – azaz $\sin(\varepsilon)$ és $\cos(\varepsilon)$ – előjelétől függően határozható meg, hogy az ε fázisszög melyik síknegyedben található. A számológépek általában a $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti tartományban adják meg az arctan függvény értékészletét, ez azonban hamis eredményre vezet, ha $\cos(\varepsilon) < 0$ és $\sin(\varepsilon) > 0$ (2. síknegyed) vagy ha $\cos(\varepsilon) < 0$ és $\sin(\varepsilon) < 0$ (3. síknegyed). Például a 2.4. ábrán szemléltetett esetben $x_0 > 0$, de $v_0 < 0$, ezért a fázisszög a második síknegyedbe esik. Ha nem adjuk meg külön a $\sin(\varepsilon)$ és $\cos(\varepsilon)$ előjelét, akkor a számológép $\tan(\varepsilon)$ minden negatív értéke esetén a negyedik síknegyedbe eső eredményt (a példában ε^*) ad. Ezekben az esetekben megoldást jelent az ún. kétparaméteres arctan függvény használata, vagy a számológép által kiadott értékhez hozzá kell adni π -t. ♣



2.4. ábra. A fázisszög számítása C_1 és C_2 ismeretében. A \pm jelek a $\tan(\varepsilon)$ előjelét mutatják az egyes síknegyedekben. A $t = 0$ előtti utolsó tengelymetszet időpontja az $x(t) = 0$ feltételből határozható meg: $\omega_n t + \varepsilon = 0$, azaz $t = -\varepsilon/\omega_n$.

A $C_{1,2}$ együtthatók a 2.5. megjegyzésben ismertetett probléma miatt gyakran egyszerűbben kiszámíthatók a kezdeti feltételekből, mint az A amplitúdó és az ε fázisszög. A mozgástörvény (2.10) alakja azonban szemléletesebb, hiszen $-1 \leq \sin(\omega_n t + \varepsilon) \leq 1$ miatt az A amplitúdó a maximális kitérést adja meg.

2.1.3. A mozgás időbeli lefolyása

A (2.9) és (2.10) mozgástörvényben szereplő $\sin(\omega_n t)$ és $\cos(\omega_n t)$ függvények 2π -periodikusak, tehát pl. $\sin(\omega_n t) = \sin(\omega_n t + 2\pi)$, minden t pillanatban. A csillapítatlan szabad lengés T_n

periódusidejét ehhez hasonlóan, a

$$\sin(\omega_n t) = \sin(\omega_n (t + T_n)) \quad (2.19)$$

összefüggés alapján definiáljuk. Tehát $\sin(\omega_n t + 2\pi) \equiv \sin\left(\omega_n \left(t + \frac{2\pi}{\omega_n}\right)\right)$ miatt

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}. \quad (2.20)$$

A periódusidő mértékegysége s (secundum, másodperc). A csillapítatlan szabad rezgés f_n sajátfrekvenciája a periódusidő reciproka⁶:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}, \quad (2.21)$$

mértékegysége Hz (Hertz): $1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$. A frekvencia az 1 s alatt bekövetkező teljes rezgések számát adja meg.

Érdekes analógia figyelhető meg a harmonikus rezgés és az egyenletes körmozgás között: egy ω szögsebességgel keringő pont vetülete csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást végez $\omega_n = \omega$ körfrekvenciával. 1 s alatt a keringő pont ω számértékének megfelelő szögelfordulást végez radiánban mérve, innen ered a körfrekvencia elnevezése és mértékegysége (rad/s). Az egyenletes körmozgást jellemző szögelfordulásnak a rezgés fázisszöge feleltethető meg: egy teljes rezgés alatt 2π -vel változik a fázisszög. A körfrekvencia pedig azt adja meg, hogy 1 s alatt hány radiánnal változik meg a fázisszög. Tehát a körfrekvencia számértéke mindig nagyobb, mint a frekvencia számértéke.

Megjegyezzük, hogy a radián nem valódi mértékegység, csak egy arányosságot fejez ki a köríven mért ívhossz és a sugár között. Szemléletes geometriai tartalma miatt mégis mértékegységként használjuk.

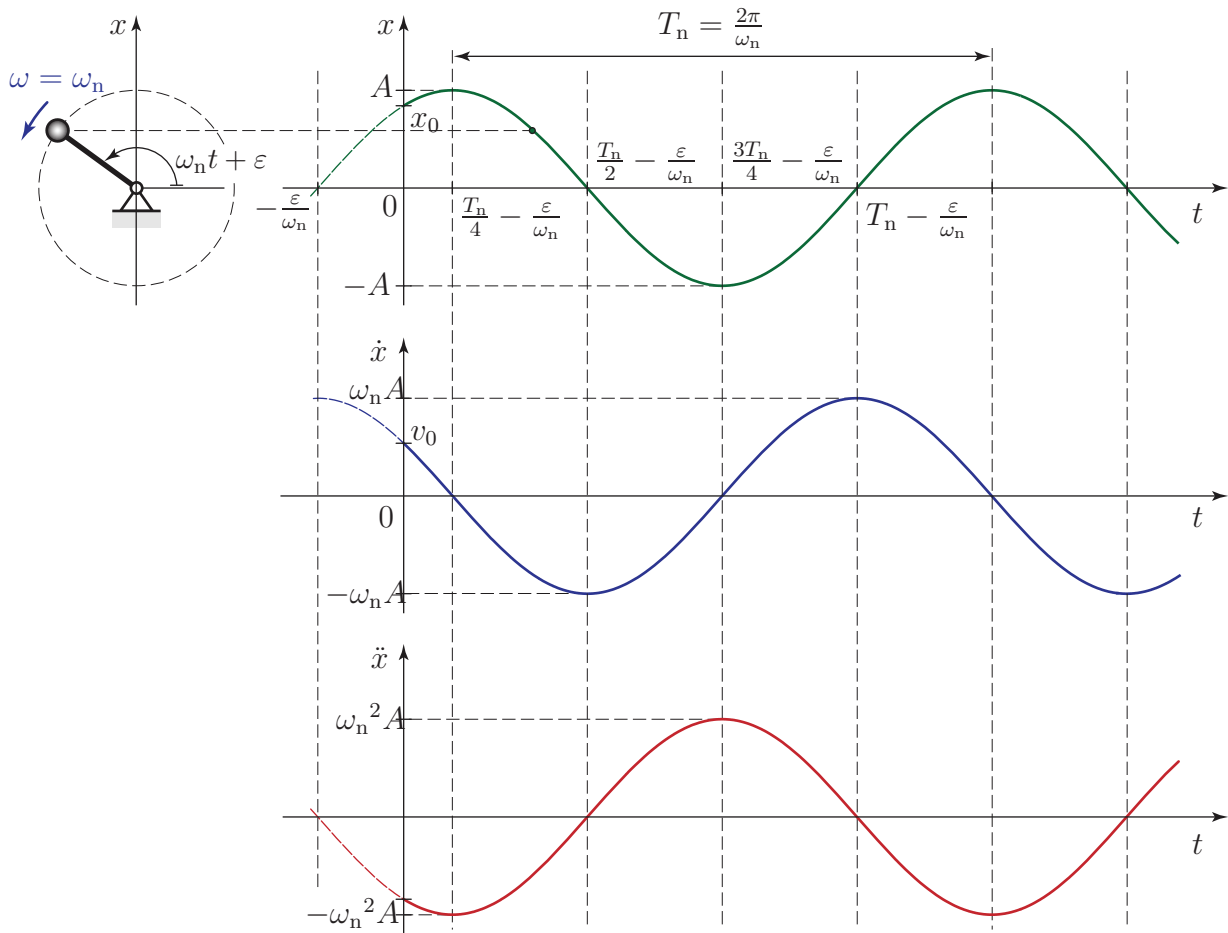
Az

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega_n t + \varepsilon) && \text{mozgástörvény, a} \\ v(t) &= A\omega_n \cos(\omega_n t + \varepsilon) && \text{sebesség és az} \\ a(t) &= -A\omega_n^2 \sin(\omega_n t + \varepsilon) && \text{gyorsulás} \end{aligned}$$

grafikonjai – azaz a foronómiai görbék – láthatók a 2.5. ábrán. Amint a képletekből is kiolvasható, a rezgés maximális sebessége $v_{max} = A\omega_n$, maximális gyorsulása pedig $a_{max} = A\omega_n^2$. A grafikonok két azonos irányú kitéréshez tartozó maximumhelye között éppen T_n periódusidő telik el, a tengelymetszetek között pedig – ebben az esetben – $T_n/2$ időtartam. A gyakorlatban nem célszerű a periódusidőt a tengelymetszetek között eltelt időtartamok alapján számítani. Egyrészt nehezebb detektálni a nulla kitérés időpontját mint a szélső helyzetét⁷ (pl. mert ekkor maximális a sebesség), másrészt pedig a tengelymetszetek között eltelt időtartamok nem is egyeznek meg $T_n/2$ -vel, ha el van tolva a nulla szint – azaz nem az $x = 0$ helyzet körül jön létre a rezgés. Ilyen esetet illusztrál a 2.9. ábra. A nulla szint eltolódása például a nehézségi erő hatására is bekövetkezhet.

⁶A frekvenciát ν -vel is szokták jelölni. ν görög betű, ejtsd: nú.

⁷Sok mérési eljárás a rezgő mozgást végző testről készült videófelvetelek feldolgozásán alapul. A felvétel egymás utáni képkockái a mozgás egyfajta mintavételezésének tekinthetők. A képkockák közül az ábrázolja a legkisebb sebességű – azaz a szélső helyzethez legközelebbi – helyzetet, amelyen a legkevésbé van elmosódva a mozgó test képe.



2.5. ábra. Csillapítatlan szabad rezgés foronómiai görbéi.

2.1.4. A nehézségi erő hatása I. – függőleges irányú rezgés

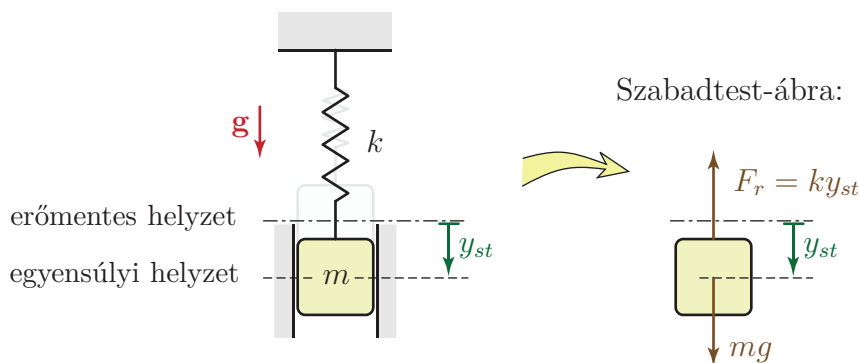
A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a lengőrendszerre állandó nagyságú erő vagy nyomaték hat a mozgás irányában. Vizsgáljuk meg ennek a feladatnak az alapmodelljét, azaz azt az esetet, amelyben a rugóból és hasázból álló lengőrendszer nehézségi erőterben, függőlegesen helyezkedik el, a 2.6. ábrának megfelelően.

A nehézségi erő hatására kialakul egy új *statikus egyensúlyi helyzet*, melyben nem terheletlen a rugó, ezért y_{st} -vel megnyúlik. Ennek az ún. *statikus kitérésnek* az értékét abból határozhatjuk meg, hogy ekkora kitérésnél a rugóerő és a nehézségi erő egyensúlyt tart: $F_r - mg = 0$, azaz a 2.6. ábra alapján $ky_{st} = mg$, tehát

$$y_{st} = \frac{mg}{k}. \quad (2.22)$$

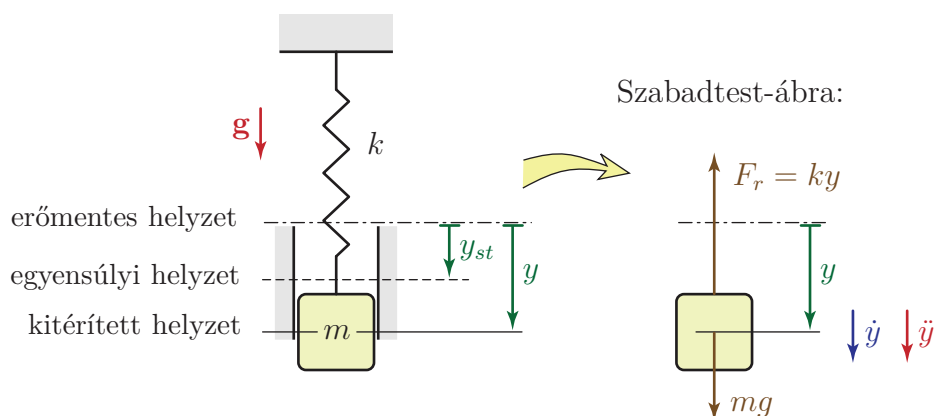
A 2.1.1. fejezetben, a vízszintes síkon mozgó lengőrendszer tárgyalása során egyértelmű volt, hogy a rugó nyújtatlan helyzetétől⁸ – ami egyúttal megegyezett az egyensúlyi helyzettel – mérjük a hasáb kitérését. Most azonban e két helyzet nem esik egybe. Célszerű olyan koordinátákkal leírni a rendszer mozgását, melyeket a lehető legegyszerűbb alkalmazni. Hogy eldöntsük, melyiket érdemes használni e két kézenfekvő koordináta közül, írjuk fel a mozgásegyenletet két különböző alakban!

⁸Ezt nevezhetjük terheletlen, erőmentes vagy feszítetlen helyzetnek is.



2.6. ábra. Nehézségi erő hatása alatt álló lengőrendszer statikus egyensúlyi helyzete.

a) Mozgásegyenlet a rugó terheletlen állapotától mért y koordinátával



2.7. ábra. Szerkezeti- és szabadtest-ábra az erőmentes helyzettől mért y koordinátával.

A 2.7 szabadtest-ábra és $F_r = ky$ felhasználásával

$$m\ddot{y} = mg - ky, \quad \text{amiből}$$

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2} y = g. \quad (2.23)$$

Ez egy inhomogén differenciálegyenlet, hiszen van benne olyan tag, mely nem tartalmazza az y változót vagy annak deriváltjait. A megoldás a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege [16]. A *homogén* egyenletet már vizsgáltuk a 2.1.1. fejezetben, és levezettük, hogy annak az általános megoldása

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t). \quad (2.24)$$

A *partikuláris* megoldást általában érdemes olyan alakban keresni mint amilyen az inhomogenitást okozó tag – jelen esetben tehát $y_p = \text{konstans}$ alakban. Ha $y \equiv y_p$ -t helyettesítünk

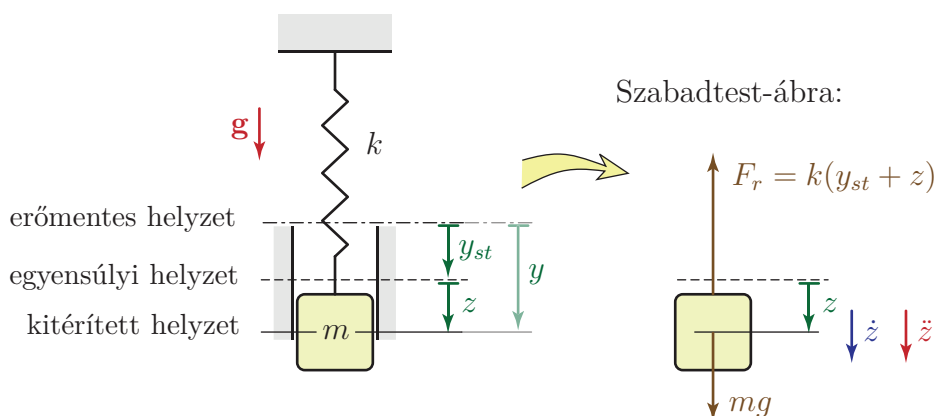
a (2.23) egyenletbe, akkor $y_p = \text{konstans}$ miatt $\ddot{y}_p = 0$, ezért azt kapjuk, hogy a partikuláris megoldás megegyezik a (2.22) statikus kitéréssel:

$$\frac{k}{m}y_p = g \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{mg}{k} \equiv y_{st}.$$

Tehát a *mozgásegyenlet* általános megoldása

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + y_{st} \equiv A \sin(\omega_n t + \varepsilon) + y_{st}. \quad (2.25)$$

b) Mozgásegyenlet a statikus egyensúlyi helyzettől mért z koordinátával



2.8. ábra. Szerkezeti- és szabadtest-ábra az egyensúlyi helyzettől mért z koordinátával.

Ha az új z koordinátát a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük, akkor a 2.8 ábra alapján $y = y_{st} + z$. Mivel $y_{st} = \text{konstans}$, ezért $\ddot{y} = \ddot{z}$, tehát

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= mg - ky, \\ m\ddot{z} &= mg - k(y_{st} + z), \\ m\ddot{z} + kz &= mg - ky_{st}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.22) miatt a (2.26) egyenlet jobb oldala zérus, ezért a mozgásegyenlet homogén alakra egyszerűsödik:

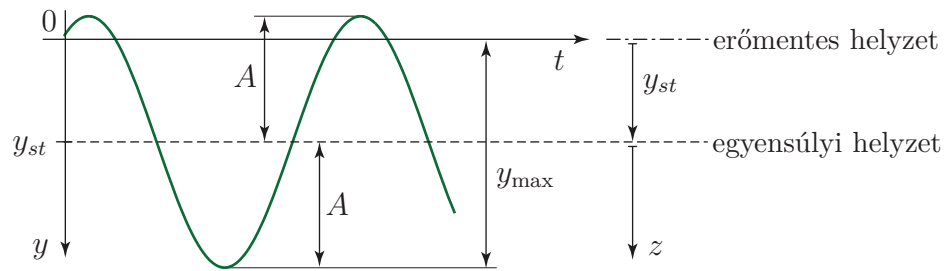
$$m\ddot{z} + kz = 0,$$

tehát sztenderd alakban

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása pedig már ismert: $z(t) = A \sin(\omega_n t + \varepsilon)$.

A fentiekből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ha a nehézségi erő a mozgásegyenlet állandó nagyságú tagjában szerepel, akkor a lengőrendszer ω_n és T_n paramétereit, valamint A amplitúdóját – az egyensúlyi helyzettől mérhető legnagyobb kitérést – nem befolyásolja. A rendszer a statikus egyensúlyi helyzet körül végzi a lengéseket (2.9. ábra), ezért a rugó



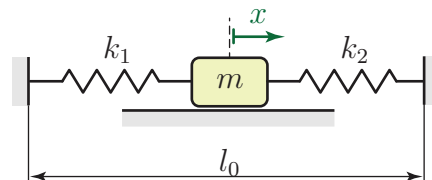
2.9. ábra. Nehézségi erő hatása alatt álló rendszer egyensúlyi helyzet körül végzett lengései.

maximális deformációja A amplitúdójú rezgés mellett $y_{max} = A + y_{st}$ lesz, a (2.25) megoldással összhangban. A rugóerő ebben az esetben egy dinamikus és egy statikus erő összegeként fejezhető ki: $F_r(t) = kz(t) + ky_{st}$. A maximális rugóerő pedig $F_{rmax} = kA + ky_{st}$.

Fontos eredmény, hogy homogén differenciálegyenletet kapunk, ha a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátát. Ez azzal van összefüggésben, hogy nyugalomban lehet a rendszer a $z = 0$ egyensúlyi helyzetben, azaz $\ddot{z} = 0$, $\dot{z} = 0$ és $z = 0$ egyszerre teljesülhet. Ebben az esetben a mozgásegyenletben csak konstans tagok maradhatnak, viszont ezek az egyensúlyi helyzetben ható erőknek felelnek meg, amiknek definíció szerint nulla az eredője.

2.1.5. Rugók előfeszítése

Rugalmas, de nyomóerő hatására meglazuló alkatrészek – például ékszíjak – előfeszítésére gyakran van szükség a mérnöki gyakorlatban. Az előfeszítés hatásainak szemléltetésére tekintsünk egy hasábot, melyhez k_1 és k_2 merevségű rugókat csatlakoztatunk a 2.10. ábra szerint.



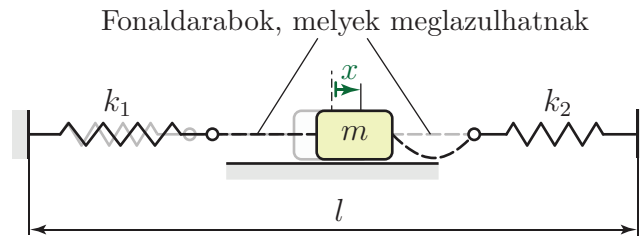
2.10. ábra. Egyszerű lengőrendszer párhuzamosan kapcsolt, nem előfeszített rugókkal.

Nem előfeszített rugók

Először tegyük fel, hogy egyensúlyi helyzetben a rugók feszítetlenek, és mérjük az x koordinátát ettől a pozíciótól! A rugók deformációja azonos, tehát az 1.3.1. fejezet szerint párhuzamos kapcsolásúak. A megfelelő eredő rugómerevség $k = k_1 + k_2$, amiből a rendszer sajátkörfrekvenciája

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (2.27)$$

Most módosítsuk a lengőrendszert a 2.11. ábra szerint úgy, hogy a hasáb és a rugók közé fonaldarabokat helyezünk, melyek nyomóerőt nem tudnak átvinni!

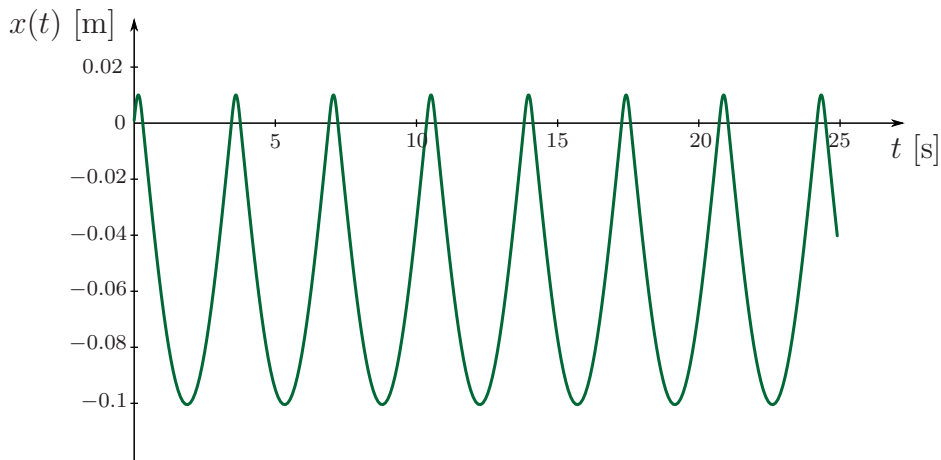


2.11. ábra. *Lengőrendszer fonaldarabokkal és nem előfeszített rugókkal.*

A két rögzítési pont távolsága l , a rugók továbbra is erőmentesek az egyensúlyi helyzetben. A fonaldarabok meglazulása miatt a rugók sem tudnak nyomóerőt felvenni, ezért *nemlineáris* lesz a lengőrendszer. Ez azt jelenti, hogy nem alakul ki harmonikus (szinuszos) rezgés: fél periódust tesz meg a test $\omega_{n,1} = \sqrt{k_1/m}$ körfrekvenciával amíg a k_1 rugó húzott, és fél periódust $\omega_{n,2} = \sqrt{k_2/m}$ körfrekvenciával amíg a k_2 rugó húzott. Ennek eredményeképpen olyan periodikus mozgás alakul ki, melynek periódusideje

$$T_{n,12} = \frac{\pi}{\omega_{n,1}} + \frac{\pi}{\omega_{n,2}}. \quad (2.28)$$

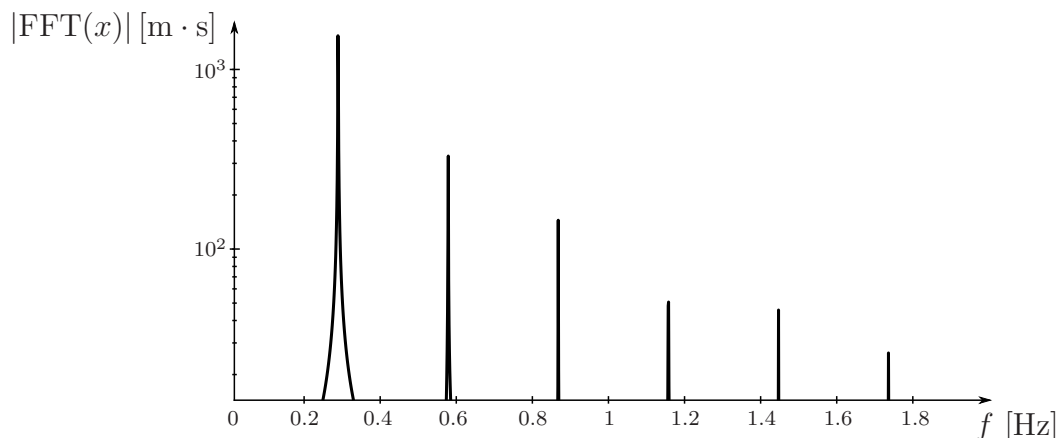
Egy ilyen rezgés kitérés-idő diagramját mutatja a 2.12. ábra. A periodikus, de nem harmoni-



2.12. ábra. *Periodikus, de nem harmonikus rezgés a pozitív és negatív kitéréshez tartozó eltérő merevség miatt. ($k_1 = 1000 \text{ N/m}$, $k_2 = 10 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $\omega_{n,1} = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_{n,2} = 1 \text{ rad/s}$, $T_{n,12} = 3,4558 \text{ s}$)*

kus rezgést végző lengőrendszerek mozgása több frekvenciakomponenst is tartalmaz. A 2.13. ábrán a kitérés ún. *gyors Fourier-transzformáltjának* (FFT = Fast Fourier Transform) abszolút értéke látható a frekvencia függvényében. A Fourier-transzformáció a Fourier-sorfejtés egy általánosítása, amiről a 2.6.1. fejezetben lesz szó. Megfigyelhető, hogy a legnagyobb csúcs $f_n = 1/T_{n,12} \approx 0,289 \text{ Hz}$ -nél helyezkedik el, ez az *alapharmonikus*. A többi csúcs – a *felharmonikusok* – ennek az *alapharmonikusnak* a többszöröseinél található.

Hasonló problémával szembesülünk akkor is, ha a kereskedelemben kapható rugókat használunk, ezek ugyanis vagy nyomó- vagy húzórugók. A nyomórugókon nincsen csatlakozó



2.13. ábra. A periodikus, de nem harmonikus rezgést végző lengőrendszer mozgásának frekvenciakomponensei. A felharmonikusok jobb kiemelése érdekében a függőleges tengely skálája logaritmikus.

szem, a húzórugók menetei pedig általában szorosan felfekszenek egymáson. Tehát húzórugók használata mellett nem meglazulást, hanem hirtelen megnövekedő merevséget tapasztalunk az egyik irányban.

Előfeszített rugók

Az ismeretett esetben a rugók *előfeszítésével* érhetjük el, hogy harmonikus rezgést végezzen a lengőrendszer. Helyezzük egymástól d -vel távolabbra a rugók rögzítési pontjait, ezzel összesen d -vel megnyújtva a két rugót! Ha az x koordinátát a k_1 rugó erőmentes helyzetétől mérjük, akkor $x = 0$ -ban a másik rugó megnyúlása d lesz. A rugóerők nagysága x kitérésnél $F_1 = k_1 x$ és $F_2 = k_2(d - x)$. Az $x = x_{st}$ egyensúlyi helyzetben (2.14./a ábra) mindkét rugó húzott és a rugóerők egyensúlyt tartanak:

$$k_1 x_{st} = k_2(d - x_{st}). \quad (2.29)$$

Ebből kiszámítható az egyensúlyi helyzet koordinátája:

$$x_{st} = \frac{k_2 d}{k_1 + k_2}. \quad (2.30)$$

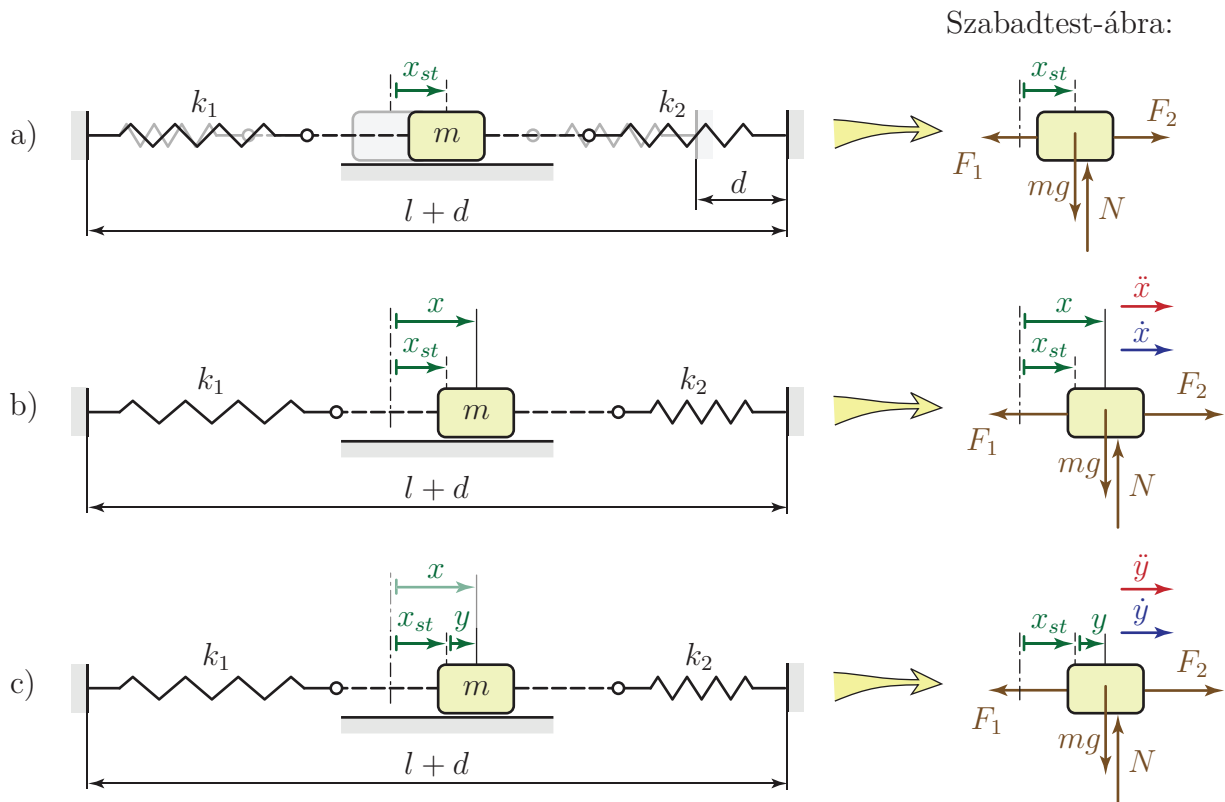
Rezgés közben – ha nem lazulnak meg a fonalak, tehát elég nagy az előfeszítés –, a mozgásegyenlet a 2.14/b szabadtest-ábra alapján

$$m\ddot{x} = k_2(d - x) - k_1 x,$$

amiből

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_2}{m}d. \quad (2.31)$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ennek az egyenletnek a megoldása $x(t) = A \sin(\omega_n t + \varepsilon) + x_{st}$. Tehát a rugók előfeszítése nem befolyásolja a rendszer sajátkörfrekvenciáját: $\omega_n^2 = (k_1 + k_2)/m$, ugyanúgy, mint a (2.27) feszítetlen esetben.



2.14. ábra. *Lengőrendszer előfeszített rugókkal. (a): egyensúlyi helyzet, mindkét rugóban ébred erő, (b): kitérített helyzet, az x koordinátát a k_1 rugó feszítetlen helyzetétől mérjük, (c): kitérített helyzet, az y koordinátát az egyensúlyi helyzettől mérjük.*

Ha bevezetünk egy új y koordinátát, amit a statikus egyensúlyi helyzettől mérünk, akkor a 2.14/c ábra alapján

$$x = y + x_{st}, \quad \text{ezért} \\ \ddot{x} = \ddot{y}.$$

Behelyettesítve ezt a (2.31) egyenletbe, és kihasználva, hogy x_{st} kifejezhető (2.30) szerint, azt kapjuk, hogy

$$\ddot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m}y = 0.$$

Tehát rugók előfeszítése során is érdemes a statikus egyensúlyi helyzettől mérni a koordinátát, ugyanis ez homogén differenciálegyenletre vezet – ugyanúgy, mint a 2.1.4 fejezetben tárgyalt esetben.

2.6. megjegyzés: A fonál akkor marad feszes, ha mindkét rugó megnyúlása pozitív. Ez akkor teljesül, ha az amplitúdó kisebb a rugók egyensúlyi helyzetben tapasztalható deformációjánál:

1. rugó megnyúlása: $x \geq 0 \Rightarrow y \geq -x_{st} \Rightarrow A \leq x_{st}$.

2. rugó megnyúlása: $d - x \geq 0 \Rightarrow y \leq d - x_{st} \Rightarrow A \leq d - x_{st}$.



A fentiek szerint a koordináta kezdőpontjának eltolásával a mozgásegyenletben szereplő konstans (időtől független) tagokat tudjuk módosítani, melyek időben állandó nagyságú erőhatásoknak feleltethetők meg. Mivel ezek az egyensúlyi helyzetben mindig zérus eredőjűek, az onnan mért koordinátával eltűnnek a konstans tagok és csak a lineáris vagy annál magasabb fokú tagok maradhatnak meg a mozgásegyenletben. A nemlineáris differenciálegyenletek megoldása jelentős matematikai nehézségeket okozhat, ezért a következő fejezetben megvizsgáljuk, hogy hogyan lehet ezeket lineáris egyenletekkel közelíteni.

2.2. Linearizálás

2.2.1. A nehézségi erő hatása II. – ingák

A 2.1.4. fejezetben láttuk, hogy egy egyenes mentén rezgő hasázból és rugóból álló lengőrendszer legfontosabb tulajdonságait nem befolyásolja a nehézségi erő. Az ott tárgyalt esetben a nehézségi erő a mozgásegyenlet konstans értékű tagjába került be, és így ki lehetett transzformálni az egyenletből. Egy adott testre ható nehézségi erő ugyan mindig állandó nagyságú, de vannak olyan mechanikai rendszerek, amelyek esetében a nehézségi erő rögzített pontra számított *nyomatéka* függ a kitéréstől. Az ilyen lengőrendszereket nevezzük *ingáknak*.

A *matematikai inga* egy fonálra függesztett pontszerű testből áll, mely a függőleges síkban mozoghat (2.44. ábra). A *fizikai ingát* egy vízszintes tengelyű csukló körül a függőleges síkban elfordulni képes merev test, pl. rúd alkotja⁹. Írjuk fel a 2.15. ábrán látható, homogén, l hosszúságú, m tömegű rúdból álló fizikai inga mozgásegyenletét!



2.15. ábra. Egyszerű fizikai inga és szabadtest-ábrája.

A szabadtest-ábrából látható, hogy a \mathbf{K} kényszererő O csuklópontra számított nyomatéka nulla. Mivel az inga síkmozgást végez, az O álló pontra felírt $\Theta_O \varepsilon + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Pi}_O = \mathbf{M}_O$ perdülettel a

$$\Theta_O \varepsilon_z = -mg \frac{l}{2} \sin(\varphi)$$

alakra egyszerűsödik, ahol ε_z a szöggyorsulás z irányú komponense¹⁰. Az O csuklóponton átmenő, a rajz síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték $\Theta_O = \frac{1}{3}ml^2$,

⁹Általánosabb esetben bármilyen irányban állhat a tengely (kivéve a függőleget). Gondoljunk például egy olyan ajtóra, amit nem függőleges egyenesen elhelyezkedő pántokra függesztenek fel. Az ajtó lengéseket végezhet egy bizonyos szöghelyzet körül, mint a fizikai inga.

¹⁰A pontra számított mennyiségek indexébe nagy betűt (pl. O), az adott ponton átmenő tengelyre felírt mennyiségek indexébe pedig kis betűt (pl. o) betűt írunk.

ezért $\varepsilon_z \equiv \ddot{\varphi}$ figyelembevételével a mozgásegyenlet

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + mg\frac{l}{2}\sin(\varphi) = 0. \quad (2.32)$$

Ez egy *nemlineáris közönséges differenciálegyenlet*, mert a φ szögkitérés szinuszával arányos a visszatérítő nyomaték. Ennek az egyenletnek nincs zárt alakú (analitikus) megoldása. Közelítő módszerek, vagy a 3.3. fejezetben részletezett számítógépes szimuláció segítségével lehet következtetni a megoldás jellegére.

Nemlineáris egyenletek szokásos közelítő megoldási módszere a *linearizálás az egyensúlyi helyzet(ek) körül*. Ez az eljárás csak akkor vezet elfogadható eredményre, ha az egyensúlyi helyzettől mért kitérések kicsik maradnak a rezgés során.

Első lépésben meg kell határozni a lehetséges egyensúlyi helyzeteket. Míg lineáris rendszereknek csak egy egyensúlyi helyzetük lehet, nemlineáris rendszerekre nincs ilyen megkötés. Egyensúlyi helyzetben a szögkitérés állandó, tehát ilyen, időben állandó megoldásokat kell keresnünk. A feltételezett konstans megoldást visszahelyettesítjük a (2.32) egyenletbe. $\varphi(t) \equiv \varphi_{st} = \text{állandó}$ miatt $\dot{\varphi} = 0$ és $\ddot{\varphi} = 0$, ezért φ_{st} lehetséges értékei meghatározhatók:

$$0 + mg\frac{l}{2}\sin(\varphi_{st}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{st} = \begin{cases} 0, & (2\pi, 4\pi, \dots), \\ \pi, & (3\pi, 5\pi, \dots). \end{cases}$$

Látható, hogy végtelen sok megoldást kapunk, de ezek közül elegendő csak az alsó egyensúlyi helyzetnek megfelelő $\varphi_{st}^{(1)} = 0$ és a függőleges felső helyzetet megadó $\varphi_{st}^{(2)} = \pi$ értékeket vizsgálnunk, hiszen fizikailag a többi megoldás is ezeknek a helyzeteknek felel meg.

Linearizálás az alsó egyensúlyi helyzet ($\varphi_{st}^{(1)} = 0$) körül

A linearizálás során arra törekszünk, hogy a mozgásegyenletben csak elsőfokú tagok maradjanak. A 2.1.4. fejezetben láttuk, hogy az állandó (nulladfokú) tagok eltűnnek az egyenletből, ha az egyensúlyi helyzettől vesszük fel a koordinátát. Vezessünk be most is egy új, (radiánban mért!) x koordinátát a $\varphi(t) = \varphi_{st}^{(1)} + x(t)$ összefüggéssel! x az egyensúlyi helyzettől való eltérést jellemzi. Feltevésünk szerint $x(t)$ végig kicsi marad a mozgás során, tehát az inga nem távolodik el nagyon az egyensúlyi helyzettől. Fejtsük Taylor-sorba a mozgásegyenletben szereplő $\sin(\varphi)$ kifejezést a $\varphi_{st}^{(1)} = 0$ egyensúlyi helyzet körül:

$$\sin(\varphi) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \approx x = \varphi. \quad (2.33)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Elhanyagoljuk}}$

A linearizálás azt jelenti, hogy a másod- vagy magasabb fokú tagokat elhanyagoljuk. Mivel $\ddot{\varphi} = \ddot{x}$, a mozgásegyenlet linearizált alakja a következő:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{x} + mg\frac{l}{2}x = 0. \quad (2.34)$$

Ez az egyenlet az alapmodell (2.2) differenciálegyenletére vezet:

$$\ddot{x} + \frac{3g}{2l}x = 0, \quad (2.35)$$

ahol ismét bevezethető az

$$\omega_n^2 = \frac{3g}{2l} \quad (2.36)$$

jelölés. A (2.35) egyenlet megoldása ismert (lásd (2.9)), és az inga periódusideje is kiszámítható a (2.20) képlet alapján, tehát

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}. \quad (2.37)$$

A linearizálás miatt ez csak egy közelítés, valójában az inga periódusideje nem független a kitéréstől.

2.7. megjegyzés: Felmerül a kérdés, hogy mekkora kitéréseket tekinthetünk elegendően kicsinek a linearizálás szempontjából. A közelítéstől elvárt pontosság természetesen függ az alkalmazástól. Ha a lengés amplitúdója $A = 0,1$ rad, akkor a szinuszfüggvény lineáris függvényvel történő helyettesítése során elkövetett relatív hiba maximális értéke

$$\frac{A - \sin(A)}{\sin(A)} \cdot 100 = 0,167 \text{ \%}.$$

Még $A = 0,5$ rad $\approx 28,65^\circ$ mellett is csak 4,29 % relatív hiba adódik.

A periódusidő pontosabban számítható a

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{A}{2} + \dots \right]$$

formulával [4]. Megmutatható, hogy a periódusidő pontos értéke és a (2.37) közelítő periódusidő közötti relatív hiba $A = 5^\circ$ esetén körülbelül 0,05%, 22° -nál éri el az 1%-ot és 90° -nál mintegy 18%. ♣

2.1. példa: *Tetszőleges alakú és tömegeloszlású, ingaként felfüggesztett merev testre a linearizált mozgásegyenlet*

$$\Theta_o \ddot{\varphi} + mgl_{OS} \varphi = 0$$

alakban írható fel, ahol l_{OS} az O felfüggesztési pont és az S súlypont távolsága. Innen a sajátkörfrekvencia és a periódusidő számítható $T_n = 2\pi/\omega_n$ és

$$\omega_n^2 = mg \frac{l_{OS}}{\Theta_o} \quad (2.38)$$

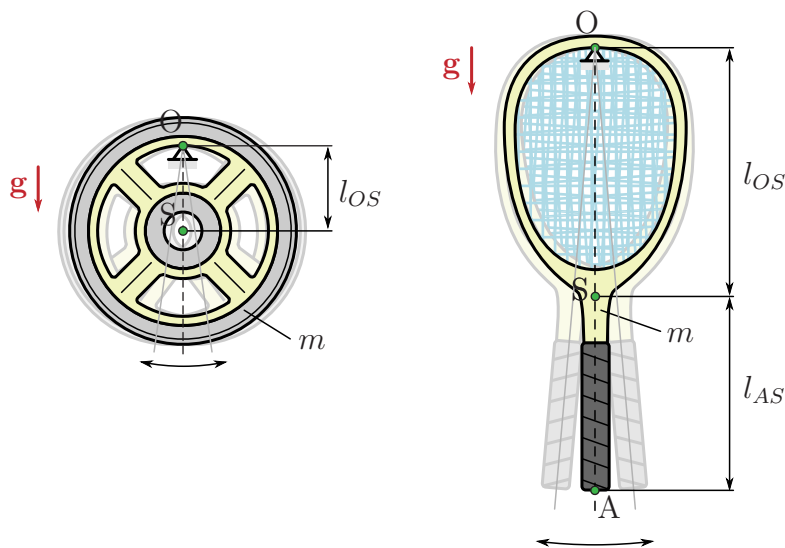
alapján. A fenti képletek bonyolult alakú alkatrészek tehetetlenségi nyomatékának a meghatározására is alkalmasak (lásd 2.16. ábra): az alkatrész tömege és súlypontjának helye, valamint – a testet az O pontban felfüggesztve – a lengés periódusideje is könnyen mérhető. A (2.38) képlet szerint

$$\Theta_o = mg \frac{l_{OS}}{\omega_n^2} = mg \frac{T_n^2 l_{OS}}{4\pi^2} \quad (2.39)$$

a test O ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka. A Steiner-tétel felhasználásával számítható az S súlypontban átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték is:

$$\Theta_s = \Theta_o - ml_{OS}^2. \quad (2.40)$$

Ha nem ismert az S súlypont helye és az l_{OS} távolság, akkor elvileg ez is meghatározható egy további periódusidő méréssel, melynek során a testet egy másik, A pontban függesztjük fel. A súlypont definíciójából következik, hogy egyensúlyban a felfüggesztett test S súlypontjának



2.16. ábra. Tehetetlenségi nyomaték meghatározása a periódusidő mérése alapján

az O felfüggesztési pont alatt kell lennie, tehát az OS egyenes meghatározható. Ha az A pontot ezen az egyenesen jelöljük ki, ismert l távolságban az O ponttól, akkor az ismeretlen l_{OS} és l_{AS} távolságokat, valamint a Θ_s tehetetlenségi nyomatékot az alábbi egyenletrendszer alapján határozhatjuk meg:

$$\Theta_s = \Theta_o - ml_{OS}^2 \equiv mg \frac{T_n^2 l_{OS}}{4\pi^2} - ml_{OS}^2, \quad (2.41)$$

$$\Theta_s = \Theta_a - ml_{AS}^2 \equiv mg \frac{\tilde{T}_n^2 l_{AS}}{4\pi^2} - ml_{AS}^2, \quad (2.42)$$

$$l = l_{AS} + l_{OS}. \quad (2.43)$$

Itt T_n és \tilde{T}_n az O illetve A ponton felfüggesztett test lengésének mérésrel meghatározott periódusidejét jelöli.

A gyakorlatban problémát okozhat, ha a mindig jelenlévő csillapítás miatt túl hamar lecseng a lengés, és ezért csak pontatlanul határozható meg a periódusidő (lásd 2.3.2. fejezet). Ezért általában pontosabb eredményekre vezet, ha a súlypont helyét abból a feltételből határozzuk meg, hogy annak egyensúlyban mindig a felfüggesztési pont alatt kell lennie. A példában tárgyalt mérés során csak a súlypont forgástengelytől mért távolsága számít. Tehát két különböző pontban felfüggesztve a testet, a súlypontot jellemző l_{OS} távolság két – mérésrel azonosított – egyenes metszéspontja segítségével határozható meg. ♠

2.8. megjegyzés: Ha a testhez rögzítünk egy xyz koordinátarendszert, akkor a test súlypontjára számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix

$$\Theta_S = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

alakban adható meg. Ha ennek minden komponensét meg akarjuk határozni, akkor felhasználhatjuk, hogy az

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

egységvektorral párhuzamos tengelyre számított súlyponti tehetetlenségi nyomaték (lásd [5])

$$\Theta_\xi = \mathbf{e}_\xi^T \Theta_S \mathbf{e}_\xi = \Theta_x x^2 + \Theta_y y^2 + \Theta_z z^2 - 2D_{xy}xy - 2D_{xz}xz - 2D_{yz}yz. \quad (2.46)$$

Ez azt jelenti, hogy ha hat különböző irányú tengelyre meghatározzuk a tehetetlenségi nyomaték értékét a fent leírt kísérlettel, akkor hat darab (2.46) alakú egyenletet írhatunk fel. Az egyenletek bal oldalán a mért tehetetlenségi nyomatékok vannak, a mérés során alkalmazott tengelyek irányvektorainak xyz koordinátái pedig ismertek, ezért egy hatismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk, melyből kiszámítható a mátrix hat darab ismeretlen komponense. ♣

Linearizálás a felső egyensúlyi helyzet ($\varphi_{st}^{(2)} = \pi$) körül

A megoldást ismét $\varphi(t) = \varphi_{st}^{(2)} + y(t)$ alakban írjuk fel, ahol $y(t)$ kicsi, a felső egyensúlyi helyzettől mért koordináta. A $\sin(\varphi)$ függvény Taylor-sora a $\varphi_{st}^{(2)} = \pi$ helyzet körül

$$\sin(\varphi) = \sin(\pi + y) = -\sin(y) = -y + \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{120} + \dots \approx -y.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Elhanyagoljuk}}$

Ezt visszahelyettesítjük a mozgásegyenletbe $\ddot{\varphi} = \ddot{y}$ figyelembevételével:

$$\ddot{y} - \frac{3g}{2l}y = 0.$$

Az eredményül kapott egyenlet most is hasonlít az alapmodell (2.2) differenciálegyenletére, de olyan, mintha negatív merevségű rugót alkalmaztunk volna. A negatív merevség a felső egyensúlyi helyzetet instabillá teszi: ha a lengőrendszer kicsit is eltávolodik az instabil egyensúlyi helyzettől, akkor a nehézségi erő nyomatékának hatására tovább nő a kitérés, és a felfelé fordított inga eldől, nem jön létre rezgés.¹¹

Az egyensúlyi helyzet stabilitását az ún. *Routh-Hurwitz-kritériumok* [7, 16] alapján lehet ellenőrizni. A kritériumok szerint a csillapítatlan lengőrendszer mozgásegyenletében x és \ddot{x} együtthatója azonos előjelű kell legyen a stabilitáshoz, azaz $k > 0$ szükséges a rezgés létrejöttéhez (ezzel kapcsolatban lásd még a 3.38. megjegyzést). Az inga alsó egyensúlyi helyzete tehát stabil, a felső pedig instabil.

A megoldást $y(t) = Ae^{\lambda t}$ alakban keressük. Visszahelyettesítve a mozgásegyenletbe, $\ddot{y}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$ felhasználásával a

$$\left(\lambda^2 - \frac{3g}{2l}\right) Ae^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \frac{3g}{2l} = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei valósak:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

A mozgástörvényt az ezekkel a gyökökkel felírt alapmegoldások lineáris kombinációja adja, tehát

$$\varphi(t) = \varphi_{st}^{(2)} + y(t) \approx \pi + C_1 e^{\sqrt{\frac{3g}{2l}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{3g}{2l}}t}. \quad (2.47)$$

¹¹Ezt *statikus stabilitásvesztésnek* nevezi a szakirodalom, szemben az ún. *dinamikus stabilitásvesztéssel*, amikor növekvő amplitúdójú rezgések alakulnak ki.

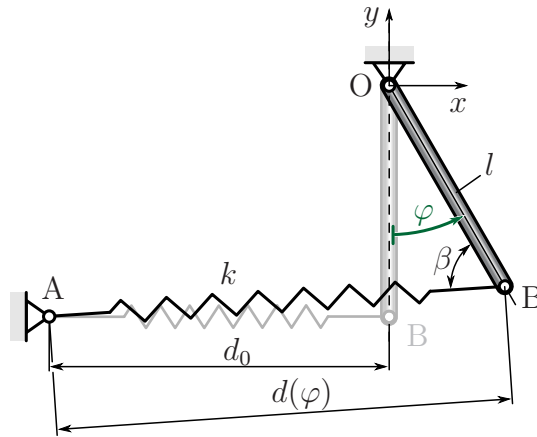
Mivel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\sqrt{\frac{3g}{2l}}t} = \infty,$$

az inga eldőlése során exponenciális ütemben kezd távolodni a felső – *instabil* – egyensúlyi helyzettől. Természetesen csak a felső egyensúlyi helyzet közelében használható a (2.47) képlet, így az egyensúlyi helyzettől való távolodás üteme is csak legfeljebb $y = 0,1-0,2$ rad kitérés eléréséig tekinthető exponenciálisnak, a 2.7. megjegyzésnek megfelelően.

2.2.2. Linearizálás és rugók

Ha egy tengely körül elfordulni képes merev testhez – például rúdhoz – a 2.17. ábra szerint kapcsolunk egy csavarrugót, akkor a mozgás leírásához ismét szükség van a mozgásegyenlet linearizálására.



2.17. ábra. Elforguló rúdhoz rögzített, eredetileg d_0 hosszúságú rugó megnyúlása.

Vegyük fel a koordináta-rendszer origóját a rúd O felfüggesztési pontjában! Ha a rugó az egyensúlyi helyzetben d_0 hosszúságú¹², akkor a rögzített A végpontjának a helyvektora $\mathbf{r}_A = [-d_0 \quad -l \quad 0]^T$. A rúd φ -vel kitérített helyzetében a rugó másik végpontja az $\mathbf{r}_B = [l \sin(\varphi) \quad -l \cos(\varphi) \quad 0]^T$ pontba kerül. Ebből a rugó φ kitéréshez tartozó $d(\varphi)$ hossza

$$d(\varphi) = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| \equiv \sqrt{(l \sin(\varphi) + d_0)^2 + (l - l \cos(\varphi))^2}, \quad (2.48)$$

megnyúlása pedig

$$\Delta d \equiv d(\varphi) - d_0 = \sqrt{(l \sin(\varphi) + d_0)^2 + (l - l \cos(\varphi))^2} - d_0. \quad (2.49)$$

Ezt a kifejezést $\varphi = 0$ körül Taylor-sorba fejtve a következőt kapjuk:

$$\Delta d \approx l\varphi - \frac{1}{6}l\varphi^3 + \frac{1}{8}\frac{l^2}{d_0}\varphi^4 + \dots \quad (2.50)$$

¹²Nem kell nyújthatatlannak is lennie a rugónak az egyensúlyi helyzetben. Az egyensúlyi helyzet körül linearizálunk, ezért ha előfeszített a rugó (például ha a rúdtól jobbra is teszünk egy rugót vagy – a rendszert 90° -kal elforgatva – a nehézségi erő okoz előfeszítést), akkor az itt közölt számítás csak a rugóerő illetve -nyomaték dinamikus részét adja meg, a statikus rész az előfeszítésből számítható.

Mivel csak a negyedfokú tagban jelenik meg a rugó eredeti d_0 hossza, ezt a paramétert nem vesszük figyelembe a modelljeinkben. Az viszont látszik a fenti sorfejtésből, hogy minél nagyobb a rugó eredeti hossza a rúd hosszához képest, annál kisebb a negyedfokú tag együtthatója. A rugó hosszának tehát nincs jelentős szerepe a mozgásegyenlet megoldása szempontjából. Ez a közelítés teszi lehetővé, hogy egy több rugóból álló rugókapcsolást egyetlen rugóval helyettesítsünk, hiszen nehézkes lenne külön-külön minden egyes rugó hosszát számításba venni.

A mozgásegyenletek analitikus megoldásához szükség van a linearizálásra, ezért a rugó megnyúlását a következő linearizált alakban fejezzük ki: $\Delta d = l\varphi$. Így a rugóerő nagysága közelítőleg

$$F_r = kl\varphi. \quad (2.51)$$

2.9. megjegyzés: A (2.50) egyenlet szerint harmadfokú tagokig helyes eredményt kapunk, ha a rugó megnyúlását a $\Delta d \approx l \sin(\varphi) = l\varphi - \frac{1}{6}l\varphi^3 + \dots$ képlet alapján számítjuk. Ez azt jelenti, hogy valamivel pontosabb a rugóerő kifejezése, ha a φ koordináta helyett a rúd végpontjának vízszintes irányú elmozdulását megadó

$$x = l \sin(\varphi) \quad (2.52)$$

koordinátával írjuk le a mozgást és az x -ben lineáris tagokat tartjuk meg: $F_r \approx kx$. ♣

A rugóerő az \mathbf{r}_{BA} vektorral párhuzamos, tehát kifejezhető $\mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_{BA}$ alakban, ahol \mathbf{e}_{BA} a BA egyenessel párhuzamos egységvektor. A rugóerő O pontra kifejtett nyomatéka

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_r. \quad (2.53)$$

Ez alapján a rugóerő erőkarja kifejezhető

$$l_r = |\mathbf{r}_B \times \mathbf{e}_{BA}|, \quad (2.54)$$

a rugó és a rúd által bezárt szög pedig

$$\sin(\beta) = |\mathbf{e}_B \times \mathbf{e}_{BA}| \quad (2.55)$$

alakban, ahol $\mathbf{e}_B = \mathbf{r}_B/|\mathbf{r}_B| \equiv \mathbf{r}_B/l$. Természetesen mind az l_r erőkar, mind a β szög függ a φ szögkitéréstől. A részleteket mellőzve, az erőkar kifejezését $\varphi = 0$ körül sorba fejtve

$$l_r = l - \frac{1}{2}l\varphi^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{d_0}\varphi^3 + \frac{1}{24}l\left(1 - 15\frac{l^2}{d_0^2}\right)\varphi^4 + \dots \quad (2.56)$$

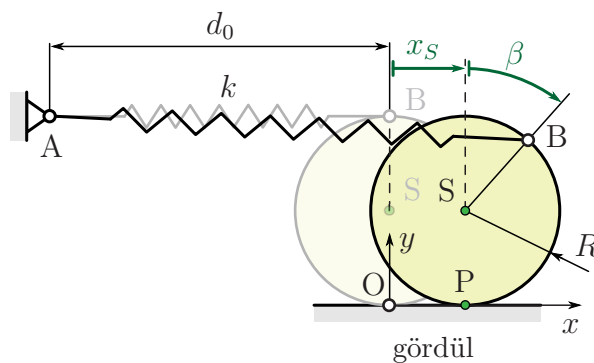
Az elsónél magasabb fokú tagok elhanyagolásával azt kapjuk, hogy a rugóerő erőkarja

$$l_r \approx l,$$

így a (2.51) egyenletet felhasználva kifejezhető a rugóerő által az O ponton átmenő tengelyre kifejtett nyomaték nagysága lineáris közelítésben:

$$M_o = F_r l_r \approx kl^2\varphi. \quad (2.57)$$

2.10. megjegyzés: A (2.56) egyenlet szerint másodfokig helyes eredményt kapunk, ha az erőkart az $l_r \approx l \cos(\varphi)$ formulával közelítjük, hiszen $\cos(\varphi) \approx 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/24$. Az egyenletek linearizálásakor azonban kiesik a másodfokú tag, ezért általában nem érdemes élni ezzel a közelítéssel. ♣



2.18. ábra. Gördülő koronghoz rögzített rugó megnyúlása.

Hasonló problémával találkozunk, ha egy gördülő korong pereméhez rögzített rugó megnyúlását vizsgáljuk. Tekintsük a 2.18. ábrán vázolt rendszert! A korong sugara R , a rugó d_0 hosszúságú, és vízszintesen helyezkedik el az egyensúlyi helyzetben. A koordináta-rendszer O origója a korong és a talaj érintkezési pontja az egyensúlyi helyzetben.

A korong β szöggel való elfordulásakor a súlypont $x_S = R\beta$ távolsággal mozdul el, a rugó B bekötési pontjának helyzete pedig

$$\mathbf{r}_B = R \begin{bmatrix} \beta + \sin(\beta) & 1 + \cos(\beta) & 0 \end{bmatrix}^T$$

lesz, akár a rugótól távolodva ($\beta > 0$), akár a rugóhoz közeledve ($\beta < 0$) gördül a korong. Mivel a rugó rögzített végpontja az $\mathbf{r}_A = [-d_0 \ 2R \ 0]^T$ pontban található, az \overline{AB} távolság és a rugó $\Delta d = |\mathbf{r}_{BA}| - d_0$ megnyúlása könnyen kiszámítható:

$$\Delta d = \sqrt{(R\beta + R\beta \sin(\beta) + d_0)^2 + (R + R\cos(\beta) - 2R)^2} - d_0,$$

amit $\beta = 0$ körül sorba fejtve:

$$\Delta d = 2R \beta - \frac{1}{6} R\beta^3 + \frac{1}{8} \frac{R^2}{d_0} \beta^4 + \dots$$

Tehát lineáris közelítésben

$$\Delta d \approx 2R \beta, \quad (2.58)$$

a rugóerő pedig $F_r \approx k\Delta d$. Az $\mathbf{r}_{PB} = [R \sin(\beta) \ R + R \cos(\beta) \ 0]^T$ és $\mathbf{r}_{BA}/|\mathbf{r}_{BA}|$ vektorok vektoriális szorzatából számítható ki a rugóerő aktuális P póluspontra számított l_p erőkarja, aminek a $\beta = 0$ körüli Taylor-sora

$$l_p = 2R - \frac{1}{2} R\beta^2 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{d_0} \beta^3 + \frac{1}{24} R \left(1 - 30 \frac{R^2}{d_0^2} \right) \beta^4 + \dots \approx 2R. \quad (2.59)$$

Tehát a gördülő korong példájában a rugóerő póluspontra számított nyomatéka

$$M_p = k\Delta d l_p \approx k(2R)^2 \beta.$$

Ugyanezt a számítást elvégezve az $\mathbf{r}_{SB} = [R \sin(\beta) \ R \cos(\beta) \ 0]^T$ vektor segítségével, az S súlypontra számított nyomaték erőkarja

$$l_s = R - \frac{1}{2} R\beta^2 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{d_0} \beta^3 + \frac{1}{24} R \left(1 - 27 \frac{R^2}{d_0^2} \right) \beta^4 + \dots \approx R. \quad (2.60)$$

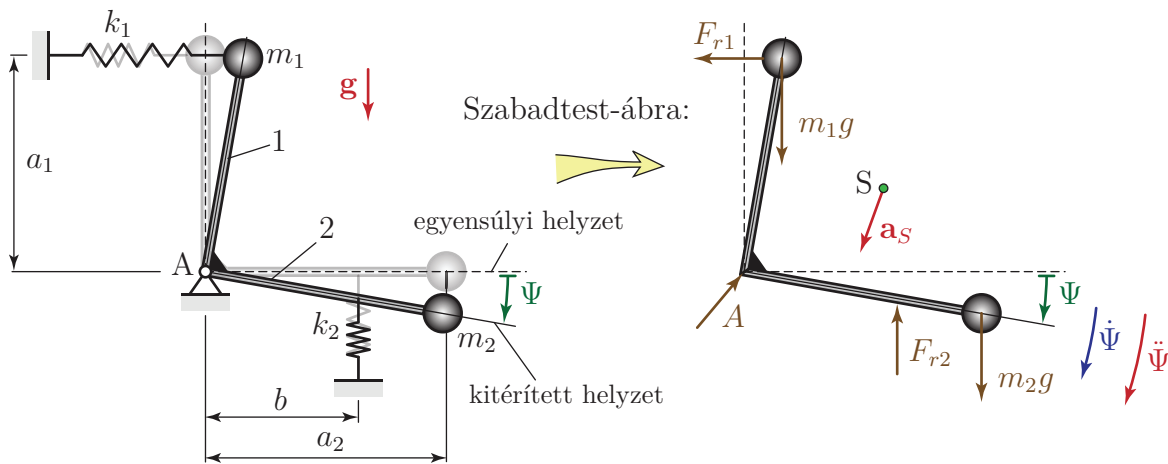
A fentiek szerint a rugóerő súlypontra számított nyomatéka

$$M_s = k\Delta d l_s \approx 2kR^2 \beta.$$

2.2.3. Nehézségi erő kettős szerepben

Míg az ingák esetében a nehézségi erő nyomatéka határozza meg a lengőrendszer saját-körfrekvenciáját (2.2.1. fejezet), a 2.1.4. fejezetben vizsgált feladatban a nehézségi erő nem befolyásolta a lengőrendszer legfontosabb paramétereit. Hogy világosan elkülöníthető legyen, mikor milyen szerepet játszik a nehézségi erő, vizsgáljunk meg egy összetettebb feladatot két változatban!

A 2.19. ábrán vázolt, két egymásra merőleges, elhanyagolható tömegű, összehegesztett rúdból álló szerkezetre m_1 és m_2 tömegű pontszerű testek vannak rögzítve. A szerkezet k_1 illetve k_2 merevségű rugókkal kapcsolódik a környezethez, és a függőleges síkban kis kitérésű lengéseket végez. A rugók merőlegesek a hozzájuk kapcsolt rudakra a rudak függőleges illetve vízszintes helyzetében. Írjuk fel a linearizált mozgásegyenletet!



2.19. ábra. A lengőrendszer modellje és szabadtest-ábrája. Egyensúlyban az 1-es rúd függőleges.

1. eset: az 1-es rúd függőleges, a 2-es rúd vízszintes az egyensúlyi helyzetben

Statikus egyensúlyi helyzetben az m_2 tömegű testre ható nehézségi erő nyomatékával a rugók $M_{1st} = F_{1st}a_1$ és $M_{2st} = F_{2st}b$ nyomatékai tartanak egyensúlyt. Mivel statikailag határozatlan a szerkezet (a csukló mellett két alátámasztásnak felel meg a két rugó), a két statikus rugóerő viszonyának meghatározásához további információkra lenne szükség. A pontos számítást általános esetben a 2.2.2. fejezet alapján lehetne elvégezni, ha ismert lenne a rugók nyújtatlan hossza és hogy milyen szöghelyzetben nyújtatlanok a rugók. Feladatokban az egyszerűbb számítás kedvéért gyakran felteszik, hogy az egyensúlyi helyzetben csak az egyik rugó van előfeszítve (az „tartja” a szerkezetet), a másik erőmentes.

Mérhetjük a szögkitérését valamelyik – például az 1-es – rugó erőmentes helyzetétől, egy φ koordinátával (lásd 2.20 ábra)! Ekkor az 1-es rugó által kifejtett $M_1(\varphi)$ nyomatékot a Taylor-sorfejtés szabályai szerint az

$$M_1(\varphi) \approx M_1(\varphi_{st}) + \underbrace{\left. \frac{dM_1(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{st}}}_{:=K_1} (\varphi - \varphi_{st}) = M_{1st} - K_1\varphi_{st} + K_1\varphi \quad (2.61)$$

formulával lehet linearizálni a φ_{st} egyensúlyi helyzet közelében, ahol $M_1(\varphi_{st}) = M_{1st}$. Hasonló kifejezést kapunk a 2-es rugó esetében is. Mivel az egyensúlyi helyzetben kifejtett M_{1st} és M_{2st} statikus nyomatékok egyensúlyt tartanak az előfeszítő nyomatékkal – ami jelen esetben a nehézségi erő nyomatéka –, már előre lehet tudni, hogy ezek a tagok kiesnek a mozgásegyenletből. Azonban a φ koordináta használatának az a következménye, hogy megmaradnak a mozgásegyenletben a $-K_1\varphi_{st}$ (illetve a másik rugó esetében $-K_2\varphi_{st}$) alakú konstans tagok. A (2.61) képletből látszik, hogy akkor tűnnek el ezek a konstans tagok a linearizált mozgásegyenletből, ha a szerkezet mozgását az *egyensúlyi helyzettől* mért $\Psi = \varphi - \varphi_{st}$ szögkitéréssel írjuk le – hasonlóan, mint a 2.1.4. fejezetben. A továbbiakban használjuk ezt a Ψ koordinátát!

A 2.19 szabadtest-ábra alapján felírható a rendszer mozgásegyenlete:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} = m_1 g a_1 \sin(\Psi) + m_2 g a_2 \cos(\Psi) - M_1(\Psi) - M_2(\Psi),$$

ahol $M_1(\Psi)$ és $M_2(\Psi)$ a rugók által kifejtett, szögkitéréstől függő nyomatékokat jelöli; a pontos kifejezések a (2.49) képlethez hasonlóan bonyolultak, így ezeket nem írjuk ki.

Linearizáljuk ezt az egyenletet a $\Psi = 0$ egyensúlyi helyzet közelében! A statikus egyensúlyi helyzetben a két rugó M_{1st} illetve M_{2st} statikus nyomatékot fejt ki, amikhez kitérített helyzetben hozzá kell adni a Ψ -től függő – lineáris közelítésben Ψ -vel arányos – $M_{1din}(\Psi)$ illetve $M_{2din}(\Psi)$ dinamikus tagokat:

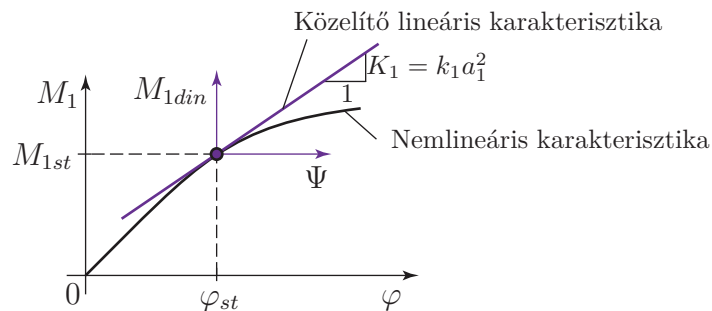
$$M_1(\Psi) = M_{1st} + M_{1din}(\Psi),$$

$$M_2(\Psi) = M_{2st} + M_{2din}(\Psi).$$

Az előző fejezetből ismert, hogy pl. a k_1 merevségű rugó egyensúlyi helyzetéhez képest mért megnyúlása lineáris közelítésben $a_1\Psi$, az erőkar pedig közelítőleg a_1 . A rugóerő – a nyomatékhoz hasonlóan – statikus és dinamikus összetevőkre bontható, azaz $F_{r1} = F_{1st} + F_{1din}(\Psi) \approx F_{1st} + k_1 a_1 \Psi$, a nyomaték pedig $M_1(\Psi) \approx F_{r1} a_1 \approx M_{1st} + k_1 a_1^2 \Psi$ alakban írható fel. Tehát a nyomaték *megváltozása* kis Ψ kitérések esetén közelíthető a (2.57) képlet és a 2.20. ábra alapján, azaz

$$M_1(\Psi) \approx M_{1st} + k_1 a_1^2 \Psi \quad \text{és}$$

$$M_2(\Psi) \approx M_{2st} + k_2 b^2 \Psi.$$



2.20. ábra. Az 1-es rugó által kifejtett nyomaték linearizálása az egyensúlyi helyzet közelében. φ az 1-es rugó erőmentes helyzetétől mért szögkoordináta.

Felhasználva, hogy $\Psi = 0$ közelében

$$\begin{aligned}\sin(\Psi) &\approx \Psi \quad \text{és} \\ \cos(\Psi) &\approx 1\end{aligned}$$

(lásd 2.10. megjegyzés), a nehézségi erővel kapcsolatos tagok is linearizálhatók, és a linearizált mozgásegyenlet a következő alakban írható fel:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} = m_1 g a_1 \Psi + m_2 g a_2 - (M_{1st} + k_1 a_1^2 \Psi) - (M_{2st} + k_2 b^2 \Psi).$$

Az egyenletet rendezve:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} + (k_1 a_1^2 + k_2 b^2 - m_1 g a_1) \Psi = \underbrace{m_2 g a_2 - M_{1st} - M_{2st}}_{=0}. \quad (2.62)$$

Az egyenlet jobb oldalán látható kifejezés az egyensúlyi helyzetben ható nyomatékok eredője, ami definíció szerint zérus. Ebből a feltételből lehet meghatározni a statikus rugóerőt. Például ha a k_1 rugó erőmentes ($M_{1st} = 0$, $F_{1st} = 0$) az egyensúlyi helyzetben, akkor (2.62) jobb oldala szerint a k_2 rugó által kifejtett $M_{2st} = F_{2st} b$ nyomaték

$$m_2 g a_2 - M_{2st} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{2st} = m_2 g a_2,$$

így

$$F_{2st} = \frac{m_2 g a_2}{b}.$$

Tehát ismét azt látjuk, hogy a mozgásegyenlet homogén, ha a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátát:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} + (k_1 a_1^2 + k_2 b^2 - m_1 g a_1) \Psi = 0.$$

A függőleges helyzet körül mozgó rúdra helyezett m_1 tömegű testre ható nehézségi erő nyomatéka lineáris közelítésben egyenesen arányos a szögkitéréssel: $m_1 g a_1 \sin(\Psi) \approx m_1 g a_1 \Psi$, és olyan értelmű, hogy növelné a szerkezet kitérését. Ezért a lengőrendszer merevségét csökkenti ez a tag. Egy lefelé lógó rúd végére helyezett test esetében természetesen növekedne a merevség, amint a 2.2.1. fejezetben láttuk. A vízszintes helyzet körül mozgó rúdon lévő m_2 tömegű testre ható $m_2 g a_2 \cos(\Psi)$ nyomaték viszont kis kitérések esetén jó közelítéssel állandó marad, ugyanúgy, mint a 2.1.4. fejezet feladatában – ezért esik ki ez a tag a linearizált mozgásegyenletből.

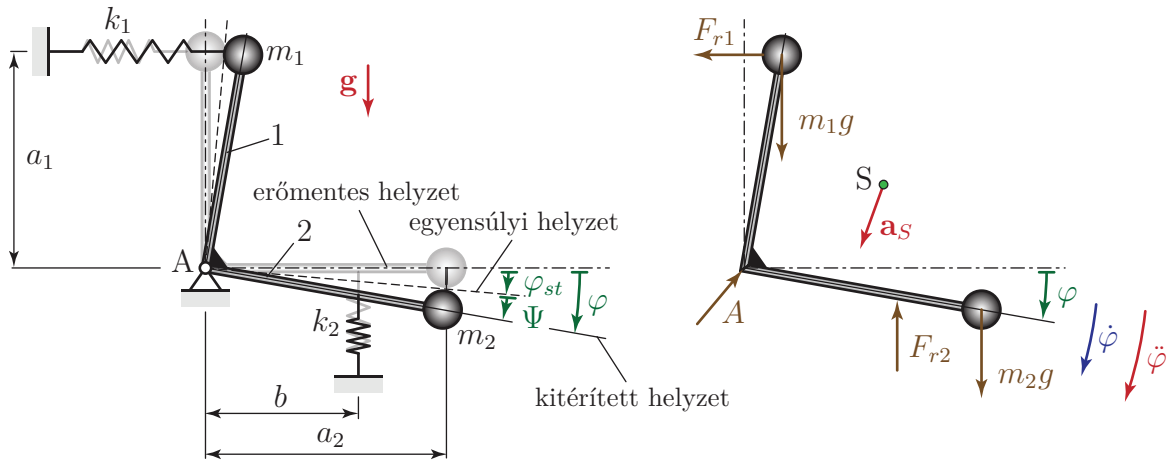
2. eset: feszítetlen rugók az 1-es rúd függőleges, 2-es rúd vízszintes helyzetében

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az 1-es rúd függőleges helyzetében a rugók erőmentesek! Ettől az erőmentes helyzettől mérjük a φ koordinátát.

Az m_2 tömegű testre ható nehézségi erő miatt nem $\varphi = 0$ -ban, hanem egy egyelőre ismeretlen $\varphi = \varphi_{st}$ szöghelyzetben van az egyensúlyi helyzet. Ebben a ferde helyzetben mindkét rugó meg van feszítve. Az egyensúlyi helyzettől mért szögkitérést jelöljük most is $\Psi \equiv \varphi - \varphi_{st}$ -vel! A feladat kiírása szerint ez a szög kicsi, hiszen a rezgések az egyensúlyi helyzet körül történnek.

A 2.21 szabadtest-ábra alapján felírható a rendszer mozgásegyenlete:

$$\Theta_a \ddot{\varphi} = m_1 g a_1 \sin(\varphi) + m_2 g a_2 \cos(\varphi) - M_1(\varphi) - M_2(\varphi),$$



2.21. ábra. Lengőrendszer az 1-es rúd függőleges helyzetében erőmentes rugókkal.

ahol a rugó által kifejtett $M_1(\varphi)$ és $M_2(\varphi)$ nyomatékok pontos felírása még nehezebb lenne, mint az előbb tárgyalt esetben, hiszen egyensúlyi helyzetben a rugóerők és a rudak nem merőlegesek egymásra: a bezárt szög a (2.55) képlet alapján határozható meg, $\varphi = \varphi_{st}$ behelyettesítésével.

Első lépésben linearizáljuk a nehézségi erővel kapcsolatos tagokat a $\Psi = 0$ statikus egyensúlyi helyzet körül! Felhasználva, hogy $\ddot{\Psi} \equiv \ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_{st} = \ddot{\varphi}$ és hogy $\varphi = \varphi_{st}$ körüli Taylor-sorfejtéssel

$$\begin{aligned}\sin(\varphi) &= \sin(\varphi_{st}) + \cos(\varphi_{st})(\varphi - \varphi_{st}) + \dots \approx \sin(\varphi_{st}) + \cos(\varphi_{st})\Psi, \\ \cos(\varphi) &= \cos(\varphi_{st}) - \sin(\varphi_{st})(\varphi - \varphi_{st}) + \dots \approx \cos(\varphi_{st}) - \sin(\varphi_{st})\Psi,\end{aligned}$$

felírható a mozgásegyenlet az egyensúlyi helyzettől mért Ψ koordinátával:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} = m_1 g a_1 \sin(\varphi_{st}) + m_1 g a_1 \cos(\varphi_{st})\Psi + m_2 g a_2 \cos(\varphi_{st}) - m_2 g a_2 \sin(\varphi_{st})\Psi - M_1(\Psi) - M_2(\Psi).$$

Látható, hogy a ferde egyensúlyi helyzet miatt most már mindkét anyagi pontra ható nehézségi erő bekerült a konstans és a Ψ -vel arányos tagokba is.

Az M_1 és M_2 nyomatékokat ismét lehet közelíteni $M_i = M_{ist} + K_i\Psi$, $i = 1, 2$ alakban, hiszen ez annak felel meg, hogy a $\varphi = \varphi_{st}$, azaz $\Psi = 0$ helyzet körül linearizáljuk a rugók nyomatékát megadó karakterisztikát, a 2.20. ábra szerint. Ekkor az állandó nagyságú tagok összege újra zérus értéket ad, hiszen $\Psi = 0$ -ban definíció szerint egyensúly van:

$$m_1 g a_1 \sin(\varphi_{st}) + m_2 g a_2 \cos(\varphi_{st}) - M_{1st} - M_{2st} = 0. \quad (2.63)$$

Így megint homogén differenciálegyenletre jutunk:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} + (K_1 + K_2 + m_2 g a_2 \sin(\varphi_{st}) - m_1 g a_1 \cos(\varphi_{st}))\Psi = 0. \quad (2.64)$$

A problémát a $K_{1,2}$ együtthatók meghatározása jelenti. Most – mivel nem merőlegesek a rugók a rudakra az egyensúlyi helyzetben – a rugók által kifejtett dinamikus nyomatékot nem adja meg pontosan a (2.57) képlet.

Ha el akarjuk kerülni a 2.2.2. fejezetben bemutatotthoz hasonló, hosszú számítást és közvetlenül fel akarjuk írni a lineáris mozgásegyenletet, akkor egy további feltételezéssel kell

élnünk: a (2.57) képlet alkalmazásához *feltesszük, hogy a φ_{st} statikus szögkitérés is kicsi, nemcsak a rezgés amplitúdója.*

Ha φ_{st} és Ψ egyaránt kicsi, akkor $\varphi = \varphi_{st} + \Psi$ is kicsinek tekinthető, tehát $\sin(\varphi) \approx \varphi = \varphi_{st} + \Psi$ és $\cos(\varphi) \approx 1$, továbbá a rugók és a rudak közötti szög közel 90 fokos: $\beta \approx \pi/2$. Valójában tehát kétszeresen is linearizálunk. Most már alkalmazható a (2.57) képlet a nyomaték dinamikus részének számítására. Például az 1-es rugó nyomatéka $M_1 = M_{1st} + M_{d1} \approx k_1 a_1^2 \varphi_{st} + k_1 a_1^2 \Psi$. Ebben az esetben tehát ki tudjuk fejezni az egyensúlyi helyzetben ébredő rugóerőt $F_{1st} \approx k_1 a_1 \varphi_{st}$ alakban, a K_1 együttható pedig $K_1 = k_1 a_1^2$.

A (2.64) egyenletben így $\sin(\varphi_{st}) \approx \varphi_{st}$ miatt $m_2 g a_2 \sin(\varphi_{st}) \Psi \approx m_2 g a_2 \varphi_{st} \Psi$, azaz két kis mennyiséget szorzunk össze, ami lineáris közelítésben elhanyagolható. Továbbá $\cos(\varphi_{st}) \approx 1$, ezért a lineáris mozgásegyenlet:

$$\Theta_a \ddot{\Psi} + (k_1 a_1^2 + k_2 b^2 - m_1 g a_1) \Psi = 0, \quad (2.65)$$

tehát ugyanarra az egyenletre jutottunk, mint az első esetben. Azonban a két esetben fizikailag eltérő a $\Psi = 0$ egyensúlyi helyzet: az első esetben $\Psi = 0$ mellett az 1-es rúd függőleges, a 2-es esetben pedig φ_{st} szöget zár be a függőlegessel.

Fontos, hogy a kapott mozgásegyenlet csak akkor helyes, ha tényleg kicsi a φ_{st} szögkitérés. Ennek ellenőrzéséhez a (2.63) egyenletet használhatjuk fel. Ha alkalmazzuk a φ_{st} szerinti linearizálást, akkor $M_{1st} \approx k_1 a_1^2 \varphi_{st}$ és $M_{2st} \approx k_2 b^2 \varphi_{st}$ miatt

$$m_1 g a_1 \varphi_{st} + m_2 g a_2 - k_1 a_1^2 \varphi_{st} - k_2 b^2 \varphi_{st} \approx 0,$$

amiből

$$\varphi_{st} \approx \frac{m_2 g a_2}{k_1 a_1^2 + k_2 b^2 - m_1 g a_1}.$$

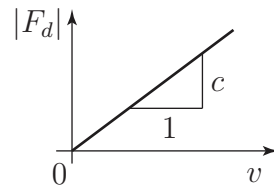
Ha az így kapott érték elég kicsi, akkor jogos az alkalmazott közelítés.

2.3. Viszkózus csillapítású szabad rezgés

A közegellenállás és a lengőrendszert alkotó anyagok belső csillapítása következtében a szabad lengések során a mechanikai energia csökken, hő termelődik. Ezt a folyamatot *diszzipációnak* nevezik. Így a valóságban nem maradhat fenn az az állandó amplitúdójú rezgés, amit a csillapítatlan esetben láttunk. A gépészmérnöki gyakorlatban a sebességgel arányos, ún. viszkózus csillapítás a legjelentősebb – jó közelítéssel ilyen a csillapítás jellege folyadékok lamináris áramlása, egymáson csúszó kent felületek, lengéscsillapítók és a belső, anyagi csillapítás esetében is.

Modellünkben a csillapítóerő lineárisan függ a v sebességtől, és azzal ellentétes irányú: $F_d = -cv$, lásd 2.22. ábra. A szabadtest-ábrák rajzolása során – a rugóerő ábrázolásához hasonlóan –, a negatív előjel kiírása helyett $F_d = cv$ nagyságú erőt veszünk fel, a sebességgel ellentétes irányban.

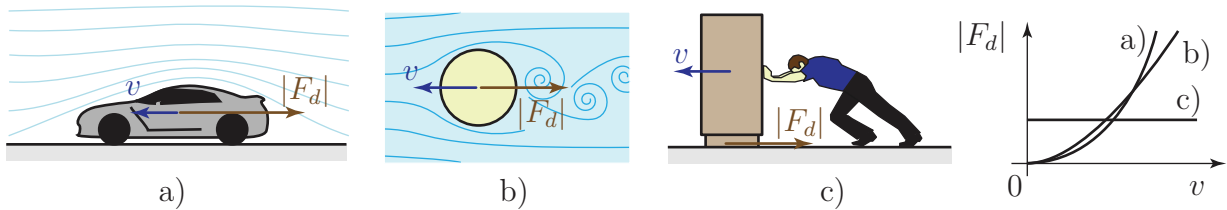
Itt c a *csillapítási tényező*, melynek mértékegysége Ns/m. Feltesszük, hogy a csillapítási tényező azonos értékű pozitív és negatív sebességek esetén. Megjegyezzük, hogy ez a gyakorlatban nem mindig van így, például gépkocsik lengéscsillapítói gyakran kisebb ellenállást fejtenek ki az összenyomással szemben, mint a húzás ellenében. Ebben az esetben hasonló helyzet áll elő, mint amit a 2.1.5. fejezetben vázoltunk a fonalakkal összekötött, csak húzásnak kitett rugók kapcsán: a mozgás két szakaszában különbözőek lesznek a rezgés paraméterei.



2.22. ábra. A viszkózus csillapítóerő karakterisztikája.

A viszkózus csillapítás mellett más csillapítási karakterisztikájú modelleket is alkalmaznak az alábbi – a 2.23. ábrán szemléltetett – esetekben.

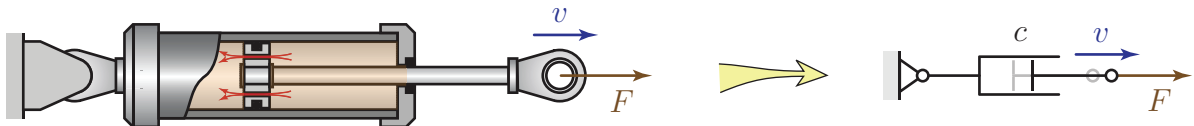
- Áramló gázok: $F_d = -cv^2 \operatorname{sgn}(v)$
- Turbulens áramlás: $F_d = -c|v|^{1,75} \operatorname{sgn}(v)$
- Száraz (Coulomb-) súrlódás: $F_d = -cv^0 \operatorname{sgn}(v)$.



2.23. ábra. Példák különböző karakterisztikájú csillapítóerőkre. (a) áramló gázok, (b) turbulens áramlás, (c) száraz súrlódás.

Megállapítható, hogy mindegyik esetben $F_d = -c|v|^n \operatorname{sgn}(v)$, alakban fejezhető ki a csillapítóerő. Viszkózus csillapítás esetén $n = 1$.

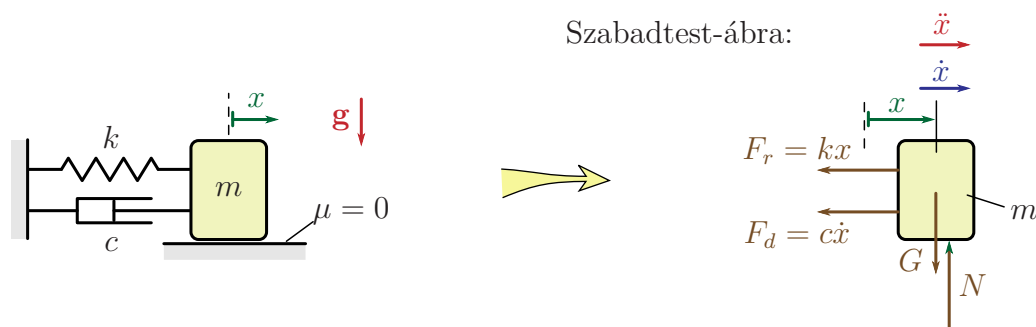
A csillapításnak egyszerre több oka is lehet: eredhet pl. a rugó anyagának belső csillapításából¹³, a közegellenállásból és kent felületen csúszó testekre ható erőből egyszerre. A rendszer tehetetlen és rugalmas elemeihez hasonlóan, a csillapítást is a lengőrendszer külön elemeként kezeljük, mely elhanyagolható tömegű és zérus merevségű. A csillapító elemet a 2.24. ábrán szemléltetett „ikonnal” jelöljük, ami a lengéscsillapítók működésére utal. En-



2.24. ábra. Lengéscsillapító vázlata és a csillapító elem jelölése.

nek megfelelően, az 1 DoF, viszkózus csillapítású, gerjesztetlen lengőrendszer alapmodellje a 2.25. ábrán látható.

¹³Az anyagok belső csillapítása különféle fizikai folyamatok együttes eredménye. Például a szemcsehatárok egymáson történő elcsúszása vagy elektromágneses hatások is állhatnak a csillapítás háttérében.



2.25. ábra. 1 DoF, viszkózus csillapítású, szabad lengőrendszer alapmodellje.

2.3.1. A mozgásegyenlet

Az alapmodell mozgásegyenlete a 2.25 szabadtest-ábra alapján írható fel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_r - F_d, \\ m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x}, \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0. \end{aligned}$$

A csillapítatlan esethez hasonlóan, most is leoszthatjuk az egyenlet együtthatóit a gyorsulás együtthatójával. Így – bevezetve \dot{x} együtthatójára a $c/m = 2\zeta\omega_n$ jelölést – kapjuk a mozgásegyenlet sztenderd alakját:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0. \quad (2.66)$$

Itt

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

a dimenziótlan *Lehr-féle* vagy *relatív csillapítási tényező*, ω_n pedig a csillapítatlan (!) rendszer sajátkörfrekvenciája.

2.11. megjegyzés: A relatív csillapítási tényező képletét $\omega_n = \sqrt{k/m}$ felhasználásával átírva azt kapjuk, hogy

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (2.67)$$

E szerint a relatív csillapítási tényező azt jellemzi, hogy mekkora a c csillapítási tényező a rendszer másik két paraméteréhez – a tömeghez és a merevséghez – képest. ♣

Mivel a fenti mozgásegyenlet lineáris, kereshetjük a megoldását

$$x(t) = Be^{\lambda t}$$

alakban, amiből

$$\dot{x}(t) = B\lambda e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = B\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Visszahelyettesítve a (2.66) egyenletbe:

$$\begin{aligned} B\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\zeta\omega_n B\lambda e^{\lambda t} + \omega_n^2 B e^{\lambda t} &= 0, \quad \text{tehát} \\ \underbrace{B e^{\lambda t}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)}_{=0} &= 0. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek minden t pillanatban teljesülnie kell. $B = 0$ az $x \equiv 0$ állandó megoldásnak felelne meg – a nyugvó rendszernek –, $e^{\lambda t}$ pedig csak $\lambda t \rightarrow (-\infty)$ -ben lehetne nulla. Tehát csak akkor kaphatunk rezgést leíró megoldást, ha $Be^{\lambda t} \neq 0$, amiből az következik, hogy a zárójelben szereplő kifejezés nulla. Ennek megfelelően, a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0. \quad (2.68)$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (2.69)$$

A gyökök értékétől függően három eset lehetséges, melyeket az alábbiakban tárgyalunk.

2.3.2. Gyenge csillapítás

Gyenge csillapításnak nevezzük azt az esetet, amikor $0 < \zeta < 1$ ¹⁴. Ekkor $-1 < \zeta^2 - 1 < 0$, ezért a $\lambda_{1,2}$ gyökök komplex konjugáltak:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \equiv -\zeta\omega_n \pm i\omega_d, \quad (2.70)$$

ahol

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

a *csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája*, aminek a mértékegysége rad/s. Mint látni fogjuk, ez a mennyiség jellemzi a csillapított lengőrendszer rezgésének ütemét. $\zeta < 1$ miatt $\omega_d < \omega_n$, tehát a csillapítás csökkenti a rezgés frekvenciáját és növeli a lengésidőt.

Az általános megoldást a két alapmegoldás lineáris kombinációjaként írhatjuk fel, ahol B_1 és B_2 komplex szám:

$$x(t) = B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t} = B_1e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + B_2e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t} = e^{-\zeta\omega_n t} (B_1e^{i\omega_d t} + B_2e^{-i\omega_d t}).$$

A zárójelben szereplő összeg az $\omega_n \leftrightarrow \omega_d$ cserétől eltekintve ugyanolyan alakú, mint a csillapítatlan rezgések kapcsán kapott (2.7) kifejezés, tehát ugyanúgy átalakítható:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varepsilon). \quad (2.71)$$

Mivel x valós, C_1 , C_2 , A és ε is valós szám. A csillapítatlan esethez hasonlóan, most is csak akkor lehetnek ezek valós számok, ha B_1 és B_2 komplex konjugáltak.

A (2.19) egyenlet kapcsán leírtak alapján bevezethető a *csillapított rezgés periódusideje* és frekvenciája:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad f_d \equiv \frac{1}{T_d} = \frac{\omega_d}{2\pi}. \quad (2.72)$$

Ezekből a kifejezésekből látszik, hogy nem a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája határozza meg a rezgések ütemét; ω_n most csupán egy fizikai tartalom nélküli paraméter a megoldásban.

¹⁴Vannak olyan valóságos szerkezetek is, amiket negatív csillapítású modellel lehet jól leírni. A Routh-Hurwitz-kritériumok [7, 16] alapján azonban belátható, hogy az ilyen rendszerek egyensúlyi helyzete instabil: rezgés közben egyre nagyobb amplitúdó alakul ki, azaz dinamikus stabilitásvesztés következik be.

A (2.71) megoldásban szereplő $C_{1,2}$ paramétereket a kezdeti feltételek alapján lehet meghatározni. Legyenek a kezdeti feltételek

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \quad \text{és} \\ \dot{x}(0) &= v_0 \quad !\end{aligned}$$

A (2.71) egyenletbe $t = 0$ -át helyettesítve kifejezhető $x(0)$:

$$x(0) = e^{-\zeta\omega_n 0} (C_1 \cos(\omega_d 0) + C_2 \sin(\omega_d 0)) \equiv C_1.$$

A fenti eredményt összevetve a kezdeti feltétellel:

$$C_1 = x_0. \quad (2.73)$$

A mozgástörvény differenciálásával kifejezhető a sebesség:

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) + e^{-\zeta\omega_n t} (-C_1\omega_d \sin(\omega_d t) + C_2\omega_d \cos(\omega_d t)). \quad (2.74)$$

$t = 0$ behelyettesítésével

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) &= -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n 0} (C_1 \cos(\omega_d 0) + C_2 \sin(\omega_d 0)) + e^{-\zeta\omega_n 0} (-C_1\omega_d \sin(\omega_d 0) + C_2\omega_d \cos(\omega_d 0)) \\ &\equiv -\zeta\omega_n C_1 + C_2\omega_d.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $C_1 = x_0$ és $\dot{x}(0) = v_0$:

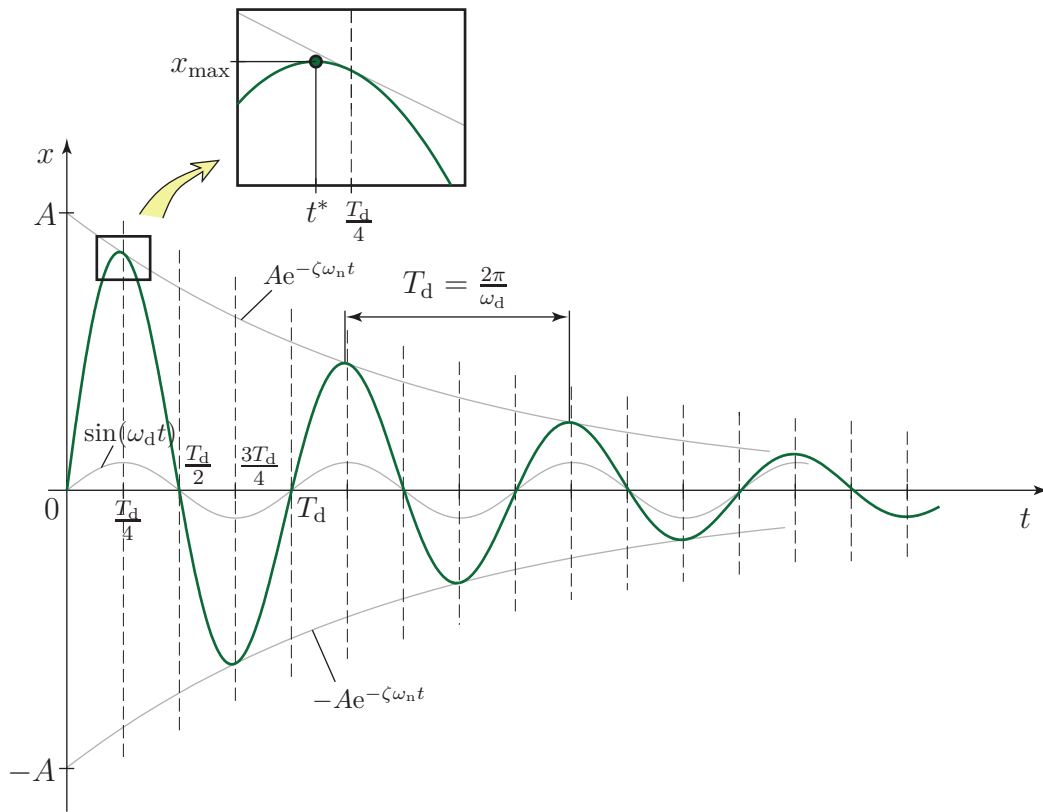
$$-\zeta\omega_n x_0 + C_2\omega_d = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}. \quad (2.75)$$

A mozgás időbeli lefolyása

A 2.26. ábrán látható a (2.71) mozgástörvény grafikonja $x_0 = 0$ és $v_0 > 0$ kezdeti feltételek mellett. A grafikonhoz két exponenciális burkológörbét lehet illeszteni, tehát az egymás utáni maximális kitérések nagysága exponenciálisan csökken. A csillapított szabad rendszer mozgása szigorúan véve nem periodikus, hiszen pontosan ugyanabba az állapotba sohasem tér vissza a lengőrendszer. Mégis jellemezhető a mozgás a két azonos irányú maximális kitérés között eltelt $T_d = 2\pi/\omega_d$ periódusidővel. A maximális kitérések azonban nem a szinuszfüggvény $t = T_d/4, t = 5T_d/4, \dots$ maximumhelyeinél következnek be – csak a csillapítatlan esetben lenne így. $t = T_d/4$ körül a szinuszfüggvény érintője kis meredekségű, az exponenciális függvény viszont gyorsan csökken. Mivel e két függvény össze van szorozva a (2.71) megoldásban, az első maximális kitérés kicsivel a $t = T_d/4$ pillanat *előtt* következik be a 2.26. ábrán mutatott esetben.

A maximális kitérések t^* -gal jelölt időpontjai abból a feltételből határozhatók meg, hogy ezekben a pillanatokban a kitérésnek szélsőértéke van, tehát deriváltja nulla. Ez annak felel meg, hogy a maximális kitérés pillanatában a sebesség nulla, a rezgő test megáll egy pillanatra:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t^*) &= -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t^*} (C_1 \cos(\omega_d t^*) + C_2 \sin(\omega_d t^*)) \\ &\quad + e^{-\zeta\omega_n t^*} (-C_1\omega_d \sin(\omega_d t^*) + C_2\omega_d \cos(\omega_d t^*)) = 0.\end{aligned} \quad (2.76)$$



2.26. ábra. Gyenge csillapítású (alulcsillapított) lengőrendszer mozgástörvénye.

Mivel $e^{-\zeta\omega_n t^*} \neq 0$,

$$(C_2\omega_d - \zeta\omega_n C_1) \cos(\omega_d t^*) - (C_1\omega_d + C_2\zeta\omega_n) \sin(\omega_d t^*) = 0.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\tan(\omega_d t^*) = \frac{C_2\omega_d - \zeta\omega_n C_1}{C_1\omega_d + C_2\zeta\omega_n}.$$

Behelyettesítve a $C_{1,2}$ együtthatók (2.73) és (2.75) kifejezését

$$\tan(\omega_d t^*) = \frac{v_0\omega_d}{x_0\omega_d^2 + \zeta\omega_n v_0 + \zeta^2\omega_n^2 x_0}. \quad (2.77)$$

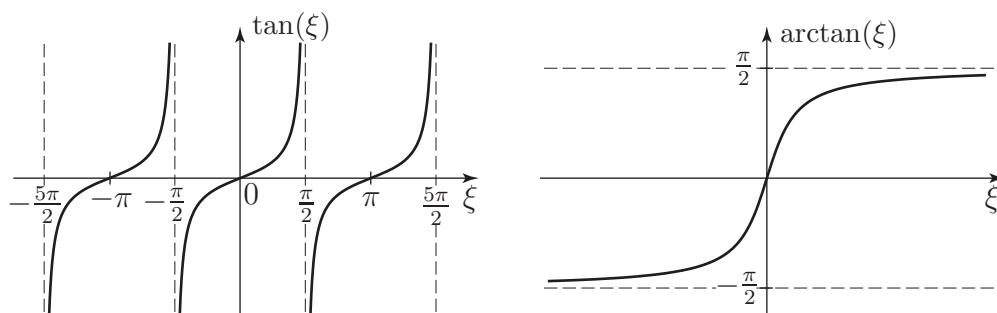
Például a 2.26. ábrának megfelelő $x_0 = 0$ kezdeti feltétel esetén

$$t^* = \frac{1}{\omega_d} \arctan\left(\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n}\right). \quad (2.78)$$

A csillapítatlan $\zeta = 0$ esetben $\omega_d = \omega_n$. Bevezetve a $\xi = \omega_d/(\zeta\omega_n)$ segédváltozót visszkapjuk a maximális kitérés csillapítatlan esetnek megfelelő időpontját:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} t^* = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_d} \arctan(\xi) = \frac{\pi}{2\omega_n} = \frac{T_n}{4},$$

ugyanis a tangens függvény bal oldali határértéke $\pi/2$ -nél $\lim_{\xi \rightarrow \pi/2-0} \tan(\xi) = \infty$, így $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \arctan(\xi) = \pi/2$, a 2.27. ábrának megfelelően.



2.27. ábra. A tangens és árktangens függvények grafikonjai.

Mivel a tangens függvény π -periodikus, azaz

$$\tan(\omega_d t^*) = \tan\left(\omega_d \left(t^* + j \frac{\pi}{\omega_d}\right)\right),$$

a (2.77) és (2.78) kifejezések az összes $j = 0, \dots, \infty$ (azaz végtelen sok) lokális minimum és maximum időpontját megadják, melyek $\pi/\omega_d = T_d/2$ egész számú többszöröseiben térnek el egymástól. A legnagyobb abszolút értékű kitérést általában a legkisebb pozitív t^* érték (2.71)-ba helyettesítésével számíthatjuk ki, de az is előfordulhat, hogy a kezdeti x_0 kitérés nagyobb, mint a szélsőérték kereséssel kapott érték.¹⁵

A rendszer paramétereinek meghatározása méréssel

Míg a rugómerevséget szilárdságtani megfontolások alapján meg lehet határozni (lásd 1.3.1. fejezet és [14]), a csillapítási tényező értékét csak nagyon pontatlanul lehet elméleti úton megbecsülni. Ez különösen igaz azokra az esetekre, amikor több alkatrészből összeszerelt testek rezgését vizsgáljuk. Ekkor ugyanis az egyes alkatrészek közti ütközés és a súrlódás meghatározó szerepet játszik a csillapításban. Ezeknek a folyamatoknak a bonyolultsága miatt ebben az esetben nem található olyan anyagi paraméter, ami megfelelően jellemezné a disszipációt. A felsorolt okok miatt tehát kitüntetett szerepe van a rezgésben a *méréseknek*.

Egy viszkózus csillapítású gerjesztetlen lengőrendszer periódusideje a két azonos irányú maximális kitérés között mérhető idő. A gyakorlatban pontosabb értéket kapunk, ha több, pl. n periódus együttes idejét átlagoljuk:

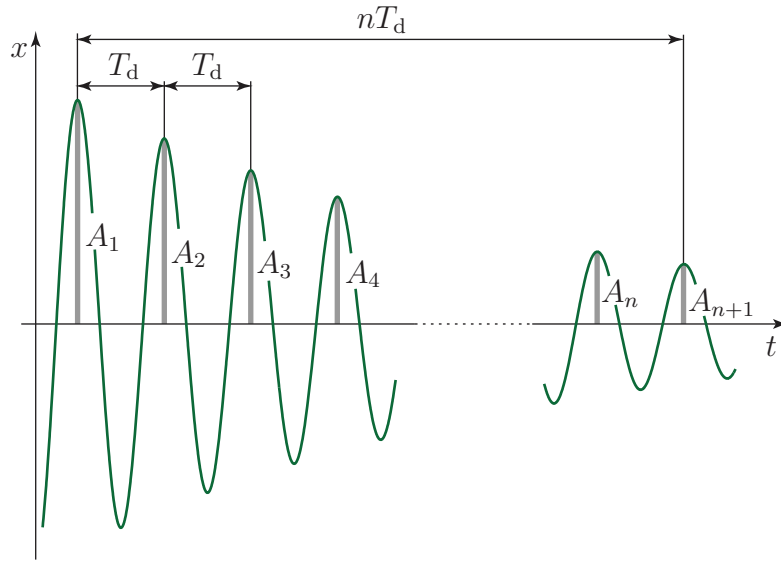
$$T_{\text{dmért}} = \frac{t(A_{n+1}) - t(A_1)}{n},$$

ahol A_i az i -edik azonos irányú maximális kitérést jelöli, a 2.28. ábrának megfelelően. A $t(A_i)$ időpontok tehát a (2.77) képlettel megadott időpontok közül vagy csak a pozitív, vagy csak a negatív kitéréshez tartozó időpontoknak felelnek meg. A csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája a mért periódusidőből: $\omega_{\text{dmért}} = 2\pi/T_{\text{dmért}}$.

A relatív csillapítási tényező meghatározásához azt használhatjuk ki, hogy bármely két, egymás után T_d periódusidővel bekövetkező kitérés hányadosa állandó, hiszen $\sin(\omega_d t + \varepsilon) = \sin(\omega_d(t + T_d) + \varepsilon)$ miatt

$$\frac{x(t)}{x(t + T_d)} = \frac{Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varepsilon)}{Ae^{-\zeta\omega_n(t+T_d)} \sin(\omega_d(t + T_d) + \varepsilon)} = e^{\zeta\omega_n T_d}. \quad (2.79)$$

¹⁵A szélsőérték vagy ott található ahol a derivált nulla, vagy pedig az értelmezési tartomány végpontjaiban.



2.28. ábra. A periódusidő meghatározása mérésel.

A (2.79) képlet a maximális kitérésekre is igaz:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\zeta\omega_n T_d},$$

tehát bevezethető egy új mennyiség a lengőrendszer jellemzésére, a *logaritmikus dekrementum*:

$$\Lambda \equiv \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \zeta\omega_n T_d.$$

A logaritmikus dekrementum meghatározható az amplitúdók mérésével. Pontosabb értéket kapunk, ha több (n) periódust is figyelembe veszünk:

$$\frac{A_1}{A_{n+1}} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{n\zeta\omega_n T_d},$$

amiből

$$\Lambda_{\text{mért}} = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A_{n+1}}.$$

A logaritmikus dekrementum ismeretében kiszámítható a relatív csillapítási tényező:

$$\Lambda = \zeta\omega_n T = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}. \quad (2.80)$$

Tehát a relatív csillapítási tényező mért értéke az alábbi képlettel határozható meg:

$$\zeta_{\text{mért}} = \frac{\Lambda_{\text{mért}}}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda_{\text{mért}}^2}}.$$

Ha kicsi a csillapítás, akkor $\Lambda_{\text{mért}} \ll 2\pi$, tehát $\zeta_{\text{mért}} \approx \Lambda_{\text{mért}}/2\pi$.

2.3.3. Kritikus csillapítás

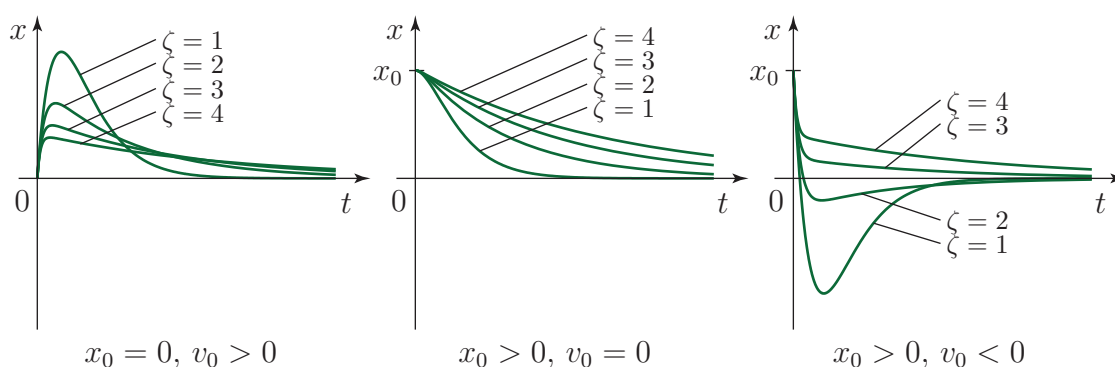
Kritikus csillapításról akkor beszélünk, ha $\zeta = 1$. Ebben az esetben a karakterisztikus egyenlet gyökei megegyeznek: $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \equiv -\omega_n$, ezért a mozgástörvény alakja:

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\omega_n t}. \quad (2.81)$$

Ez azt jelenti, hogy nem jön létre rezgés, ez az ún. *aperiodikus határeset*. Ilyenkor a periódusidő helyett a T_c *időállandót* használják a mozgás jellemzésére. Az időállandó az az időtartam, ami alatt e-ad részére (azaz körülbelül $1/2,718 \approx 0,368$ -szorosára) csökken a kitérés. Nagy t értékek esetén a $te^{-\omega_n t}$ függvény jó közelítéssel $e^{-\omega_n t}$ -nek megfelelően viselkedik, tehát az időállandó: $T_c \approx 1/\omega_n$.

A kezdeti feltételeket figyelembe véve, a mozgástörvény együtthatói a korábban bemutatott módon számíthatók ki:

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0, \\ C_2 &= v_0 + \omega_n x_0. \end{aligned}$$



2.29. ábra. A mozgástörvény grafikonja kritikus csillapítású és túlcsillapított lengőrendszerek esetén.

Egy kritikus csillapítású lengőrendszer legfeljebb egyszer haladhat át az origón, mert $e^{-\omega_n t} \neq 0$ miatt az esetlegesen bekövetkező $x = 0$ kitérés időpontja egyértelműen meghatározható:

$$(C_1 + C_2t)e^{-\omega_n t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \left(\frac{-C_1}{C_2}\right).$$

Természetesen csak akkor következik be az origón való áthaladás, ha $t > 0$, azaz $C_1/C_2 < 0$.

2.3.4. Erős csillapítás

Erős csillapításról akkor beszélünk, ha $\zeta > 1$. Ebben az esetben a karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \equiv \omega_n \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right).$$

Mindkét gyök valós, negatív szám. A gyökök nagyságának vizsgálatához érdemes megvizsgálni a fenti zárójelben szereplő kifejezés lehetséges értékeit.

- $\sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta$ miatt $-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$, azaz $\lambda_1 < 0$,
- $\zeta - 1 < \sqrt{\zeta^2 - 1}$ miatt $-1 < -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, azaz $\lambda_1 > -\omega_n$,
- $-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} < -\zeta$ miatt $-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} < -1$, azaz $\lambda_2 < -\omega_n$.

A fentiekből következően

$$\lambda_2 < -\omega_n < \lambda_1 < 0. \quad (2.82)$$

Az általános megoldás

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.83)$$

tehát a kitérés exponenciálisan csökken. Az ilyen rendszereket *túlcsillapított*nak nevezik. Vegyük észre, hogy (2.82) miatt $e^{\lambda_1 t}$ lassabban, $e^{\lambda_2 t}$ pedig gyorsabban cseng le, mint $e^{-\omega_n t}$. Elég nagy t -re csak a lassabban csillapodó tag marad számottevő, tehát a túlcsillapított rendszer időállandója a tipikus esetben

$$T_c = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} > \frac{1}{\omega_n}.$$

Ezek szerint a csillapítás növelése (egy speciális esettől eltekintve, lásd a 2.12. megjegyzést) növeli az időállandót, ami azt jelenti, hogy egyre lassabb a csillapodás. Tehát a *kritikus csillapítás mellett a leggyorsabb a mozgás lecsengése* (2.29. ábra)¹⁶. Fontos megemlíteni, hogy a modell szerint a viszkózus csillapítású szabad rendszer rezgése (gyenge csillapítás mellett) vagy mozgása (ha kritikusan- vagy túlcsillapított a rendszer) *sohasem áll le teljesen*, csak exponenciális ütemben tart a kitérés a nullához.

A kezdeti feltételekkel kifejezhető az általános megoldás együtthatói:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{v_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ C_2 &= \frac{v_0 - x_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.12. megjegyzés: A fenti képletekből látható, hogy a $v_0 = x_0 \lambda_2$ speciális kezdeti feltételek esetén $C_1 = 0$, tehát a kisebb, $T_{c, \text{spec}} = -1/\lambda_2 = 1/(\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})$ időállandó használható. A mozgás lecsengése ekkor (kivételesen!) gyorsabb, mint kritikus csillapítás mellett. ♣

A túlcsillapított rendszer a mozgása során legfeljebb egy alkalommal haladhat át az origón, hiszen

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \log \left(\frac{-C_2}{C_1} \right),$$

aminek csak $\log(-C_2/C_1) > 0$, azaz $-C_2/C_1 > 1$ mellett van egy pozitív megoldása.¹⁷

¹⁶Megmutatható, hogy azonos kezdeti kitérés és zérus kezdeti sebesség mellett a (2.81) és (2.83) kitérések különbsége a csillapítás függvényében növekedik. Tehát ekkor az időállandó bevezetése során alkalmazott közelítés nélkül is azt az eredményt kapjuk, hogy a kritikusan csillapított rendszer cseng le a leggyorsabban (2.29 középső ábra).

¹⁷log a természetes alapú logaritmust jelöli.

2.13. megjegyzés: A csillapított lineáris lengőrendszer mozgásegyenletének megoldása más módon is levezethető, az ún. Cauchy-átírás (lásd 3.3. fejezet) segítségével. A Cauchy-átírás azt jelenti, hogy átírjuk elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre a

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

mozgásegyenletet, a $v = \dot{x}$ változó bevezetésével. Átrendezve az egyenletet,

$$\ddot{x} \equiv \dot{v} = -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x.$$

Felhasználva, hogy $\omega_n = \sqrt{k/m}$ és $c/m = 2\zeta\omega_n$, az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \cdot x + 1 \cdot v, \\ \dot{v} &= -\omega_n^2 \cdot x - 2\zeta\omega_n \cdot v.\end{aligned}$$

Ha bevezetjük az $\mathbf{Y} = [x \ v]^T$ vektort, akkor az alábbi alakban is fel lehet írni ezt az egyenletet:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}\mathbf{Y}. \quad (2.85)$$

Ez is egy lineáris differenciálegyenlet, ezért – feltéve, hogy a \mathbf{H} együtthatómátrix λ_1 és λ_2 sajátértékei különbözők¹⁸ – az általános megoldása [16] szerint

$$\mathbf{Y} = B_1\mathbf{h}_1e^{\lambda_1 t} + B_2\mathbf{h}_2e^{\lambda_2 t}. \quad (2.86)$$

Itt \mathbf{h}_1 és \mathbf{h}_2 a \mathbf{H} mátrix sajátvektorai, B_1 és B_2 pedig a kezdeti feltételektől függő együtthatók. A \mathbf{H} mátrix sajátértékeit a

$$\det(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásával határozhatjuk meg, ahol \mathbf{E} az egységmátrix. A determinánst kifejtve a korábban is felírt (2.68) egyenletre jutunk, azaz a sajátértékek megegyeznek a (2.69) karakterisztikus gyökökkel. A sajátvektorok a

$$(\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{h} = \mathbf{0}$$

egyenlet alapján határozhatók meg. Mivel a sajátvektorok konstansszorosok is sajátvektor, \mathbf{h}_1 és \mathbf{h}_2 első elemét (hacsak az nem nulla) 1-nek választhatjuk. A számítás során kihasználható az is, hogy egy mátrix sajátértékeinek szorzata megegyezik a mátrix determinánsával. Mivel $\det \mathbf{H} = \omega_n^2$, $\lambda_1 = \omega_n^2/\lambda_2$.

Az eredményül kapott sajátértékek és sajátvektorok

$$\lambda_1 = \omega_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right), \quad \lambda_2 = \omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right), \quad (2.87)$$

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

A fenti kifejezéseket behelyettesítve a (2.86) általános megoldásba, arra jutunk, hogy

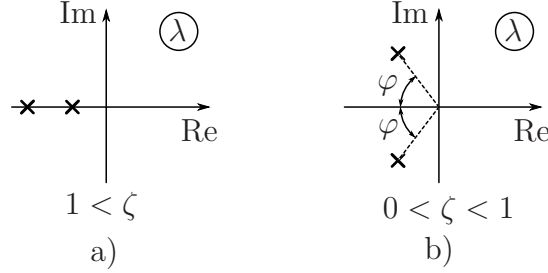
$$x(t) = B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t}, \quad (2.89)$$

$$v(t) = B_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + B_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}, \quad (2.90)$$

tehát a sebességre kapott kifejezés valóban az $x(t)$ mozgástörvény idő szerinti deriváltja. Természetesen ugyanazokat a kifejezéseket kaptuk, mint a másodrendű egyenlet megoldása során. A korábbi fejezetek alapján a következőképpen foglalhatjuk össze a kapott eredményeket:

¹⁸Ez nem teljesül a kritikus csillapítású esetben!

- Ha az elsőrendű egyenlet együtthatómátrixának a sajátértékei *valósak* (2.30./a ábra), akkor a rendszer túlszillapított. Ebben az esetben a sajátvektorok is valósak. A két sajátvektor azoknak a kezdeti feltételeknek felel meg, melyekből indítva a rendszert a lecsengés időállandója $1/\lambda_1$ illetve $1/\lambda_2$. Például $v_0 = \lambda_1 x_0$ mellett az $e^{\lambda_1 t}$ függvény szerint, $v_0 = \lambda_2 x_0$ esetén pedig az $e^{\lambda_2 t}$ függvény szerint történik a lecsengés, amint a (2.84) egyenletekből is látszik (lásd még a 2.12. megjegyzést).



2.30. ábra. A karakterisztikus egyenlet gyökeinek elhelyezkedése a komplex síkon pozitív csillapítás esetén. (a) valós gyökök, (b) komplex gyökök esete.

- Ha a sajátértékek *komplex konjugáltak*, akkor a sajátvektorok is komplex konjugált párt alkotnak. Ebben az esetben a (2.8) képlethez hasonlóan átírható a két alamp megoldás kombinációja szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációjára, valós együtthatókkal. A sajátértékek valós és képzetes része alapján meghatározható a megfelelő sajátkör-frekvencia és relatív csillapítási tényező (lásd (2.70)):

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -\zeta\omega_n, \quad |\operatorname{Im}\lambda_1| = |\operatorname{Im}\lambda_2| = \omega_d.$$

Feltételezve, hogy $0 < \zeta < 1$, és felhasználva, hogy $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, adódik, hogy a komplex konjugált gyökök abszolút értékei egyenlők a csillapítatlan rendszer sajátkör-frekvenciájával:

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(\operatorname{Im}\lambda_{1,2})^2 + (\operatorname{Re}\lambda_{1,2})^2} = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_d^2} = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \omega_n. \quad (2.91)$$

Ebből következik, hogy

$$\zeta = \frac{-\operatorname{Re}\lambda_{1,2}}{|\lambda_{1,2}|}, \quad (2.92)$$

illetve

$$\frac{|\operatorname{Im}\lambda_1|}{|\operatorname{Re}\lambda_1|} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{Im}\lambda_1}{\operatorname{Re}\lambda_1}\right)^2}}. \quad (2.93)$$

A fenti eredményt érdemes összevetni a logaritmikus dekrementumot megadó (2.80) képlettel. Megjegyezzük, hogy $\operatorname{Im}\lambda_1/\operatorname{Re}\lambda_1$ a komplex sajátérték φ irányszögének tangense, ezért $\zeta = |\cos(\varphi)|$ is igaz (lásd 2.30./b ábra).

- Speciális az az eset, amikor két sajátérték megegyezik, azaz $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$. Ekkor a megoldás nem tisztán exponenciális, hanem

$$x(t) = (B_1 + B_2 t) e^{\lambda t}, \quad (2.94)$$

$$v(t) = B_1 \lambda e^{\lambda t} + B_2 t \lambda e^{\lambda t} + B_2 e^{\lambda t}. \quad (2.95)$$

Ezzel a helyzettel például kritikus csillapítás esetén találkozhatunk, ahol $\lambda = -\omega_n$ (lásd 2.3.3. fejezet). Érdekes megfigyelni, hogy $\lambda = 0$ esetén a fenti egyenletek szerint

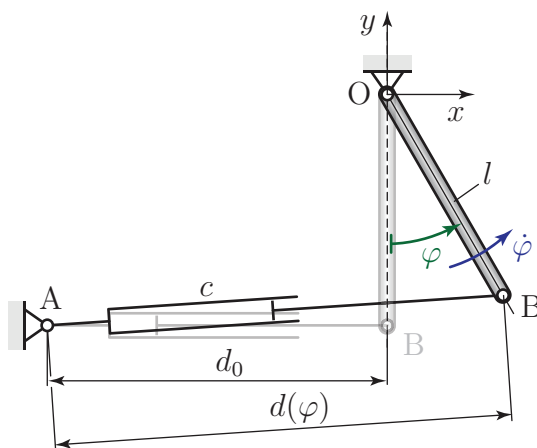
$$\begin{aligned}x(t) &= B_1 + B_2 t, \\v(t) &= B_2,\end{aligned}\tag{2.96}$$

ami az egyenes vonalú egyenletes mozgásnak felel meg (lásd 3.42. megjegyzés).

Látni fogjuk a több szabadsági fokú lengőrendszerek vizsgálata kapcsán (3.3. fejezet), hogy azok is átírhatók elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer alakjába és abban az esetben is a fentiekhez hasonlóan határozhatók meg a sajátkörfrekvenciák és a relatív csillapítási tényezők. ♣

2.3.5. Lengéscsillapítók és linearizálás

A 2.2.2. fejezetben tárgyalt linearizálási probléma a lengéscsillapítók kapcsán is felmerül. A 2.31. ábra alapján kapcsoljunk lengéscsillapítót egy elfordulni képes rúdhoz úgy, hogy az



2.31. ábra. Lengéscsillapító deformációsebességének számítása.

a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzetben legyen merőleges a rúdra! Ekkor a csillapítóerő értékét az alábbi módon fejezhetjük ki: ha az egyensúlyi helyzetben d_0 távolságra van a lengéscsillapító rögzített pontja a rúdtól, akkor egy φ szöggel kitérített helyzetben a (2.48) képlettel számítható a lengéscsillapító $d(\varphi)$ hossza, ugyanúgy, mint a rugók esetében. A csillapítóerő szempontjából viszont a $d(\varphi)$ távolság változási sebessége – azaz az idő szerinti deriváltja – számít. Kis kitérések mellett a (2.50) képlet alapján közelíthetjük a $d(\varphi)$ távolságot, aminek a deriválásával az alábbi eredményt kapjuk:

$$\dot{d} = l\dot{\varphi} - \frac{l}{2}\varphi^2\dot{\varphi} + \frac{l^2}{2d_0}\varphi^3\dot{\varphi} + \dots$$

Így a csillapítóerő nagysága kis kitérések esetén, lineáris közelítésben

$$F_d = c\dot{d} \approx cl\dot{\varphi}.$$

Az erőkart a (2.56) formulával közelíthetjük, tehát kis kitérések esetén számolhatunk a rúd l hosszával. A csillapító elem által az O pontra kifejtett nyomaték így közelítőleg

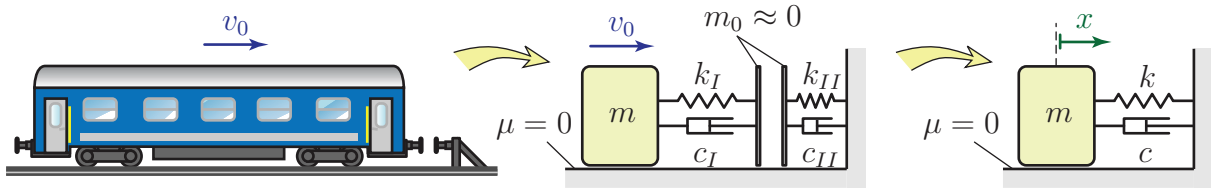
$$M_{cs} = cl^2\dot{\varphi}\tag{2.97}$$

nagyságú és a $\dot{\varphi}$ szögsebességgel ellentétes irányú. A d_0 eredeti hossz tehát ebben az esetben is kiesik a linearizált kifejezésből.

2.3.6. Az ütközés folyamatának leírása a csillapított lengőrendszer modellje alapján

Az 1.2. fejezetben tárgyalt ütközési modell egy olyan számítási algoritmust szolgáltatott, amivel az ütközés előtti sebességállapot és az e ütközési tényező ismeretében meg lehetett határozni az ütközés utáni sebességállapotot. Az ütközés során fellépő erő nagyságáról és az ütközés időtartamáról azonban semmilyen információt nem kaptunk. További problémát jelent, hogy az e ütközési tényező értékének elméleti becslésére vonatkozóan sem adott támpontot a modell.

Az ütközés folyamatának részletesebb leírásához figyelembe kell venni az ütköző testek rugalmasságát és az ütközés során bekövetkező energiaveszteséget. Ezeknek a feltételeknek megfelel egy olyan modell, amelyben a merevnek tekintett ütköző testek közé egy k merevségű rugót és egy c csillapítási tényezőjű lengéscsillapítót helyezünk. Hogy az egy szabadsági fokú lengőrendszerek témakörén belül maradjunk, most azt az esetet vizsgáljuk, amikor egy véges m tömegű deformálható test – pl. vasúti kocsi, ütközővel – egy nála sokkal nagyobb tömegű álló testnek – pl. végtelen nagy tömegűnek tekinthető, szintén deformálható falnak vagy rögzített ütközőbalknak – ütközik v_0 sebességgel, a 2.32. ábrának megfelelően.



2.32. ábra. Csillapított lengőrendszer, mint ütközési modell.

A két test érintkezésekor a testek rugalmasságát és csillapítási tulajdonságait egy k eredő rugómerevséggel és egy c egyenértékű csillapítási tényezővel vehetjük figyelembe, a mozgó test tehetetlenségét pedig egy m tömegű hasábbal modellezzük. Így egy csillapított, szabad lengőrendszert kapunk, aminek (2.66) alapján már ismerjük a mozgásegyenletét:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0. \quad (2.98)$$

Tegyük fel, hogy $\zeta < 1$, tehát gyenge a csillapítás. Ebben az esetben a mozgásegyenlet általános megoldása (2.71) szerint

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t) \right). \quad (2.99)$$

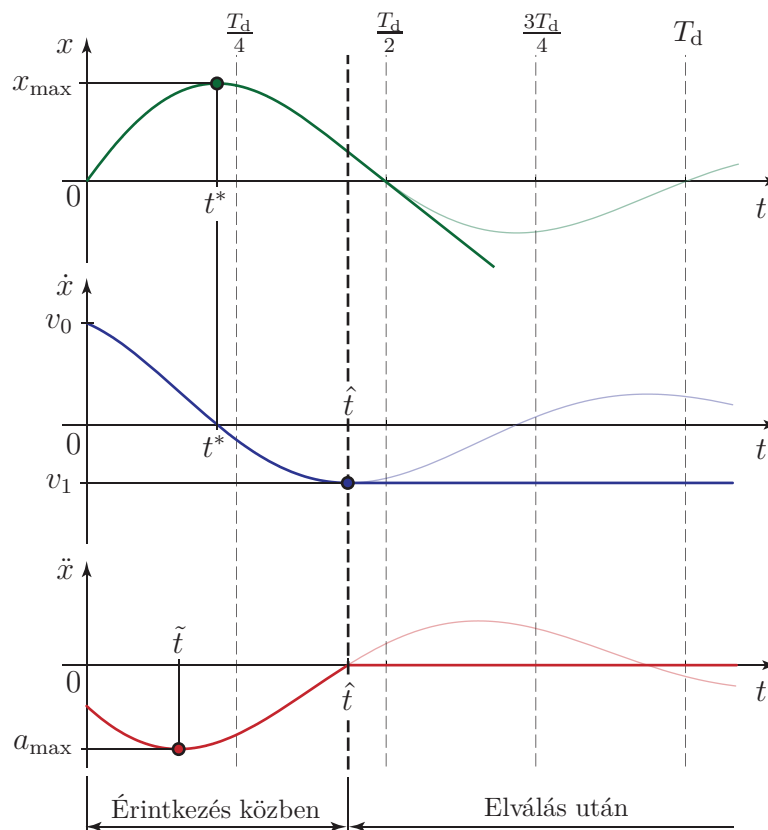
Figyelembe véve az $x(0) \equiv x_0 = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ kezdeti feltételeket, a (2.73) és (2.75) egyenletekből

$$C_1 = 0 \quad \text{és} \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_d}. \quad (2.100)$$

A mozgástörvény így

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{v_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right). \quad (2.101)$$

Az ütközés során a hasáb elér egy maximális kitérést, visszalökődik, majd elválik a faltól. Az elválás pillanatában felvett v_1 sebességét megtartja, ezt tekintjük ütközés utáni sebességnek. A két test között csak nyomóerő lehetséges, tehát akkor következik be az elválás, amikor a testek között ható erő éppen előjelet váltana, ahogy a 2.33. ábra is mutatja.



2.33. ábra. A vizsgált probléma foronómiai görbéi. t^* a maximális kitérés, \tilde{t} a maximális gyorsulás időpontját jelöli. A testek a $t = \hat{t}$ időpontban válnak el egymástól, amikor a gyorsulás és az eredő erő nulla, valamint a sebességnek lokális szélsőértéke van. Azonban a maximális sebesség $t = 0$ -ban következik be: $v_{\max} = \dot{x}(0) = v_0$.

Az ütközés erejét egyrészt a rugóerő és a csillapítóerő összegeként:

$$F(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t), \quad (2.102)$$

másrészt – (2.98) alapján – az

$$F(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2.103)$$

egyenletből, a gyorsulást megadó függvény zérushelyét meghatározva számíthatjuk ki.

Alkalmazzuk a (2.102) egyenletet! A mozgástörvény deriválásával $C_1 = 0$ miatt

$$\dot{x}(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_2\omega_d \cos(\omega_d t) - C_2\zeta\omega_n \sin(\omega_d t)), \quad (2.104)$$

tehát az ütközés során a testek között átadódó erő

$$F(t) \equiv -kx(t) - c\dot{x}(t) = -ke^{-\zeta\omega_n t} C_2 \sin(\omega_d t) - ce^{-\zeta\omega_n t} (C_2\omega_d \cos(\omega_d t) - C_2\zeta\omega_n \sin(\omega_d t)). \quad (2.105)$$

Keressük meg azt a $t = \hat{t}$ pillanatot, amikor $kx(\hat{t}) + c\dot{x}(\hat{t}) = 0$, tehát a test elválik az ütközőtől! $C_2 \neq 0$ és $e^{-\zeta\omega_n\hat{t}} \neq 0$ miatt

$$-k \sin(\omega_d \hat{t}) - c \left(\omega_d \cos(\omega_d \hat{t}) - \zeta \omega_n \sin(\omega_d \hat{t}) \right) = 0.$$

Az egyenletet átrendezve, $c/m = 2\zeta\omega_n$, $k/m = \omega_n^2$ és $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ felhasználásával

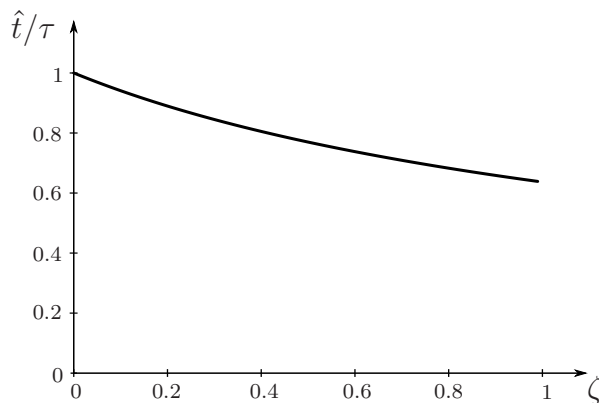
$$\tan(\omega_d \hat{t}) = \frac{c\omega_d}{c\zeta\omega_n - k} \equiv \frac{\frac{c}{m}\omega_d}{\frac{c}{m}\zeta\omega_n - \frac{k}{m}} \equiv \frac{2\zeta\omega_n\omega_d}{\omega_n^2(2\zeta^2 - 1)} \equiv \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}, \quad (2.106)$$

amiből már kiszámítható \hat{t} , az *ütközés időtartama*:

$$\hat{t} = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan\left(\frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}\right). \quad (2.107)$$

A fenti képlet alkalmazása során ügyelni kell arra, hogy a tangens függvény π -periodikus, ezért végtelen sok, $T_d/2 = \pi/\omega_d$ többszöröseiben eltérő megoldást kapunk \hat{t} -re, melyek közül a legkisebb pozitív értéket kell figyelembe venni. $\zeta = 0$ esetén $\hat{t} = T_d/2$, és a csillapítás növelésével ez az időtartam csökken: $\lim_{\zeta \rightarrow \sqrt{2}/2} \hat{t} = T_d/4$ és $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \hat{t} = 2/\omega_n$.

2.14. megjegyzés: Mivel \hat{t} függ a sajátkörfrekvenciától is, érdemes megvizsgálni, hogy hogyan aránylik az ütközés ideje a csillapításmentes esethez tartozó $\tau \equiv T_n/2 = \pi/\omega_n$ félperiódusidőhöz. A 2.34. ábrán a dimenziótlan \hat{t}/τ ütközési időt ábrázoltuk különféle relatív csillapítási tényezők mellett. Látható, hogy $\zeta = 0$ esetén valóban visszakapjuk a csillapításmentes esetet jellemző periódusidő felét: $\hat{t} = T_n/2 = \pi/\omega_n$.



2.34. ábra. A dimenziótlan ütközési idő függése a relatív csillapítási tényezőtől.

Az ütközés utáni – tehát az elválás pillanatában számított – sebesség (2.104) alapján

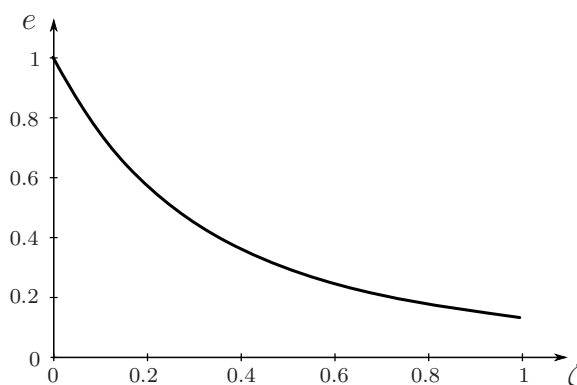
$$\begin{aligned} v_1 \equiv \dot{x}(\hat{t}) &= \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n\hat{t}} \left(\omega_d \cos(\omega_d \hat{t}) - \zeta \omega_n \sin(\omega_d \hat{t}) \right) \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n\hat{t}} \left(\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d \hat{t}) - \zeta \sin(\omega_d \hat{t}) \right), \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $C_2 = v_0/\omega_d$ és $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ miatt lehetett egyszerűsíteni a kifejezést az ω_n sajátkörfrekvenciával.

2.15. megjegyzés: A bemutatott számítás alapján ugyanúgy bevezethető az ütközési tényező, mint ahogy az 1.2 fejezetben tettük. Az ütközési normális párhuzamos az x tengellyel. A fal tömege végtelen nagy, sebessége pedig nulla, tehát a közös súlypont sebessége is nulla: $v_S^{(n)} = 0$. A feladat jelöléseivel az (1.5) képlet alapján¹⁹

$$e = \frac{v_1 - 0}{0 - v_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n \hat{t}} \left(\zeta \sin(\omega_d \hat{t}) - \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_d \hat{t}) \right) \quad (2.108)$$

az ütközési tényező. Mivel az $\omega_n \hat{t}$ és $\omega_d \hat{t}$ szorzatok is kifejezhetők (2.106) és (2.107) alapján, az ütközési tényező csak a ζ relatív csillapítástól függ. Ahogy a 2.35. ábra is mutatja, a



2.35. ábra. Az ütközési tényező függése a relatív csillapítási tényezőtől.

csillapítatlan esetben $e = 1$ -et kapunk, míg $\lim_{\zeta \rightarrow 1} e = 1/e^2 \approx 0,135$. A fenti számítást az erős csillapítású esetre is végrehajtva $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} e = 0$ adódik. ♣

A ütközés során fellépő *maximális erő* is számítható a modell alapján. Abban a pillanatban maximális az erő, amikor maximális a gyorsulás. A gyorsulás szélsőértékét a mozgástörvény harmadik deriváltjának zérushelye alapján határozhatjuk meg:

$$\ddot{x}(t) = C_2 e^{-\zeta \omega_n t} \left[\left(3\zeta^2 \omega_n^2 \omega_d - \omega_d^3 \right) \cos(\omega_d t) + \left(3\zeta \omega_n \omega_d^2 - \zeta^3 \omega_n^3 \right) \sin(\omega_d t) \right]. \quad (2.109)$$

Ebből már kiszámítható az erő \tilde{t} szélsőérték helye:

$$\ddot{x}(\tilde{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\omega_d \tilde{t}) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} (4\zeta^2 - 1)}{\zeta (4\zeta^2 - 3)}, \quad (2.110)$$

amit (2.105)-be helyettesítve meghatározható a maximális erő – a rugóerő és a csillapítóerő *eredőjének* a maximuma.

A *maximális rugóerő* a maximális kitérésből számítható: $F_r^{\max} = kx_{\max} \equiv kx(t^*)$, amit már vizsgáltunk a 2.3.2. fejezetben. A maximális kitérés t^* időpontját a (2.78) képlet adja meg.

A *maximális csillapítóerő* számításához a maximális sebességet kell meghatározni: $F_d^{\max} = c\dot{x}_{\max}$. Ehhez célszerűnek tűnik azt az időpontot megkeresni, amikor a sebesség deriváltja – azaz a gyorsulás – nulla. Ezt viszont már megtettük, hiszen (2.103) szerint a gyorsulás akkor nulla, amikor az eredő erő is nulla: a $t = \hat{t}$ pillanatban, azaz elváláskor (lásd (2.106)).

¹⁹A dőlt betűvel írt e az ütközési tényező, $e \approx 2,718$ pedig az Euler-féle szám.

A vázolt gondolatmenet azonban ebben a feladatban $x_0 = 0$ miatt nem ad helyes eredményt a maximális sebességre: $t = \hat{t}$ -ot helyettesítve a (2.104) egyenletbe csak a sebesség egy *lokális* maximumát kapjuk meg.

A lengőrendszer mechanikai energiája kezdetben csak a hasáb kinetikus energiájából származik:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Az összenergia a csillapítás miatt folyamatosan csökken, és a $t = \hat{t}$ pillanatban már

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 < E_0, \quad (2.111)$$

ahol $x_1 \neq 0$ az elváláskor mérhető kitérés. Igaz ugyan, hogy $t = \hat{t}$ -ben lokális maximuma van a sebességnek (és inflexiós pontja az $x(t)$ kitérésnek), de a globális maximumot az értelmezési tartomány szélső pontjában, $t = 0$ -ban veszi fel. Tehát a kezdeti v_0 a maximális sebesség, a maximális csillapítóerő pedig $F_d^{\max} = cv_0$.

2.4. Coulomb-súrlódással (száraz súrlódással) csillapított szabad rezgések

2.4.1. Súrlódási modell

A *Coulomb-féle súrlódási modellben* a súrlódási erő a felületeket összenyomó N normálerővel arányos és az \dot{x} relatív sebességgel ellentétes irányú:

$$F_s = -\mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}).$$

2.16. megjegyzés: A súrlódási erő nagysága független az érintkező felületek A nagyságától. Ez azzal magyarázható, hogy a testek felülete sohasem tökéletesen sima, mindig vannak kisebb-nagyobb felületi egyenetlenségek. Érintkezés során tipikusan a felületi kiemelkedések csúcsai érnek össze, így a valódi (mikroszkopikus) \hat{A} érintkező felület a látszólagos (makroszkopikus) felületnek csak a töredéke, azaz $\hat{A} \ll A$. A nem érintkező felületdarabok természetesen nem járulnak hozzá a súrlódási erőhöz.

Mivel a valódi érintkező felület közel arányos az N normálerővel, a súrlódási erő jó közelítéssel a *valóban érintkező* felület \hat{A} nagyságával arányos. ♣

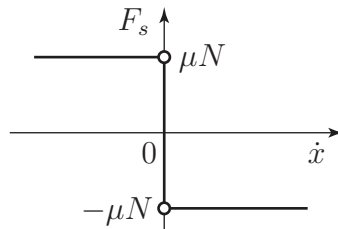
Az egyszerűség kedvéért azonosnak tekintjük és egyaránt μ -vel jelöljük a csúszási és a tapadási súrlódási tényezőt.²⁰ Az sgn (szignum vagy előjel) függvényt a 2.36. ábrával összhangban, a szokásos matematikai definíciótól eltérően értelmezzük:

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \dot{x} > 0 \\ -1, & \text{ha } \dot{x} < 0 \\ -1 \text{ és } 1 \text{ közötti,} & \text{ha } \dot{x} = 0 \end{cases}.$$

A legutolsó eset fizikailag a tapadási súrlódásnak felel meg. Letapadáskor – zérus sebesség mellett – a tapadási súrlódási erő a μN és $-\mu N$ határok között akkora értéket vesz fel, hogy

²⁰Már Coulomb is megfigyelte, hogy a súrlódási tényező értéke függ az érintkezés idejétől. Minél tovább érintkeznek a testek, annál nagyobb lesz a súrlódási tényező a testek között kialakuló kémiai és fizikai kölcsönhatások miatt. Ez magyarázza a csúszási és tapadási súrlódási tényező közötti eltérést, amit mi most elhanyagolunk.

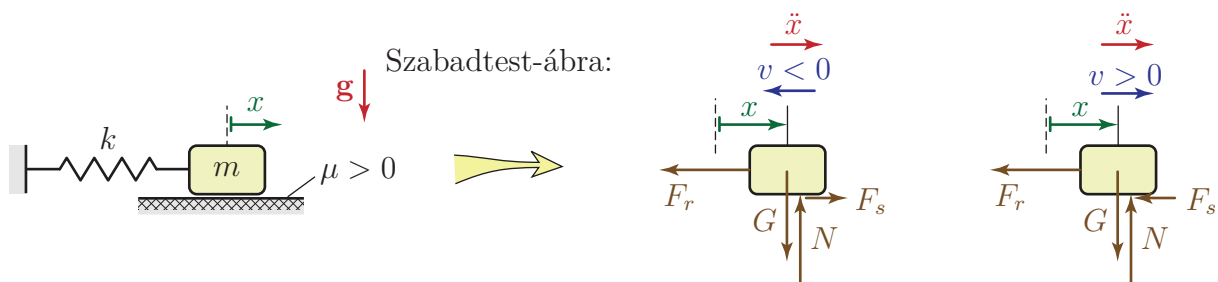
egyensúlyt tartson a vizsgált testre ható többi erővel. Ez is mutatja, hogy a tapadási súrlódási erő kényszererő, értékét nemcsak a sebesség határozza meg, hanem egyéb körülmények is.²¹ A csúszási súrlódási erő azonban önmagában nem biztosítja semmilyen kényszerfeltétel teljesülését; az \mathbf{N} normálerővel vett *eredőjét* tekintjük ún. nem ideális kényszererőnek. A sgn



2.36. ábra. A Coulomb-féle súrlódási erő karakterisztikája.

függvény az origóban többértékű, és nem teljesíti az ún. *Lipschitz-feltételt* sem. A Lipschitz-feltétel teljesülése annak bizonyításához lenne szükséges, hogy a mozgásegyenlet megoldása létezik és egyértelmű [16].

Ebben a fejezetben a 2.37. ábrán látható egyszerű lengőrendszer modellt fogjuk vizsgálni.



2.37. ábra. A száraz súrlódású lengőrendszerek alapmodellje és szabadtest-ábrái, negatív és pozitív sebesség esetén.

2.4.2. A mozgásegyenlet és a mozgástörvény pozitív illetve negatív sebesség esetén

Az előző fejezetben vázolt matematikai problémák kezelése érdekében tárgyaljuk külön a mozgás pozitív és negatív sebességű szakaszait!

Negatív sebességű mozgás

Először tekintsük azt az esetet, amikor $x(0) \equiv x_0 > 0$ és $\dot{x}(0) \equiv v_0 = 0$! Ekkor a mozgás első szakaszában negatív (pontosabban: nem pozitív) lesz a sebesség. A 2.37 szabadtest-ábra alapján a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -F_r + F_s,$$

²¹ Az N normálerő is változhat a külső körülmények megváltozása, pl. egy harmadik test hatása következtében.

tehát $F_r = kx$, $F_s = \mu N$ és $N = mg$ figyelembevételével

$$m\ddot{x} = -kx + \mu N.$$

A gyorsulás együtthatójával osztva a mozgásegyenletet,

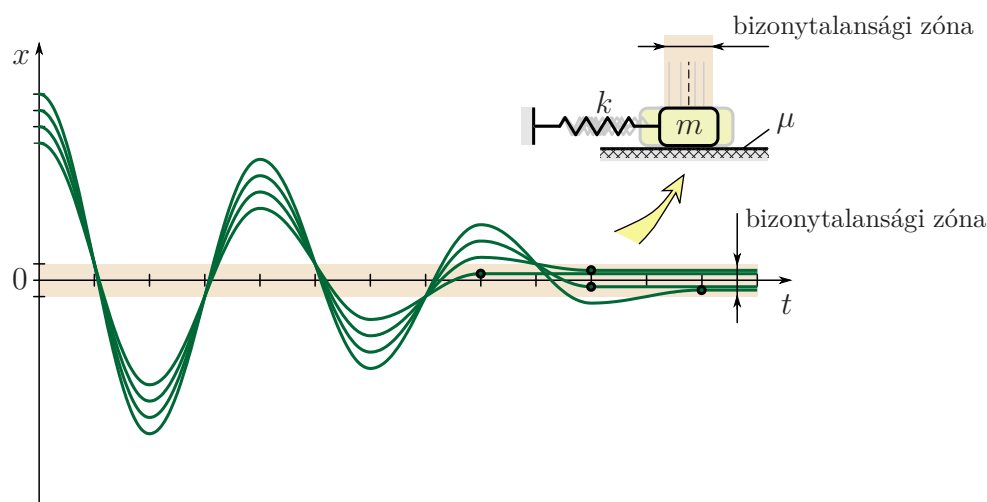
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \mu g. \quad (2.112)$$

A szokásos jelölésekkel az egyenlet sztenderd alakja

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \omega_n^2, \quad (2.113)$$

ahol bevezettük az $f_0 \equiv \mu N/k = \mu mg/k$ *statikus kitérés*t. A statikus kitérés azt az egyensúlyi elmozdulást adja meg, amelyet egy állandó μN nagyságú aktív erő okozna²².

Mivel μmg a tapadási súrlódási erő maximális értéke, ebben a feladatban a statikus kitérés annak a zónának a határát is megadja, amin belül a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tud tartani a rugóerővel. Egyensúly akkor lehetséges, ha $-f_0 \leq x \leq f_0$. Ezt az intervallumot *bizonytalansági zónának* nevezik, mert ezen belül bárhol letapadhat és végleg megállhat a test – hogy pontosan hol és mikor, azt csak a kezdeti feltételek ismeretében lehet kiszámítani (2.38. ábra). A gyakorlatban viszont ritkán ismertek a pontos kezdeti feltételek. Viszkózus csillapítású lineáris rendszereknek csak egy egyensúlyi helyzetük van, ott tehát nem jelenik meg ez a bizonytalanság.



2.38. ábra. Száraz súrlódású lengőrendszer rezgése a kezdeti feltételektől függően más és más kitérésnél áll meg. A megállás pillanatát kis körök jelölik az ábrázolt esetekben; megállás után a kitérés értéke állandó.

(2.113) egy inhomogén differenciálegyenlet, ezért a negatív sebességű mozgásra érvényes megoldást

$$x^-(t) = x_h^-(t) + x_p^-$$

²²A nehézségi erőterben felfüggesztett lengőrendszer kapcsán már volt szó a statikus kitérésről. Matematikailag itt is ugyanarról van szó: a (2.112) egyenlet ugyanolyan alakú, mint a (2.23) egyenlet, és ez utóbbinál is bevezethető az f_0 jelölés, hiszen az $f_0 \omega_n^2 = g$ feltételből $f_0 = mg/k$, ami éppen a (2.22) statikus kitérés.

alakban keressük. Mivel a differenciálegyenlet jobb oldalán konstans áll, az inhomogén egyenlet x_p^- partikuláris megoldását is kereshetjük $x_p^- = \text{állandó}$ alakban, tehát $\ddot{x}_p^- = 0$. Behelyettesítve a (2.113) egyenletbe:

$$\omega_n^2 x_p^- = f_0 \omega_n^2,$$

amiből $x_p^- = f_0$. Nem meglepő módon a statikus kitérést kaptuk, ami az egyik egyensúlyi megoldás.

A homogén egyenlet megegyezik a (2.2) egyenlettel, tehát az általános megoldás alakja

$$x^-(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + f_0, \quad t \in \left[0, \frac{T_n}{2}\right]. \quad (2.114)$$

A rezgés periódusideje $T_n = 2\pi/\omega_n$ (lásd 2.1.4. fejezet), viszont a fenti megoldás csak addig érvényes, amíg a sebesség nem vált előjelet. Mivel kitérített helyzetből, zérus sebességgel indítjuk a rendszert, az első félperiódus alatt marad negatív (nem pozitív) a sebesség.

A kezdeti feltételek figyelembevételéhez szükség van a sebesség kifejezésére is:

$$\dot{x}^-(t) = -C_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + C_2 \omega_n \cos(\omega_n t), \quad t \in \left[0, \frac{T_n}{2}\right]. \quad (2.115)$$

Az indulás pillanatában (2.114) és (2.115) alapján

$$x^-(0) = C_1 + f_0 \quad \text{és} \quad \dot{x}^-(0) = C_2 \omega_n,$$

továbbá a kezdeti feltételek szerint $x(0) \equiv x^-(0) = x_0$ és $\dot{x}(0) \equiv \dot{x}^-(0) = 0$. Az egyenlet-rendszert megoldva²³ $C_1 = x_0 - f_0$ és $C_2 = 0$, tehát

$$x^-(t) = (x_0 - f_0) \cos(\omega_n t) + f_0, \quad t \in \left[0, \frac{T_n}{2}\right]. \quad (2.116)$$

A rezgés amplitúdója $A_1 = x_0 - f_0$, és a lengés az $x = f_0$ helyzet körül történik. Így ebben a szakaszban a maximális kitérés x_0 .

Pozitív sebességű mozgás

Fél periódus után a hasáb sebessége előjelet vált, és további $T_n/2$ ideig pozitív (nem negatív) marad. A mozgás vizsgálata az eddigiekhez hasonlóan végezhető el, az $f_0 \leftrightarrow -f_0$ cserével. A mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = -f_0 \omega_n^2, \quad t \in \left[\frac{T_n}{2}, T_n\right], \quad (2.117)$$

aminek a megoldása

$$x^+(t) = B_1 \cos(\omega_n t) + B_2 \sin(\omega_n t) - f_0, \quad t \in \left[\frac{T_n}{2}, T_n\right] \quad (2.118)$$

alakú. A sebesség kifejezése

$$\dot{x}^+(t) = -B_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + B_2 \omega_n \cos(\omega_n t), \quad t \in \left[\frac{T_n}{2}, T_n\right]. \quad (2.119)$$

²³Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kezdeti feltételeket nem a homogén, hanem az inhomogén egyenlet megoldásának, azaz az $x^-(t) = x_h^-(t) + x_p^-$ összegnek kell kielégítenie.

A B_1 , B_2 együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a megoldás illeszkedjen az előzőhöz, tehát a $t = T_n/2$ pillanatban mind a kitérésre, mind a sebességre megegyező értékeket kell szolgáltatnia az $x^-(t)$ és $x^+(t)$ megoldásoknak – lásd (2.116) és (2.118). Figyelembe véve, hogy $T_n/2 = \pi/\omega_n$,

$$\begin{aligned} x^-\left(\frac{T_n}{2}\right) &= (x_0 - f_0) \cos\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) + f_0 \equiv 2f_0 - x_0 \quad \text{és} \\ x^+\left(\frac{T_n}{2}\right) &= B_1 \cos\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) + B_2 \sin\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) - f_0 \equiv -B_1 - f_0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Mivel a két kitérés egyenlő,

$$2f_0 - x_0 = -B_1 - f_0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = x_0 - 3f_0.$$

A sebesség előjelet vált $t = T_n/2$ -ben, tehát $\dot{x}^-(T_n/2) = \dot{x}^+(T_n/2) = 0$, és így

$$\dot{x}^+\left(\frac{T_n}{2}\right) = -B_1\omega_n \sin\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) + B_2\omega_n \cos\left(\omega_n \frac{\pi}{\omega_n}\right) \equiv -B_2\omega_n$$

miatt $B_2 = 0$. Ezzel a nemnegatív sebességű szakaszon érvényes megoldás

$$x^+(t) = (x_0 - 3f_0) \cos(\omega_n t) - f_0, \quad t \in \left[\frac{T_n}{2}, T_n\right]. \quad (2.121)$$

Mivel a súrlódás a mechanikai energia csökkenésével jár, ennek a félperiódusnak is az elején, $t = T_n/2$ -ben maximális a kitérés nagysága. (2.120) alapján $x_{\max} = |x(T_n/2)| = x_0 - 2f_0$. A lengés az $x = -f_0$ helyzet körül történik, $A_2 = x_0 - 3f_0$ amplitúdóval.

A mozgás lefolyása, megállási feltétel

Egy $T_n = 2\pi/\omega_n$ hosszúságú pozitív sebességű periódus után a sebesség ismét előjelet vált az $x^+(T_n) = (x_0 - 3f_0) \cos(2\pi) - f_0 \equiv x_0 - 4f_0$ kitérésnél. A további félperiódusokra vonatkozó megoldásokat szintén a bemutatott módon lehetne kiszámítani, x_0 helyett ezt az új kitérést használva az együtthatók meghatározására.

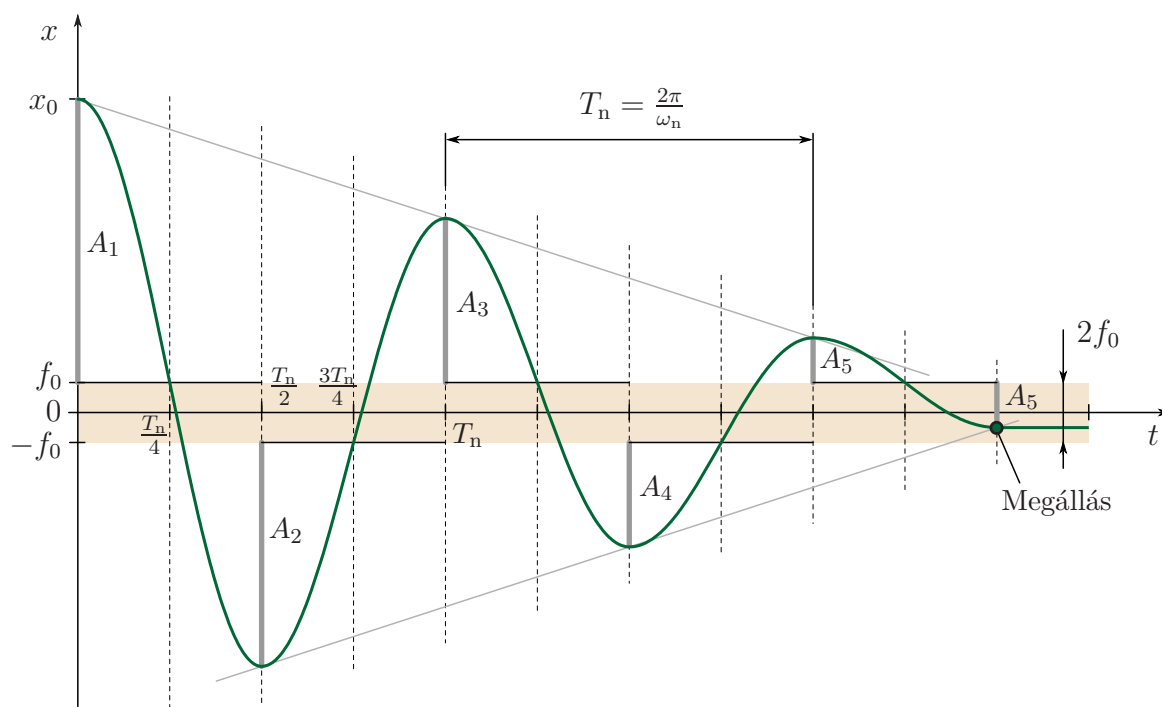
A fentiek alapján megállapítható, hogy az amplitúdó – azaz a $\cos(\omega_n t)$ együtthatója – és az origótól mért maximális kitérés nagysága félperiódusonként $2f_0$ -al csökken. A rezgés lecsengése tehát *lineáris*, amint a 2.39. ábrán is látható. Negatív sebesség mellett $x = f_0$, pozitív sebesség mellett pedig $x = -f_0$ körül történik a lengés.

A száraz súrlódású lengőrendszer mozgása – a viszkózan csillapított rendszerekkel ellentétben – véges idő alatt véget ér. Addig tart a mozgás, amíg az amplitúdó $2f_0$ -nál nagyobb, mert csak ebben az esetben „ér át” a megoldás a bizonytalansági zóna másik oldalára. Mivel a sebesség mindig félperiódusonként vált előjelet, csak valamely $t = nT_n/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ időpontban következhet be a végleges megállás, azaz az n -edik fél lengés végén. Ha $|x_0| \leq f_0$, akkor a rendszer nyugalomban marad ($n = 0$). Egyébként a megállás feltétele

$$A_n \equiv \underbrace{(x_0 - f_0)}_{=A_1} - (n - 1) 2f_0 \leq 2f_0,$$

ahol A_n az n -edik fél lengés amplitúdója. A fenti egyenlőtlenségből

$$n \geq \frac{A_1}{2f_0} = \frac{x_0 - f_0}{2f_0},$$



2.39. ábra. Száraz súrlódású lengőrendszer rezgésének lineáris ütemű csillapódása. A bizonytalansági zóna határára berajzolt vonalak azt mutatják, hogy a mozgás egyes szakaszaiban melyik pozíció körül történik a rezgés. A megállás helye $x_{\acute{a}} = f_0 - A_5$.

tehát $n = \text{ceil}(A_1/(2f_0))$, ahol ceil a felfelé kerekítő függvényt jelöli. n ismeretében a megállás időpontja $t = nT_n/2$, és a megállás az

$$x_{\acute{a}} = (A_n - f_0) \cos(n\pi)$$

kitérésnél következik be. Itt felhasználtuk, hogy $\cos(\omega_n n T_n/2) = \cos(\omega_n n \pi/\omega_n) = \cos(n\pi)$. Páratlan n a negatív, páros n pedig a pozitív sebességű mozgásokhoz tartozik.

A fenti levezetés tapasztalatai tehát a következőképpen foglalhatók össze:

1. Egy száraz súrlódású lengőrendszer sajátkörfrekvenciája és periódusideje megegyezik a hasonló csillapítatlan lengőrendszerével.
2. Az amplitúdó csökkenése időben lineáris, ezért véges időn belül megáll a rezgés.
3. Létezik egy ún. bizonytalansági zóna: $-f_0 < x < f_0$, ezen belül bárhol megállhat a lengőrendszer, a kezdeti feltételektől függően.
4. A lengés felváltva hol f_0 , hol $-f_0$ körül történik.

2.5. A másodfajú Lagrange-egyenlet

Az eddig tárgyalt modellek mozgásegyenletét az ún. *Newton-Euler módszerrel*²⁴ írtuk fel, azaz szabadtest-ábra felrajzolása után alkalmaztuk a dinamika alaptételét. Összetett me-

²⁴Isaac Newton, 1643-1727; Leonhard Euler, 1707-1783

chanikai rendszerek mozgásegyenletének felírása azonban hosszadalmas lehet ezen a módon, mert minden egyes test szabadtest ábráját fel kell rajzolni, és a kinematikai összefüggéseket, kényszereket figyelembe véve általában egy sok egyenletből álló egyenletrendszerre jutunk [5].

A mozgásegyenlet ún. *analitikus módszerekkel* is felírható. Az analitikus módszerek alkalmazásához általában energia vagy teljesítmény jellegű mennyiségeket kell megfelelően felírni – ebben a lépésben használjuk fel a kinematikai összefüggéseket –, majd differenciálások elvégzése után kapjuk meg a mozgásegyenlete(ke)t. Ilyen módszer például a *teljesítménytétel* alkalmazása. A *másodfajú Lagrange-egyenlet*²⁵ – mely bizonyos szempontból a teljesítménytétel továbbfejlesztésének tekinthető – mind gyakorlati, mind elméleti szempontból a legfontosabb analitikus módszerek közé tartozik. Noha csak anyagi pontrendszerre vezetjük le, a másodfajú Lagrange-egyenlet merev test-rendszerekre is érvényes, ugyanis a merev testeket is tekinthetjük diszkrét tömegpontok rendszerének. A diszkrét pontokra való összegzést tartalmazó képletekről úgy térhetünk át a folytonos merev testekre érvényes képletekre, hogy az anyagi pontok tömegét a dV térfogatban elhelyezkedő ρdV tömeggel helyettesítjük (ahol ρ a tömegsűrűség), majd integrálunk a test egész térfogatára [5, 10].

A levezetéshez az alábbi jelöléseket vezetjük be:

- N az anyagi pontok száma,
- m_i , $i = 1, \dots, N$ az i -edik anyagi pont tömege,
- \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$ az i -edik anyagi pont helyvektora,
- \mathbf{K}_i , $i = 1, \dots, N$ az i -edik anyagi pontra ható ideális kényszererők eredője, melyek az ún. geometriai kényszereket biztosítják,
- n a rendszer szabadsági foka.

A másodfajú Lagrange-egyenlet használata elsősorban összetett mechanikai rendszerek mozgásegyenleteinek felírása során előnyös, mert a végeredményül kapott egyenletrendszerben nem jelennek meg a testek egymáshoz vagy a környezethez képest végzett mozgását korlátozó geometriai kényszerfeltételek egyenletei. Ezért a *kényszer* fogalma kiemelt fontosságú a módszer alkalmazása szempontjából.

2.5.1. A kényszerek osztályozása

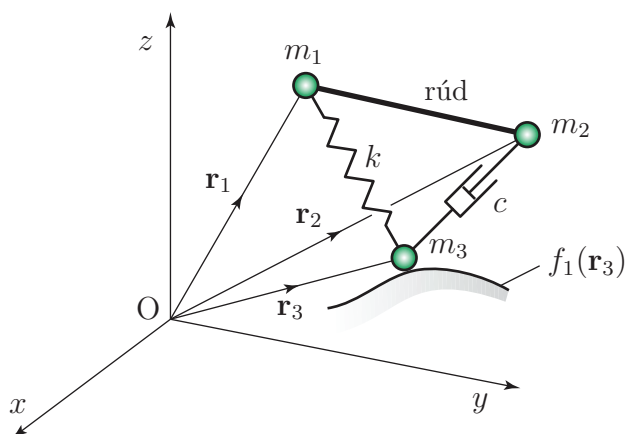
A *geometriai kényszerek* a koordináták segítségével leírható összefüggések, melyek valamilyen megszorítást jelentenek a rendszer mozgására vonatkozóan. Például a 2.40. ábrán mutatott esetben egy $f_1(\mathbf{r}_3) = 0$ alakú összefüggéssel fejezhető ki az, hogy az m_3 tömegű test csak egy felületen mozoghat, és az $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0$ függvény adja meg azt, hogy az m_1 , m_2 testek távolsága a köztük levő l hosszúságú merev rúd miatt állandó marad.

Tehát általában N anyagi pont és g geometriai kényszer esetén g darab

$$f_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad p = 1, \dots, g \quad (2.122)$$

alakú összefüggést írhatunk fel, melyekben nem szerepelhet a sebesség kifejezése, csak a koordináták és az idő. Vannak ún. *kinematikai kényszerek* is, melyek matematikai kifejezéséhez

²⁵Joseph Louis Lagrange, 1736-1813



2.40. ábra. Kölcsönható anyagi pontrendszer kényszerekkel.

mindenképpen szükség van a sebességekre is – pl. ilyenek a térbeli gördülési problémák. A másodfajú Lagrange-egyenlet nem alkalmas a kinematikai kényszerek kezelésére; az ilyen problémák megoldására pl. az elsőfajú Lagrange-egyenlet, a Routh-Voss-egyenlet vagy az Appell-Gibbs-egyenlet használható [4, 7]. Ebben a könyvben csak geometriai kényszerekkel foglalkozunk.

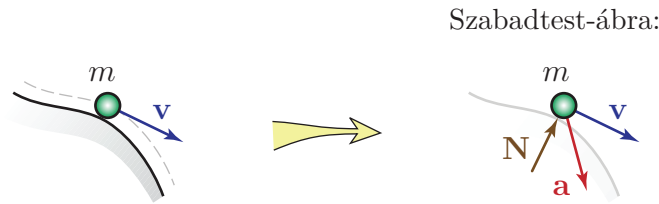
2.17. megjegyzés: A dinamika alaptételének alkalmazása során felírt kinematikai összefüggések gyakran szintén (2.122) alakban adhatók meg integrálás után. Például egy síkmozgást végző R sugarú gördülő korong súlypontjának gyorsulása és szöggyorsulása között felírt $a_s = R\varepsilon$ alakú összefüggés $x_s - R\varphi = 0$ alakra hozható, megfelelően felvett elmozdulás- és elfordulás koordinátákkal. Ez annak felel meg, hogy minden kényszerfeltétel idő szerinti deriváltja is kényszerfeltétel – így a geometriai kényszerek megfogalmazhatók a koordináták, a sebességek és a gyorsulások „szintjén” is. A *kinematikai kényszerek* viszont integrálással sem hozhatók (2.122) alakra. ♣

A geometriai kényszerek csökkentik a rendszer szabadsági fokát, tehát N darab anyagi pont és g geometriai kényszer esetében a szabadsági fok $n = 3N - g$. A szabadsági fok definíciójából következően elég annyi másodrendű differenciálegyenlet a mozgás leírásához, ahány szabadsági fokú a rendszer. A másodfajú Lagrange-egyenlet alkalmazásával pontosan ennyi, n darab egyenletet kapunk.

A kényszereket más szempont alapján is csoportosíthatjuk. *Ideálisnak* nevezzük azokat a kényszereket, melyek ún. *virtuális teljesítménye* zérus. Ez azt jelenti, hogy a kényszerek időtől való függését figyelmen kívül hagyva, azokat időben „befagyasztva” számoljuk ki a teljesítményt [4, 7]. Ha a kényszererők összegzett teljesítménye nulla, akkor a virtuális teljesítményük is nulla:

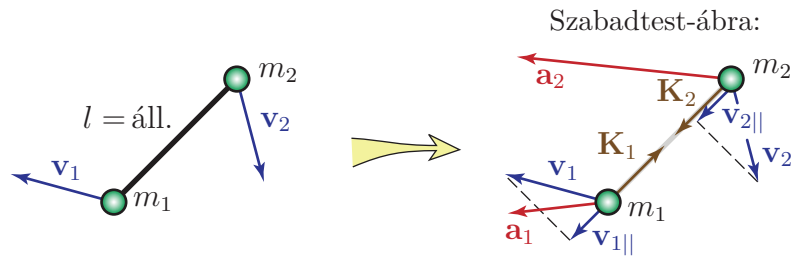
$$P = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0.$$

Itt \mathbf{v}_i az i -edik anyagi pontra ható \mathbf{K}_i kényszererő támadási pontjának, azaz magának az anyagi pontnak a sebessége. A két vektor skalárisan van összeszorozva, ezért például felületen történő mozgás esetén a normálerő ideális kényszererő: $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$, mert \mathbf{N} merőleges az anyagi pont \mathbf{v} sebességére (2.41. ábra).



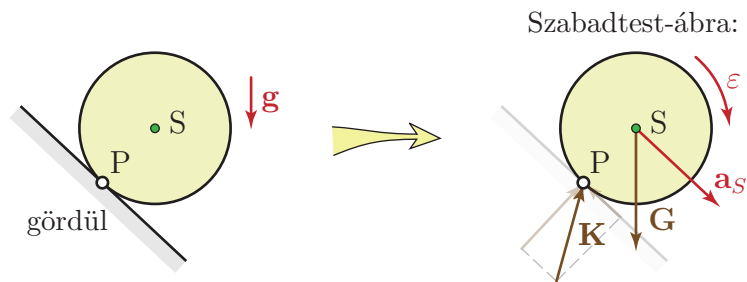
2.41. ábra. A normálerő ideális kényszererő, mert merőleges az anyagi pont sebességére.

Ha két tömegpontot elhanyagolható tömegű rúd (vagy kötél) köt össze, akkor a rúd végpontjainak rúdirányú sebességkomponensei megegyeznek, míg a rúdról a testekre ható erők rúdirányúak és ellentétes értelműek, ezért a merev rúd is ideális kényszer (2.42. ábra): $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{v}_{1\parallel} + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{v}_{2\parallel} = 0$.



2.42. ábra. Az elhanyagolható tömegű merev rúd, mint ideális kényszer.

Gördülés során a test talajjal érintkező pontjának a sebessége zérus, tehát a talajról átadódó kényszererő teljesítménye – ezen belül a tapadási súrlódási erő teljesítménye is – nulla (2.43 ábra): $\mathbf{v}_P = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_P = 0$.



2.43. ábra. A talajról a gördülő korongra átadódó kényszererő ideális.

A csúszási súrlódási erő teljesítménye viszont negatív, hiszen az erő a sebességgel ellentétes irányú. Tehát a csúszási súrlódásos kapcsolat nem ideális kényszer.

Az időtől függő kényszerek teljesítménye nem nulla, *virtuális teljesítményük* viszont már általában nulla. Gondoljunk például egy sima felületre helyezett hasábra, melyhez rugót rögzítünk. A rugó másik végének előírt függvény (pl. $\sin(\omega t)$) szerinti mozgatása – ez az ún. útgerjesztés, lásd 2.6.3. fejezet és 2.54. ábra – időtől függő kényszerként vehető figyelembe. Nyilvánvaló, hogy a rendszerrel energiát lehet közölni ezen a módon, a teljesítmény nem nulla.

Teniszezéskor a teniszütőnek vágódó labdát az ütő lassú, hátrafelé történő mozgatásával lehet lelassítani. Ennek ütemét a teniszező határozza meg, ez is egy időfüggő kényszer. Ebben az esetben az érintkezési pont sebessége ellentétes a labdára ható kényszererővel, tehát a kényszererő teljesítménye negatív.

A kiegyensúlyozatlan forgórészek tipikus esetben (jó közelítéssel) állandó szögsebességgel forognak, mozgásuk időbeli lefolyása tehát – legalább részben – elő van írva, ez is időfüggő kényszer. Mint látni fogjuk a 2.6.4. fejezetben, kiegyensúlyozatlan forgórészekkel is gerjeszthető egy lengőrendszer, a kényszererő illetve -nyomaték teljesítménye ebben az esetben sem nulla.

A felsorolt példákban az időfüggés figyelmen kívül hagyása annak felel meg, hogy a rugó végét rögzítjük, a teniszütőt nem mozgatjuk, és a kiegyensúlyozatlan forgórészt megállítjuk. Nyilvánvalóan nulla az ilyen módon „befagyasztott” kényszerekhez tartozó *virtuális* teljesítmény, tehát ezek is ideális kényszerek.

2.18. megjegyzés: Az időfüggő kényszerek „befagyasztásának” az az oka, hogy így jól elkülöníthetők a külső, aktív erők és a külső kényszererők. Amint később látni fogjuk, a mozgásegyenlet külső, aktív gerjesztő erőkből vagy nyomatékokból származó tagjait (az ún. általános erő komponenseit) az erőrendszer teljesítménye²⁶ alapján számítjuk ki (lásd (2.5.3) fejezet). Az időfüggő kényszerek mögött is mindig van valamilyen külső mechanikai rendszer, ami a kényszerhez szükséges kényszererőt biztosítja. Azonban ebben az esetben nem ebből az ismeretlen kényszererőből számítjuk ki a mozgásegyenlet megfelelő tagját, hanem a kényszerfeltételből, például a kényszer által előírt elmozdulásból származó potenciális energia változásból. Ha figyelembe vennénk az időfüggő kényszerekhez tartozó teljesítményt is, akkor duplán jelenne meg a megfelelő tag a mozgásegyenletben. Erre a problémára még visszatérünk a 2.36. megjegyzésben. ♣

2.5.2. A másodfajú Lagrange-egyenlet levezetése

A Lagrange-módszer alkalmazásának első lépésében intuitív módon választunk n darab *általános koordinátát* az n szabadsági foknak megfelelően:

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

Mindig több lehetőség van a koordináták megválasztására, ezek közül azt célszerű választani, amivel a legegyszerűbb számolni – ezt azonban sokszor nem lehet előre megállapítani. Mindenképpen szükséges, hogy a választott n koordináta *független* legyen – így egyértelműen le lehet írni velük a rendszer mozgását. Ebből következően mindegyik anyagi pont helyvektora kifejezhető az általános koordinátákkal:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, N,$$

illetve rövidebb jelöléssel

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.123)$$

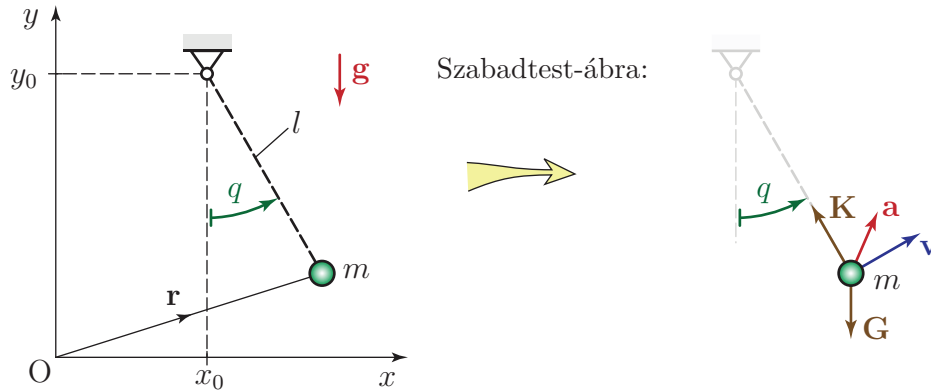
Például a 2.44. ábrán látható matematikai inga egy szabadsági fokú ($n = 1$), a tömegpont x és y koordinátája nem független egymástól. Általános koordinátának elvileg választhatnánk az x koordinátát (az y koordináta nem adja meg egyértelműen a függőleges helyzet

²⁶Pontosabban a virtuális teljesítménye.

közelében lengő inga pozícióját), de célszerűbb a $q \equiv \varphi$ választás. Az ábra jelöléseit használva kifejezhető az \mathbf{r} helyvektor az általános koordinátával:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_0 + l \sin(q) \\ y_0 - l \cos(q) \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

A fenti kifejezésből látszik, hogy a vektor x és y komponense nem független egymástól, köztük egy geometriai kényszer teremt kapcsolatot.



2.44. ábra. Matematikai inga a választott $q \equiv \varphi$ általános koordinátával, és a tömegpont szabadtest-ábrája.

A 2.2.1. fejezetben, az ingák tárgyalása során is természetes volt a szögkitérés használata koordinátaként. Általában könnyen áttekinthető, hogy milyen kézenfekvő lehetőségek vannak az általános koordináták megválasztására. Az „általános” jelző arra utal, hogy a Lagrange-egyenlet szempontjából nem teszünk különbséget elmozdulás- és elfordulás koordináták között.

2.19. megjegyzés: Időfüggő kényszerek esetén

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet ekkor is érvényes, de levezetéséhez be kellene vezetni az ún. *virtuális sebesség* fogalmát. Az egyszerűség kedvéért a levezetést időtől független geometriai kényszerek esetére mutatjuk meg. ♣

Az általános koordináták időben változnak (ez nincs előre megadva, így ez nem időfüggő kényszer!), tehát a (2.123) összefüggést az összetett függvény deriválási szabálya alapján deriválhatjuk idő szerint:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (2.125)$$

azaz $\dot{\mathbf{r}}_i$ a \dot{q}_j általános sebességek lineáris kombinációja. A fenti egyenlet mindkét oldalát deriválva \dot{q}_j szerint, megkapjuk a \dot{q}_j általános sebességek együtthatóvektorait:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.126)$$

Ezeket az összefüggéseket fel fogjuk használni a másodfajú Lagrange-egyenlet levezetése során.

A dinamika alaptétele alapján

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{K}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

ahol \mathbf{F}_i az i -edik tömegpontra ható aktív erőket és a nem ideális kényszererőket, \mathbf{K}_i pedig az ideális kényszererőket jelöli. $\dot{\mathbf{r}}_i$ -tal szorozva és összegezve

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0,$$

hiszen az ideális kényszerekre definíció szerint $\sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0$. (2.125) behelyettesítésével

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = 0,$$

ahol $(m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i)$ nem függ a j indextől (az általános koordináták indexétől), tehát a j -re és i -re történő összegzés sorrendje felcserélhető:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0. \quad (2.127)$$

Ennek az egyenletnek a mechanikai rendszer mozgása során – miközben változnak az általános koordináták – végig teljesülnie kell. Mivel a q_j általános koordináták függetlenek, a \dot{q}_j általános sebességek is egymástól függetlenül változnak. Ebből következik, hogy a j indexre számított (2.127) összeg minden egyes tagja zérus, tehát a zárójelben szereplő kifejezés is minden j indexre nulla:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.128)$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet felírásához alakítsuk át ezt a kifejezést! Az egyszerűség kedvéért a $j = 1, \dots, n$ feltételt nem írjuk ki a levezetés minden lépésében. (2.128) második tagja definíció szerint az *általános erő* j -edik komponense:

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.129)$$

ami úgy értelmezendő, hogy az \mathbf{F}_i és $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$ vektorok skaláris szorzatait kell kiszámítani és összegezni. Az általános erő komponensei attól függően erő vagy nyomaték dimenziójúak, hogy a megfelelő általános koordináta elmozdulás vagy elfordulás jellegű-e. Az „általános” jelző csak arra utal, hogy az (aktív) erőket és nyomatékokat ugyanúgy kezeljük a másodfajú Lagrange-egyenletben.

(2.128) első tagjának átalakításához felhasználjuk, hogy egy N testből álló anyagi pontrendszer kinetikus energiája

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad \text{és} \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.131)$$

(2.131) teljes idő szerinti deriváltját véve²⁷

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right).$$

A zárójelben szereplő második tag átírásához a (2.126) összefüggést használjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (2.132)$$

és az első tagra is alkalmazva a (2.126) képletet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.133)$$

(2.130) felhasználásával

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.134)$$

ami (2.128) első tagja. Így (2.128), (2.129) és (2.134) figyelembevételével felírható a *másodfajú Lagrange-egyenlet*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.135)$$

Ez az n darab egyenlet kinematikai kényszereket nem tartalmazó, n szabadsági fokú mechanikai rendszerek mozgásegyenleteit adja meg, akár időtől függő geometriai kényszerek mellett is.

2.20. megjegyzés: A Lagrange-egyenlet alkalmazásához tisztában kell lenni a teljes időbeli derivált és a parciális derivált közötti különbséggel. A felírt energia vagy teljesítmény jellegű mennyiségek *közvetlenül* függenek a q_j koordinátáktól és/vagy a \dot{q}_j sebességektől. Ezalatt azt értjük, hogy az adott fizikai mennyiség kifejezésében szerepel q_j vagy \dot{q}_j . Noha egy lengőrendszer mozgása során van kapcsolat a q_j koordináták és a \dot{q}_j sebességek között, az csak a mozgástörvény meghatározása után adható meg – tehát ezt csak *közvetett* függésnek tekintjük. Parciális deriválás során ezt a közvetett függést nem vesszük figyelembe.

Például ha $T = 1/2 m \dot{x}^2$, akkor

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad (\text{közvetlen függés } \dot{x}\text{-től}), \quad (2.136)$$

azonban

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (\text{csak közvetett függés } x\text{-től}). \quad (2.137)$$

²⁷Időfüggő kényszer mellett megjelenne ebben a kifejezésben egy $\partial \dot{\mathbf{r}}_i / \partial t$ derivált is.

A teljes idő szerinti deriválás során azonban figyelembe vesszük, hogy a koordináták és sebességek is függenek az időtől, a mozgástörvénynek megfelelően. Ezért $\dot{x} = \dot{x}(t)$ miatt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}. \quad (2.138)$$

Külső hatások következtében közvetlenül is függhet a kinetikus energia az időtől – ilyenkor megjelenik a kinetikus energia kifejezésében az idő, például

$$T = \frac{1}{2}(m + m_0)\dot{x}^2 - m_0\dot{x}r\omega \sin(\omega t) + \text{konstans} \quad (2.139)$$

alakban. Erre az esetre a 2.6.4. fejezetben mutatunk példát. ♣

2.5.3. Az általános erő meghatározása

Az általános erő j -edik komponense definíció szerint

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.140)$$

tehát kiszámításához szükség van az $\mathbf{r}_i(q_j)$ függvényre. Például a 2.44. ábrán látható matematikai inga esetében $n = N = 1$ és a (2.124) képlet adja meg az $\mathbf{r}(q)$ függvényt, amiből

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} = \begin{bmatrix} l \cos(q) \\ l \sin(q) \end{bmatrix}.$$

A fonálon lógó pontszerű testre ható nehézségi erő az egyetlen aktív erő, tehát

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad \text{és így az általános erő}$$

$$Q = [0 \quad -mg] \cdot \begin{bmatrix} l \cos(q) \\ l \sin(q) \end{bmatrix} \equiv -mgl \sin(q),$$

ami a nehézségi erő felfüggesztési pontra számított nyomatéka.

Gyakran ennél egyszerűbben is meghatározhatók az általános erő komponensei, ha *nincsenek időtől függő kényszerek*, azaz $\partial \mathbf{r}_i / \partial t = \mathbf{0}$. Ekkor a (2.140) egyenletet \dot{q}_j -tal szorozva és j -re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = P, \quad (2.141)$$

hiszen (2.125) és Q_j definíciója segítségével az egyenlet bal oldala átírható:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{=\dot{\mathbf{r}}_i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \equiv P.$$

Tehát ha a mechanikai rendszerre ható erők teljesítményét ki tudjuk fejezni (2.141) alakban, akkor a j -edik általános sebesség együtthatójaként megkapjuk az általános erő j -edik komponensét.

2.21. megjegyzés: Egy merev testre ható, p darab koncentrált erőből és r darab koncentrált erőpárból álló erőrendszer teljesítményét

$$P \equiv \sum_{i=1}^p \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^r \mathbf{M}_j \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.142)$$

alakban fejezhetjük ki. \mathbf{v}_i az i -edik erő támadáspontjának sebessége, $\boldsymbol{\omega}$ pedig a test szögsebessége. Ebben az esetben is a (2.141) összefüggés alapján számíthatók az általános erő komponensei. Egy merev testre ható megoszló erőrendszer teljesítménye megegyezik az eredő koncentrált erő teljesítményével. Ennek megfelelően járhatunk el a nehézségi erő teljesítményének számítása során is. ♣

A matematikai inga példájában a sebesség függőleges komponense $v_y = l\dot{\varphi} \sin(\varphi)$, tehát

$$P = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = -mg l\dot{\varphi} \sin(\varphi) = \underbrace{-mgl \sin(\varphi)}_{=Q} \dot{\varphi}.$$

2.22. megjegyzés: Időtől függő kényszerek esetén

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t},$$

tehát

$$\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j}_{=\dot{\mathbf{r}}_i - \partial \mathbf{r}_i / \partial t} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i - \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \equiv P - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}.$$

Ha az \mathbf{F}_i erőkomponensek nem függenek a sebességtől, azaz $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(q_j, t)$, akkor a $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$ összeg sem tartalmazza a \dot{q}_j általános sebességeket. Tehát ekkor is helyes eredményre vezet, ha az erők teljesítményét kifejezzük (2.141) alakban, és a j -edik általános sebesség együtthatójaként azonosítjuk az általános erő j -edik komponensét.

Sebességtől és időtől is függő $\mathbf{F}_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ erő esetében azonban nem alkalmazható ez a módszer. Tetszőleges időtől függő kényszerfeltétel esetén vagy a (2.140) definíciót kell használni, vagy a potenciálfüggvény illetve a disszipatív potenciál deriválásán alapuló, alább ismertetett módszereket. ♣

Az általános erő komponenseinek számítása jól algoritmizálható az alábbi speciális esetekben:

- A *potenciálos erők* kifejezhetők a potenciálfüggvényük negatív gradienseként. Például egy anyagi pontrendszer i -edik pontjára ható erő

$$\mathbf{F}_i = - \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} \right]^T.$$

Alkalmazva a (2.140) definíciót és az összetett függvények deriválási szabályát:

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^N - \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

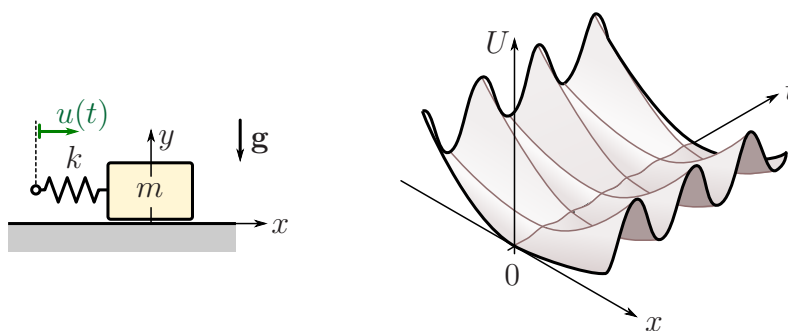
A matematikai inga példájában

$$U = -mgl \cos(q), \quad \text{tehát} \quad Q = -\frac{\partial U}{\partial q} = -mgl \sin(q), \quad (2.143)$$

ahol $q \equiv \varphi$.

Ha egy m tömegű testhez rögzített rugó végpontjának helyzete az *előre megadott* $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ függvény szerint változik a rugó irányával párhuzamosan (lásd 2.45. ábra), akkor a potenciális energia a rugó megnyúlásán keresztül nemcsak a test – előre nem ismert módon változó – $x(t)$ koordinátájától, hanem az adott $u(t)$ elmozdulástól is függ:

$$U(x, t) = \frac{1}{2}k(x - u(t))^2. \quad (2.144)$$



2.45. ábra. Időfüggő kényszernek kitett lengőrendszer, és a hozzá tartozó időfüggő potenciális energia.

Itt tehát időtől függő kényszerfeltétellel állunk szemben, azonban a közvetlen időfüggés nem befolyásolja azt, hogy a potenciálfüggvényből kiszámítható a megfelelő általános erő: $Q(t) = -\partial U_2 / \partial x = -k(x - u(t))$, ahol x az általános koordináta.

- Viszkózus csillapító elemek esetében – a rugalmas elemek potenciális energiájának mintájára – bevezethető az ún. *Rayleigh-féle disszipatív potenciál* vagy disszipatív függvény, melynek mértékegysége J/s, ugyanúgy, mint a teljesítményé:

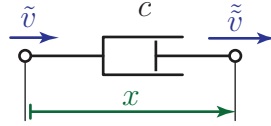
$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2. \quad (2.145)$$

Itt x a lengéscsillapító két végpontjának egymáshoz képest mért elmozdulását megadó relatív koordináta. Természetesen csak a távolság \dot{x} változási sebességének van jelentősége a csillapítás szempontjából. Előfordulhat, hogy – a 2.46. ábrának megfelelően – a csillapító elem mindkét végpontja mozog (pl. lehetséges, hogy az egyik sebesség időbeli változása elő van írva, időfüggő kényszerként). Ebben az esetben $\dot{x} = \tilde{v} - \tilde{v}$ e két végpont sebességkülönbsége, így

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{2}c(\tilde{v} - \tilde{v})^2.$$

A csillapító erő előjelhelyesen $F_d = -c\dot{x}$. Ha az x koordinátát kifejezzük a q_j általános koordinátákkal, akkor (2.140) alapján a megfelelő általános erő komponensek az alábbi alakban adhatók meg:

$$Q_j = -c\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_j}. \quad (2.146)$$



2.46. ábra. Az x relatív koordináta és az $\dot{x} = \dot{\tilde{x}} - \tilde{v}$ relatív sebesség értelmezése a lengéscsillapító példája kapcsán.

Az általános erő a disszipatív potenciálból a

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.147)$$

formulával számítható, ugyanis a disszipatív potenciál (2.145) definíciója szerint – figyelembe véve, hogy \dot{x} függ \dot{q}_j -től, azaz $\dot{x} = \dot{x}(\dot{q}_j) -$

$$-\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} = -c\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.148)$$

(2.126) miatt ez átírható

$$Q_j = -c\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_j}$$

alakba, ami megegyezik a (2.146) kifejezéssel.

Tehát az általános erő j -edik komponenséhez hozzájárulhatnak potenciális erők (pl. rugóerő, nehézségi erő), csillapító erők és nem potenciális erők (pl. adott külső erő) is. A fentiek alapján a másodfajú Lagrange-egyenletnek a következő, a gyakorlatban jól használható alakját írhatjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.149)$$

Itt Q_j^* az általános erő j -edik komponensének az a része, ami nem fejezhető ki az egyenlet bal oldalán szereplő deriváltak formájában.

2.23. megjegyzés: Konzervatív rendszerekben minden erő potenciális, tehát az általános erő komponensei teljes egészében kifejezhetők $Q_j = -\partial U / \partial q_j$ alakban. Mivel a potenciális energia nem függ a sebességtől, $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$, ezért bevezethető az $L = T - U$ Lagrange-függvény és a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

(Euler-)Lagrange-egyenlet szolgáltatja a mozgásegyenleteket. A fenti egyenletnek fontos szerepe van az ún. variációszámításban. A másodfajú Lagrange-egyenlet ún. variációs elvek alapján is levezethető [8]. A fizika több ágában is – a mechanika mellett elsősorban az elektrodinamikában – nagy elméleti jelentősége van a variációs elveknek. ♣

2.24. megjegyzés: A disszipatív potenciál bevezetését az indokolja, hogy segítségével a rugóerők potenciális energiájához hasonló módon kezelhető analitikus kifejezést kapunk a viszkózus csillapítás megfelelő leírásához. Azonban fizikai tartalmat is társíthatunk ehhez a függvényhez: *a \mathcal{D} disszipatív potenciál a szabad lengőrendszer E mechanikai energiájának csökkenési ütemét jellemzi:*

$$\dot{E} = -2\mathcal{D}. \quad (2.150)$$

Ennek az állításnak a bizonyításához írjuk fel a mechanikai energia teljes idő szerinti deriváltját! Kihaszználva a láncszabályt,

$$\dot{E} \equiv \frac{d}{dt}(T(q_j, \dot{q}_j, t) + U(q_j, t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.151)$$

Ha a lengőrendszer szabad, akkor sem a kinetikus energia, sem a potenciális energia nem függhet közvetlenül az időtől, mert a közvetlen időfüggés mindig valamilyen külső hatás következménye. Tehát

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{és} \quad (2.152)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \quad (2.153)$$

Szabad lengések során a Q_j^* általános erő komponensek is nullák, ezért (2.149) alapján kifejezhető $\partial T/\partial q_j$:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (2.154)$$

Visszahelyettesítve a fenti eredményt a (2.151) egyenletbe, a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (2.155)$$

Kihaszználva, hogy

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right), \quad (2.156)$$

a (2.155) képlet tömörebb alakba írható át:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \quad (2.157)$$

A továbblépéshez fel kell használnunk Euler homogén függvényekre vonatkozó tételét. Az $f(x_1, \dots, x_n)$ függvény homogén r -ed fokú, ha

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.158)$$

Euler tétele szerint [8] egy homogén r -ed fokú függvény esetében

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i \right) = r f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.159)$$

Ha a kinetikus energia nem függ közvetlenül az időtől, akkor az a \dot{q}_j általános sebességek másodfokú függvénye ($r = 2$), azaz

$$T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) = \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad (2.160)$$

ezért a tétel szerint

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T. \quad (2.161)$$

Hasonlóképpen, a disszipatív potenciál is a sebességek másodfokú függvénye, ezért

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2\mathcal{D}. \quad (2.162)$$

Mivel a potenciális energia nem függ sem a sebességektől, sem közvetlenül az időtől,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{dU}{dt}. \quad (2.163)$$

Mindezeket behelyettesítve a (2.157) képletbe:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 2\frac{dT}{dt} + 2\frac{dU}{dt} + 2\mathcal{D}, \quad (2.164)$$

amiből

$$\dot{E} \equiv \frac{d}{dt}(T + U) = -2\mathcal{D}, \quad (2.165)$$

állításunknak megfelelően. ♣

2.5.4. A másodfajú Lagrange-egyenlet és a Newton-Euler-módszer összehasonlítása

A másodfajú Lagrange-egyenlet használata sok szempontból előnyös a dinamika alaptételéhez (a Newton-Euler-módszerhez) képest:

- Nem szükséges szabadtest-ábrákat rajzolni.
- Nem kell a szükségesnél nagyobb egyenletrendszereket megoldani, a szabadsági foknak megfelelő számú egyenletet kapunk.
- Az energiakifejezések felírása után már csak deriválásokat kell elvégezni, ami jól algoritmizálható, számítógéppel is elvégezhető.
- A másodfajú Lagrange-egyenlet alkalmazása során könnyen át lehet térni más (pl. henger-, gömbi polár, stb.) koordinátákra. A dinamika alaptételének esetében ez meglehetősen körülményes [8].

Természetesen hátránya is lehet a Lagrange-eljárás alkalmazásának:

- A belső erőkről és az ideális kényszererőkről nem kapunk információt; számításukhoz a mozgásegyenletek felírása után külön szabadtest-ábrákat kell rajzolni és fel kell írni a dinamika alaptételének megfelelő egyenleteit. A kényszererők számításához alkalmazható a 2.26. megjegyzésben ismertetett analitikus módszer is [8].
- A Lagrange-egyenlet használata kevésbé szemléletes, az egyenletek mögötti fizikai tartalom nehezebben ragadható meg, mint a dinamika alaptételének felírása során.

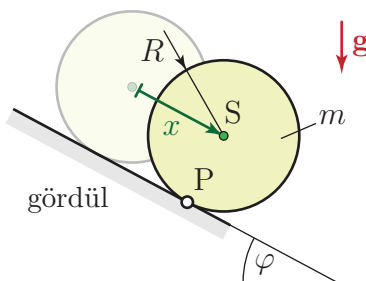
- A másodfajú Lagrange-egyenlettel kapott egyenletrendszer és a dinamika alaptétele alapján felírt egyenletrendszer egyenértékű, de nem feltétlenül egyezik meg. Összetett mechanikai rendszerek esetében még az is előfordulhat, hogy a Lagrange-eljárás kevesebb egyenletből álló, de numerikusan mégis nehezebben megoldható egyenletrendszert szolgáltat.

2.25. megjegyzés: Első pillantásra az is a Lagrange-egyenlet használata mellett szól, hogy a kinetikus energiát egyszerű alakban felírhatjuk egy merev test pillanatnyilag álló, nem nulla gyorsulású pontjára is, hiszen a dinamika alaptételét (a perdülettételt) a súlyponton kívül csak *tartósan álló*, nulla gyorsulású pontra célszerű felírni.

Azonban nem szabad elfelejteni, hogy a Lagrange-egyenletben a kinetikus energia \dot{q} szerinti deriváltjának idő szerinti deriváltja szerepel. Ha például $T = 1/2 \Theta_a \dot{\varphi}^2$, akkor a $\partial T / \partial \dot{\varphi} = \Theta_a \dot{\varphi}$ kifejezés idő szerinti deriváltja jelenik meg az egyenletben. Tehát ha a kinetikus energiát nulla sebességű, de nem nulla gyorsulású pontra írjuk fel, akkor a deriválás során figyelembe kell venni az adott pontra számított Θ_a tehetetlenségi nyomaték megváltozását is, ami általában bonyolult feladat [5]. Következésképpen ebben az esetben is az a célszerű ha súlyponti mennyiségeket használunk, vagy tartósan álló pontot választunk referenciapontnak. ♣

2.5.5. Példák a Lagrange-egyenlet alkalmazására

2.2. példa: Lejtőn legördülő korong. A 2.47. ábrán vázolt, R sugarú, m tömegű, tömör, homogén korong a vízszintessel φ szöget bezáró lejtőn gördül. A rendszer szabadsági foka $n = 1$. Határozzuk meg a súlypont a_S gyorsulását!



2.47. ábra. Lejtőn legördülő korong.

Válasszuk általános koordinátának a súlypont x koordinátáját; az x tengely a lejtővel párhuzamos. A korong mozgási energiája

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \omega^2.$$

A Lagrange-egyenlet alkalmazásának kulcsfontosságú lépése az energiakifejezések felírása az általános koordináták segítségével. A kinetikus energia első tagja már ki van fejezve \dot{x} -tal. A második tag átírásához a gördülés $\omega = \dot{x} / R$ feltételét használhatjuk fel. Mivel az S súlyponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték $\Theta_s = \frac{1}{2} m R^2$,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2.$$

A potenciális energia

$$U = -mgx \sin(\varphi).$$

A kényszererők ideálisak, nincs csillapítás vagy nem potenciálos erő, tehát $\mathcal{D} = 0$ és $Q^* = 0$. A kinetikus energia nem függ az x koordinátától, ezért

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (2.166)$$

A (2.149) másodfajú Lagrange-egyenlet nem nulla tagjai deriválással fejezhetők ki:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\ddot{x} \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -mg \sin(\varphi).$$

Behelyettesítve a

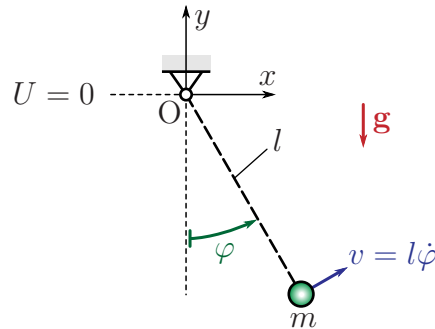
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.167)$$

Lagrange-egyenletbe:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} - mg \sin(\varphi) = 0,$$

amiből $\ddot{x} \equiv a_S = \frac{2}{3}g \sin(\varphi)$. ♠

2.3. példa: Matematikai inga. Írjuk fel egy nehézségi erőterben l hosszúságú kötéltre függesztett m tömegű anyagi pont (a 2.48. ábrán vázolt matematikai inga) – mozgásegyenletét és határozzuk meg a kötéltben ébredő kényszererő nagyságát is!



2.48. ábra. Matematikai inga

A 2.44. ábrának megfelelően az inga φ szögkitérését választjuk általános koordinátának. Mivel az anyagi pont sebessége $v = l\dot{\varphi}$, a mozgási energia

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2, \quad (2.168)$$

a potenciális energia pedig a (2.143) egyenlet alapján

$$U = -mgl \cos(\varphi). \quad (2.169)$$

A kényszer (állandó hosszúságú, nyújthatatlan köté) ideális, továbbá nincs sem csillapítás, sem nem potenciálos erő, ezért a Lagrange-egyenletet az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.170)$$

Az itt szereplő deriváltak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2 \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= mgl \sin(\varphi).\end{aligned}\tag{2.171}$$

Behelyettesítés után adódik az alábbi mozgásegyenlet:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0.\tag{2.172}$$

A fenti kifejezést egyszerűsítve az alábbi, sztenderd alakú egyenletre jutunk, amit a 2.2.1. fejezetben leírt módon vizsgálhatunk:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin(\varphi) = 0.\tag{2.173}$$

A kötélen ébredő kényszererőt a dinamika alaptétele alapján határozzuk meg. A 2.44 szabadtest-ábra alapján felírhatók a dinamika alaptételének egyenletei. A feladat megoldásához célszerű természetes koordináta-rendszert használni, a φ szög növekedésének irányában felvett tangenciális és a felfüggesztési pont felé mutató normális koordinátákkal:

$$ma_t = -mg \sin(\varphi),\tag{2.174}$$

$$ma_n = K - mg \cos(\varphi).\tag{2.175}$$

A kényszererő nem szerepel az első egyenletben, tehát azt fel sem kellett volna írni, de segítségével ellenőrizhetjük a Lagrange-egyenlettel kapott eredményt. Mivel $a_t = l\ddot{\varphi}$, azt kapjuk, hogy

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin(\varphi) = 0,\tag{2.176}$$

ami ekvivalens (de nem tökéletesen azonos) a Lagrange-egyenlettel kapott (2.172) egyenlettel.

A második egyenlet alapján meghatározható a kényszererő értéke: $a_n = l\dot{\varphi}^2$, ezért

$$ml\dot{\varphi}^2 = K - mg \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad K = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos(\varphi).\tag{2.177}$$



2.26. megjegyzés: A mozgásegyenlet Lagrange-egyenlettel történő felírása során nem kell külön foglalkoznunk a kötélen ébredő kényszererő hatásával, mert az általános koordináta megfelelő megválasztásával kiküszöböljük a kényszer által megkötött koordinátát, így arra nem kell egyenletet felírunk.

Ha valami miatt mégis szükségünk van a kényszererő meghatározására, akkor általában az előző példában bemutatott módszer – a dinamika alaptételének felírása – célravezető. Azonban úgy is célt érhetünk, ha képzeletben „felszabadítjuk” a megfelelő kényszerfeltételt és aktívvá tesszük a keresett kényszererőt.²⁸ Jelen esetben az a kényszer, hogy a kötél hossza

²⁸Az itt ismertetett eljárás hasonlít arra a szilárdságtan keretében alkalmazott módszerre, mellyel a Castigliano-tétel segítségével meg lehet határozni a statikailag határozatlan rendszerekben ébredő kényszererőket.

állandó. Ennek a kényszernek a felszabadítása azt jelenti, hogy elvileg lehetővé tesszük a kötéll hosszának változását is, azaz l -et egy második általános koordinátának tekintjük. Ugyanakkor felveszünk egy olyan – most már aktívnak tekinthető – erő komponenset, ami a kötéll hosszát az előírt értéken tartja. Mivel a kötéll hossza ismert, a felírható Lagrange-egyenletekből meghatározható a kényszererő értéke.

Ezzel a módszerrel akár tetszőlegesen előírt módon változó kötéllhossz (időtől függő kényszerfeltétel) esetében is meghatározható a kényszererő. Ez hasznos lehet például daruk motorjának méretezése során, ahol a teher felemelése és leengedése a kötéllhossz változtatásával történik meg. Azonban ebben az esetben módosítanunk kell a mozgási energia kifejezését:

$$T(\dot{\varphi}, l, \dot{l}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{l}^2. \quad (2.178)$$

A potenciális energia korábban felírt (2.169) kifejezését nem befolyásolja a kötéll hosszának esetleges időfüggése, ezért azt változó kötéllhossz esetén sem kell módosítani.

Mivel két általános koordinátával jellemezzük a lengőrendszert, két darab skaláregyenletet írhatunk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\dot{\varphi}, l, \dot{l})}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T(\dot{\varphi}, l, \dot{l})}{\partial \varphi} + \frac{\partial U(\varphi, l)}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.179)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T(\dot{\varphi}, l, \dot{l})}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial T(\dot{\varphi}, l, \dot{l})}{\partial l} + \frac{\partial U(\varphi, l)}{\partial l} = Q_2^*. \quad (2.180)$$

Itt Q_2^* a keresett kényszererő. A deriválások elvégzése után az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0, \quad (2.181)$$

$$m\ddot{l} - ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos(\varphi) = Q_2^*. \quad (2.182)$$

Ezekbe az egyenletekbe be kell helyettesíteni a kényszerfeltételt, ami most $l = \text{állandó}$. Az első egyenlet alapján kiszámítható a $\varphi(t)$ mozgástörvény, ugyanúgy, mint a 2.3. példában. A második egyenletből pedig megkapjuk a kényszererő kifejezését:

$$Q_2^* = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos(\varphi). \quad (2.183)$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy az erő iránya l csökkenése irányában hat a tömegpontra, azaz a felfüggesztési pont felé – ugyanúgy, ahogy a dinamika alaptétele alapján meghatározott (2.177) képlet szerint. ♣

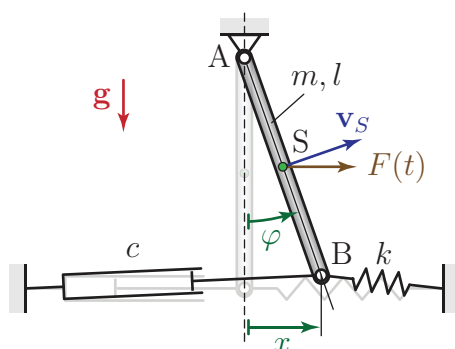
2.4. példa: Erőgerjesztett fizikai inga, $q \equiv \varphi$. A 2.49. ábrán látható, l hosszúságú és m tömegű homogén rúdból, valamint k merevségű rugóból és c csillapítási tényezőjű lengéscsillapítóból álló lengőrendszer a függőleges síkban végezhet lengéseket. A rúd súlypontjában $F(t)$ időben változó nagyságú, vízszintes irányú erő hat. A rendszer kis kitérésű lengéseket végez a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül. Írjuk fel a rendszer linearizált mozgásegyenletét a $q \equiv \varphi$ általános koordinátával!

A mozgási energia

$$T = \frac{1}{2}\Theta_a\omega^2 \equiv \frac{1}{2}\Theta_a\dot{\varphi}^2,$$

ahol $\Theta_a = \frac{1}{3}ml^2$ az A csuklópontra átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték. A potenciális energia kifejezése két tagból áll: a nehézségi erő potenciális energiája a matematikai inga példája alapján

$$U^{neh} = -mg\frac{l}{2} \cos(\varphi),$$



2.49. ábra. Csillapított, gerjesztett inga.

a rugóban felhalmozódó potenciális energiát pedig a 2.2.2. fejezetben leírtaknak megfelelően közelítjük:

$$U^{\text{rugó}} = \frac{1}{2}k(\Delta d)^2 \approx \frac{1}{2}k(l\varphi)^2.$$

A disszipatív potenciált a 2.3.5. fejezet alapján az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\mathcal{D} \approx \frac{1}{2}cv_B^2 \approx \frac{1}{2}c(l\dot{\varphi})^2,$$

ahol v_B a B pont sebességének nagysága. Az S súlypontban ható külső $F(t)$ erőhöz nem tudunk potenciálfüggvényt rendelni, ezért az általános erőhöz való hozzájárulását a teljesítményéből számíthatjuk:

$$P = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}_s = F(t) \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos(\varphi).$$

Az általános erő nem potenciális részét a $\dot{\varphi}$ együtthatója adja meg:

$$Q^* = F(t) \frac{l}{2} \cos(\varphi). \quad (2.184)$$

2.27. megjegyzés: Az általános erő csillapító erőből származó része is számítható a teljesítményből. $v_B \approx l\dot{\varphi}$ miatt

$$P_{\text{csill}} = -c l \dot{\varphi} \cdot l \dot{\varphi} = \underbrace{-cl^2 \dot{\varphi}^2}_{=Q_{\text{csill}}^*}.$$

Fontos, hogy nem a teljesítmény általános sebesség szerinti deriváltja, hanem az általános sebesség *együtthatója* adja meg az általános erőt. ♣

A másodfajú Lagrange-egyenlet alábbi alakját használjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q^*.$$

Az egyenletben szereplő deriváltak:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \Theta_a \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} &= kl^2 \dot{\varphi}, \\ \frac{\partial (U^{\text{rugó}} + U^{\text{neh}})}{\partial \varphi} &= kl^2 \varphi + mg \frac{l}{2} \sin(\varphi).\end{aligned}\quad (2.185)$$

Ezekben az egyenletekben a rugóerő és a csillapítóerő már linearizált alakkal van közelítve, míg az általános erő nem potenciális része (2.184) és a nehézségi erő nyomatéka (2.185) pontos, nemlineáris kifejezésekkel van megadva. Kis kitérések esetén ez utóbbi tagokat is linearizálhatjuk a $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet körül és $\cos(\varphi) \approx 1$, valamint $\sin(\varphi) \approx \varphi$ behelyettesítésével megkapjuk a linearizált mozgásegyenletet:

$$\Theta_a \ddot{\varphi} + cl^2 \dot{\varphi} + \left(kl^2 + mg \frac{l}{2} \right) \varphi = F(t) \frac{l}{2}. \quad (2.186)$$

2.28. megjegyzés: A potenciális energiát és a disszipatív potenciált közelítő alakkal adtuk meg, és ezután hajtottuk végre a megfelelő deriválásokat. Ez nem okozott problémát, mert ha másodfokig pontos az $U(\varphi)$ és $\mathcal{D}(\dot{\varphi})$ kifejezése, akkor deriválás után a lineáris tag is pontos lesz. Ehhez hasonlóan, a nehézségi erő potenciálja $U^{\text{neh}}(\varphi) = -mgl/2 \cos(\varphi)$ alakú, ami másodfokig sorba fejtvé $-mgl/2 \cos(\varphi) \approx -mgl/2(1 - \varphi^2/2)$. Ezt deriválva $\partial U/\partial \varphi \approx mgl/2 \varphi$, ami megegyezik a fenti egyenlet megfelelő tagjával. Tehát a linearizált mozgásegyenlet felírásához vagy a deriválás előtt kell másodfokú közelítéssel felírni a megfelelő kifejezéseket, vagy deriválás után kell elvégezni a linearizálást. ♣

2.5. példa: Erőgerjesztett fizikai inga, $q \equiv x$. Oldjuk meg ugyanezt a feladatot, az inga B végpontjának $x = l \sin(\varphi)$ koordinátáját választva általános koordinátának! Mivel kis kitérésű rezgéseket vizsgálunk, célunk egy linearizált mozgásegyenlet felírása. Ebből következik, hogy elegendő, ha az $x = l \sin(\varphi)$ összefüggésnek is csak az elsőfokú tagját vesszük figyelembe, tehát az $x \approx l\varphi$ közelítést használjuk, amiből $\dot{x} \approx l\dot{\varphi} = l\omega$. Ennek a közelítésnek a jogosságával kapcsolatban lásd még a 3.37. megjegyzést.

A mozgási energiát most \dot{x} segítségével kell felírunk. A tehetetlenségi nyomaték $\Theta_a = \frac{1}{3}ml^2$, a szögsebesség pedig $\omega = \dot{x}/l$, ezért

$$T = \frac{1}{2} \Theta_a \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} ml^2 \frac{\dot{x}^2}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m \dot{x}^2.$$

A nehézségi erő potenciális energiája $\varphi = \arcsin(x/l) \approx x/l$ figyelembevételével

$$U^{\text{neh}} = -mg \frac{l}{2} \cos(\varphi) = -mg \frac{l}{2} \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{l}\right)\right) \approx -mg \frac{l}{2} \cos\left(\frac{x}{l}\right),$$

ami másodfokig helyes (lásd 2.9. megjegyzés).

A rugóban felhalmozódó potenciális energiát ismét a 2.2.2. fejezetben leírtaknak megfelelően közelítjük – de ez a közelítés a 2.9. megjegyzés alapján még pontosabb is, mint amit a $q \equiv \varphi$ esetben alkalmaztunk:

$$U^{\text{rugó}} = \frac{1}{2} k (\Delta d)^2 \approx \frac{1}{2} k x^2,$$

ahol Δd a rugó deformációját jelöli. A disszipatív potenciál a 2.3.5. fejezet alapján

$$\mathcal{D} \approx \frac{1}{2}c\dot{x}^2,$$

az $F(t)$ erő teljesítménye pedig – mivel a súlypont sebessége $v_s \approx \dot{x}/2$,

$$P = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}_s \approx F(t)\frac{\dot{x}}{2}.$$

Tehát az általános erő nem potenciális része lineáris közelítésben

$$Q^* = \frac{F(t)}{2}.$$

A másodfajú Lagrange-egyenlet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q^*$$

kifejezésében szereplő deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{1}{3}m\ddot{x}, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} &= c\dot{x}, \quad \text{és} \\ \frac{\partial(U^{\text{rugó}} + U^{\text{neh}})}{\partial x} &= kx + mg\frac{l}{2} \sin\left(\frac{x}{l}\right) \frac{1}{l} \approx kx + mg\frac{x}{2l}. \end{aligned}$$

Tehát a linearizált mozgásegyenlet

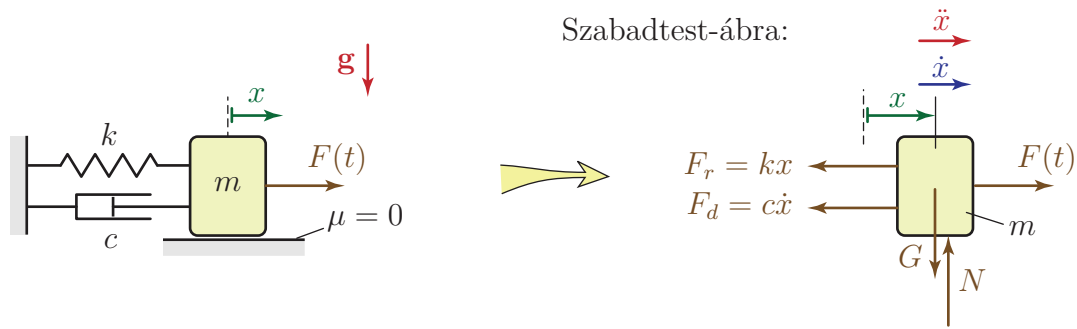
$$\frac{1}{3}m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(k + \frac{mg}{2l}\right)x = \frac{F(t)}{2}. \quad (2.187)$$

2.29. megjegyzés: A (2.186) és (2.187) egyenletek egyaránt

$$m_{\text{ált}}\ddot{q} + c_{\text{egy}}\dot{q} + k_{\text{egy}}q = Q(t) \quad (2.188)$$

alakra hozhatók, ahol \ddot{q} együtthatóját *általános tömegnek*, \dot{q} együtthatóját *egyenértékű csillapítási tényezőnek*, q együtthatóját pedig *egyenértékű rugómerevségnek* nevezik. Ha az általános koordináta elmozdulás jellegű, akkor ezek mértékegysége kg, Ns/m, illetve N/m, az általános erő mértékegysége pedig N.

Azonban ha szögelfordulás jellegű az általános koordináta, akkor az általános tömeg valamilyen pontra számított tehetetlenségi nyomatékként értelmezhető, ezért mértékegysége kg m², az általános csillapítási tényező és merevség mértékegysége Nms, illetve Nm, a nyomaték jellegű általános erő mértékegysége pedig Nm. ♣



2.50. ábra. A gerjesztett, egy szabadsági fokú lengőrendszerek alapmodellje.

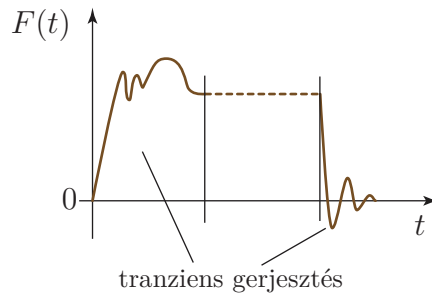
2.6. Gerjesztett lengőrendszerek

2.6.1. Gerjesztés típusok

A gépekre, szerkezetekre gyakran hat valamilyen gerjesztő hatás, ami befolyásolja vagy meg is határozza a létrejövő rezgéseket. A *gerjesztett lengőrendszerek* alapmodellje a 2.50. ábrán látható.

A gerjesztést egy $F(t)$ erővel vesszük figyelembe. Az $F(t)$ függvény jellege alapján az alábbi gerjesztéstípusokat különböztetjük meg:

1. *Tranziens*, azaz *átmeneti gerjesztés*. Egy tranziens gerjesztő jel a vizsgált időtartam hosszához képest rövid ideig tart. A tranziens egy állandósult alakú – ún. *stacionárius* – jel követi. Ilyen jelenséget tapasztalhatunk például egy gép be- és kikapcsolásakor (2.51. ábra).

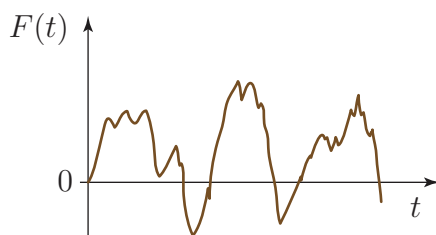


2.51. ábra. Példa tranziens gerjesztésre gép be- és kikapcsolásakor.

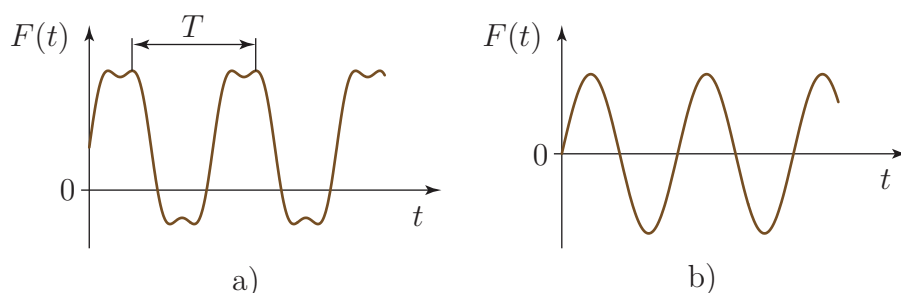
2. *Sztokasztikus*, azaz *véletlenszerű gerjesztésre* jó példa a közúti járművekre ható erőnek az útfelület egyenetlenségei miatti ingadozása (2.52. ábra).
3. Matematikailag legjobban a *periodikus gerjesztések* kezelhetők, ezen belül is a legfontosabbak a *harmonikus* (tiszta szinuszos vagy koszinuszos jellegű) gerjesztések (2.53. ábra).

A periodikus függvények elég általános feltételek mellett *Fourier-sorba* fejthetők [9], tehát trigonometrikus függvények összegeként fejezhetők ki. Ha a periódusidő T , akkor

$$F(t) = \frac{F_{c0}}{2} + F_{c1} \cos(\omega t) + F_{s1} \sin(\omega t) + F_{c2} \cos(2\omega t) + F_{s2} \sin(2\omega t) + \dots,$$



2.52. ábra. Egy sztochasztikus gerjesztő jel.



2.53. ábra. Periodikus (a) és harmonikus (b) gerjesztés.

ahol az ω (alap)körfrekvencia a periódusidőből számítható: $\omega = 2\pi/T$. Az alapkörfrekvencia többszöröseivel (2ω , 3ω , stb. körfrekvenciákkal) váltakozó összetevők a rezgés *felharmonikusai*. A Fourier-sorfejtés együtthatói az alábbi képletekkel számíthatók ki:

$$F_{cj} = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F_{sj} = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right) dt, \quad j = 1, 2, \dots$$

2.30. megjegyzés: A Fourier-sorfejtés egy általánosítása a *Fourier-transzformáció*, ami rendkívül hatékonyan alkalmazható mért jelek frekvenciakomponenseinek kimutatására. A 2.12. ábrán szereplő nem harmonikus jel Fourier-transzformáltját mutatja a 2.13. ábra, melyen jól láthatók a periódusidő reciprokával egyenlő alapkörfrekvencia többszöröseinél megjelenő felharmonikusok. ♣

Ha adott egy

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.189)$$

alakú lineáris differenciálegyenlet, ahol $F(t)$ periodikus függvény, akkor a közelítő megoldást $F(t)$ Fourier-sorba fejtésével határozhatjuk meg. Annyi differenciálegyenletet

kell ehhez felírni, ahány tagot figyelembe akarunk venni a Fourier-sorból:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{c0} + c\dot{x}_{c0} + kx_{c0} &= \frac{F_{c0}}{2} \\ m\ddot{x}_{c1} + c\dot{x}_{c1} + kx_{c1} &= F_{c1} \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_{s1} + c\dot{x}_{s1} + kx_{s1} &= F_{s1} \sin(\omega t) \\ m\ddot{x}_{c2} + c\dot{x}_{c2} + kx_{c2} &= F_{c2} \cos(2\omega t) \\ &\vdots \\ m\ddot{x}_{sn} + c\dot{x}_{sn} + kx_{sn} &= F_{sn} \sin(n\omega t). \end{aligned}$$

A szuperpozíció-elv miatt a gerjesztés egyes komponenseinek hatása összeadódik²⁹, azaz (2.189) közelítő megoldása

$$x(t) \approx x_{c0}(t) + x_{c1}(t) + x_{s1}(t) + x_{c2}(t) + \cdots + x_{sn}(t).$$

Ennek az összegnek kell megfelelnie a lengéshez tartozó kezdeti feltételeknek. Az összeg minden tagja egy-egy inhomogén differenciálegyenlet megoldása, tehát ezek is tovább bonthatók: mindegyikben megjelenik a homogén egyenlet $x_h(t)$ általános megoldása, és az egyes egyenletekre jellemző $x_{c0,p}$, $x_{s1,p}$, stb. alakú partikuláris megoldás. Mivel a homogén egyenlet megoldása mindegyik esetben azonos alakú, az $x_h(t)$ tagok összevonhatók, ezért

$$x(t) \approx x_h(t) + x_{c0,p} + x_{c1,p}(t) + x_{s1,p}(t) + x_{c2,p}(t) + \cdots + x_{sn,p}(t),$$

ahol $x_{c0,p}$ egy konstans előfeszítő erőnek megfelelő, állandó nagyságú kitérés.

2.31. megjegyzés: A Fourier-sor első, F_{c0} tagja egy időben állandó erőnek felel meg. Amint a 2.1.4 és 2.1.5. fejezetekben láttuk, az ehhez tartozó tag eltüntethető a mozgásegyenletből a koordináta megfelelő megválasztásával, és ekkor az $x_{c0,p}$ tag is eltűnik a megoldásból. Egyes gyakorlati esetekben F_{c0} sokkal nagyobb, mint a Fourier-sor többi tagja. Egy ilyen jel Fourier-transzformáltját ábrázolva nagy csúcsot láthatunk a nulla frekvenciánál, ami mellett néha nehezen kivehetők a rezgéshez (azaz nem nulla frekvenciákhoz) tartozó csúcsok. Ezen a problémán segíthet az alacsony frekvenciájú komponensek kiszűrése vagy – a legegyszerűbb esetben – a jel átlagértékének kivonása az eredeti jelből. ♣

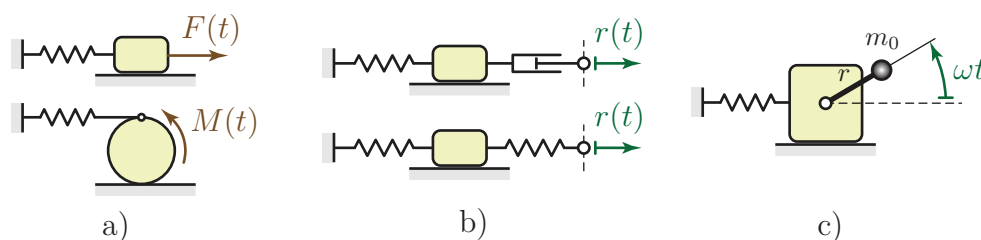
A fenti módszert alkalmazva tehát elegendő az általánosabb, periodikusan gerjesztett rendszert helyettesítő *harmonikusan gerjesztett* lengőrendszerek mozgásegyenletét vizsgálni.

A gerjesztés *forrása* szempontjából is több különböző gerjesztéstípust különböztetünk meg:

1. *Erőgerjesztésnek* illetve *nyomatékgerjesztésnek* nevezzük, amikor a vizsgált lengőrendszerre $F(t)$ vagy $M(t)$ függvénnyel megadott külső erő vagy nyomaték hat. Ez a két eset a mozgásegyenlet felírása szempontjából teljesen azonos módon kezelhető.

²⁹Ez csak lineáris mozgásegyenletek esetén igaz!

- Ha a lengőrendszerhez kapcsolódó rugalmas vagy csillapító elem egy pontjának az elmozdulása van megadva egy $r(t)$ függvénnyel, akkor *útgerjesztésről* beszélünk.
- A gerjesztésnek „belső” forrása is lehet: a *kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés*.
- Előfordulhat, hogy a lengőrendszer egy paramétere (például a merevsége) előre megadott módon változik. Ezt *paraméteres gerjesztésnek* nevezzük. Míg az eddig felsorolt esetekben ugyanolyan alakú a mozgásegyenlet, a paraméteres gerjesztés eredményeképpen azoktól eltérő, nehezebben vizsgálható mozgásegyenletet kapunk. Paraméteres gerjesztéssel csak röviden foglalkozunk a 2.6.6. fejezetben.³⁰



2.54. ábra. Erő- és nyomatékgerjesztés (a), útgerjesztés (b), kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés (c).

2.6.2. Harmonikus gerjesztés analitikus vizsgálata – erőgerjesztés

A 2.50. ábrán látható erőgerjesztett alapmodellben legyen $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$! Itt F_0 a *gerjesztés amplitúdója*, ω pedig a *gerjesztés körfrekvenciája*. A mozgásegyenlet könnyen felírható a szabadtest-ábra alapján vagy a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t). \quad (2.190)$$

2.32. megjegyzés: Ha erő- vagy nyomatékgerjesztés esetén alkalmazzuk a Lagrange-módszert, akkor a teljesítmény kifejezéséből számíthatjuk ki az egyenlet jobb oldalán megjelenő gerjesztést, a Q^* általános erőt.

A fent megadott alakúak a korábbi példában levezetett (2.186) és (2.187) mozgásegyenletek is, azok megoldása is az ebben a fejezetben leírt módon határozható meg. ♣

A korábban is követett eljárásnak megfelelően, az m tömeggel osztva kapjuk meg a mozgásegyenlet sztenderd alakját:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{=2\zeta\omega_n} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2} x &= \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{=f_0\omega_n^2} \cos(\omega t) \\ \Downarrow \\ \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x &= f_0\omega_n^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.191)$$

³⁰A paraméteres gerjesztést szokás multiplikatív gerjesztésnek is nevezni, szemben a differenciálegyenlet inhomogén részén keresztül megjelenő additív gerjesztéssel.

Az itt bevezetett

$$f_0 = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \equiv \frac{F_0}{k}$$

paramétert *statikus kitérésnek* (vagy *statikus deformációnak*) nevezzük, ugyanúgy, mint a 2.4.2. fejezetben. Ennyi lenne a hasáb elmozdulása, ha állandó F_0 nagyságú erő tartana egyensúlyt a rugóerővel.

Mivel inhomogén a fenti differenciálegyenlet, a megoldást

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

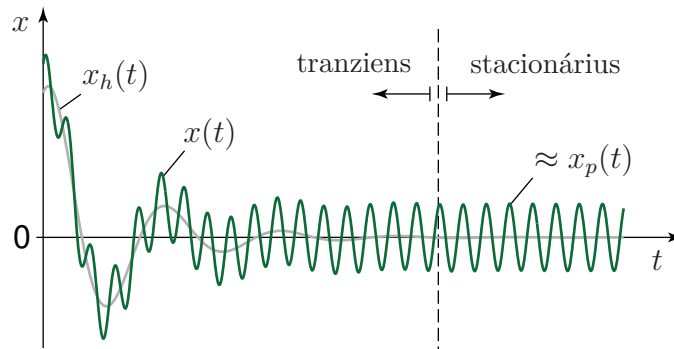
alakban kereshetjük. A homogén egyenlet $x_h(t)$ általános megoldását a gyakorlat számára legfontosabb, gyengén csillapított esetben a (2.71) egyenlet adja meg, azaz:

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)), \quad \text{ahol } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Csillapított rendszerekben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0,$$

tehát a homogén egyenlet megoldása exponenciális ütemben lecseng, és így csak a mozgás első szakaszában megfigyelhető tranzienst (átmeneti) rezgéseket befolyásolja (2.55 ábra).



2.55. ábra. Egy gerjesztett és csillapított lengőrendszer mozgástörvénye.

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t)$ miatt elég hosszú idő eltelte után – az ún. *stacionárius rezgés* során – a megoldás gyakorlatilag megegyezik a gerjesztéssel kapcsolatos $x_p(t)$ partikuláris megoldással, amit ezért *stacionárius (állandósult) megoldásnak* is neveznek.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását olyan függvény alakjában keressük, mint amilyen az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés. Tehát jelen esetben trigonometrikus függvényekből álló megoldást tételezünk fel:

$$x_p(t) = K \cos(\omega t) + L \sin(\omega t). \quad (2.192)$$

Később látni fogjuk, hogy a csillapításnak megfelelő, \dot{x} -ot tartalmazó tag miatt nem elég csak $x_p(t) = K \cos(\omega t)$ alakban keresni a megoldást; a gerjesztés és a megoldás (a „válasz”) ugyanis csillapított rendszer esetén nem lesznek azonos fázisban.

A partikuláris megoldás próbafüggvényét helyettesítsük be a (2.191) mozgásegyenletbe! Ehhez az alábbi deriváltakra van szükség:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= -K\omega \sin(\omega t) + L\omega \cos(\omega t) \quad \text{és} \\ \ddot{x}_p(t) &= -K\omega^2 \cos(\omega t) - L\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Behelyettesítés és rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(-K\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega L + \omega_n^2 K - f_0\omega_n^2\right) \cos(\omega t) + \left(-L\omega^2 - 2\zeta\omega_n\omega K + \omega_n^2 L\right) \sin(\omega t) = 0.$$

Mivel $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ lineárisan függetlenek (tehát nem egymás konstansszorosai), ez az egyenlet csak úgy teljesülhet minden t időpontban, ha a zárójeles kifejezések külön-külön egyenlőek nullával. Az így kapott két egyenletet kell megoldanunk a K és L ismeretlenek meghatározásához:

$$-K\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega L + \omega_n^2 K = f_0\omega_n^2, \quad (2.193)$$

$$-L\omega^2 - 2\zeta\omega_n\omega K + \omega_n^2 L = 0. \quad (2.194)$$

A számítás egyszerűsítése érdekében osszuk el az egyenletek mindkét oldalát ω_n^2 -tel és vesszük be a dimenziótlan

$$\lambda \equiv \frac{\omega}{\omega_n}$$

frekvenciahányadost (más néven *frekvenciaviszonyt* vagy *hangolást*), ami a gerjesztés körfrekvenciájának és a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciájának a hányadosa. Az osztás után a

$$\begin{aligned} -K\lambda^2 + 2\zeta\lambda L + K &= f_0, \\ -L\lambda^2 - 2\zeta\lambda K + L &= 0 \end{aligned}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerrel kapjuk, ami felírható az alábbi alakban is:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\zeta\lambda \\ -2\zeta\lambda & 1 - \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.195)$$

Nem rezonáns megoldás

Ha a (2.195) egyenletrendszer együtthatómátrixának nem nulla a determinánsa (nincs rezonancia), akkor az egyenletrendszer megoldható:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1 - \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2} f_0, \\ L &= \frac{2\zeta\lambda}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2} f_0. \end{aligned} \quad (2.196)$$

Ebből a megoldásból látszik, hogy $\zeta \neq 0$ mellett $L \neq 0$, ezért szükség van az $L \sin(\omega t)$ tagra a próbafüggvényben.

Már a csillapítatlan lengőrendszerek kapcsán láttuk (lásd (2.9) és (2.10)), hogy egy (2.192) alakú megoldás

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \vartheta) = \underbrace{A \cos(\vartheta)}_{=K} \cos(\omega t) + \underbrace{A \sin(\vartheta)}_{=L} \sin(\omega t) \quad (2.197)$$

alakban is felírható. Itt A a *stacionárius gerjesztett rezgés amplitúdója*, ϑ pedig a *fáziskésés* vagy *fázisszög*. A fáziskésés elnevezése is mutatja, hogy a kialakuló rezgés késik a gerjesztéshez képest, ezért is vettük fel negatív előjellel a megoldásban.

A (2.197) egyenletben szereplő paraméterek kifejezhetők az alábbi módon:

$$\left. \begin{aligned} A \cos(\vartheta) &= K \\ A \sin(\vartheta) &= L \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \sqrt{K^2 + L^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}}, \\ \tan(\vartheta) &= \frac{L}{K} = \frac{2\zeta\lambda}{1-\lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.198)$$

2.33. megjegyzés: Ha a gerjesztés $F_0 \sin(\omega t)$ alakú lenne, akkor a fenti levezetést értelem-szerűen módosítva

$$K^{\sin} = \frac{-2\zeta\lambda}{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2} f_0,$$

$$L^{\sin} = \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2} f_0$$

adódna. Szinuszos gerjesztés esetén a megoldást is szinuszfüggvénnyel célszerű kifejezni,

$$x_p^{\sin}(t) = K^{\sin} \cos(\omega t) + L^{\sin} \sin(\omega t) = A \sin(\omega t - \vartheta)$$

alakban, ekkor ugyanis az (2.198) egyenletben megadott amplitúdó- és fázisszög képletek változtatás nélkül használhatók. ♣

A gerjesztett rendszerek vizsgálatát megkönnyíti a dimenziótlan

$$N \equiv \frac{A}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} \quad (2.199)$$

nagyítás bevezetése. A nagyítás azt adja meg, hogy hányszor akkora a harmonikusan gerjesztett – ún. *dinamikus terhelés* alatt álló – rendszer maximális kitérése, mint ha csak *statikus terhelésnek* lenne kitéve, azaz állandó F_0 nagyságú erő hatna rá. A nagyítással tehát a dinamikus és a statikus terhelés hatását lehet összehasonlítani.

Vizsgáljuk meg az $N(\lambda)$ függvény 2.56. ábrán látható grafikonját, az ún. *rezonancia-görbét* vagy *nagyítási görbét*, különböző ζ paraméterek mellett! Az alábbi megállapításokra juthatunk:

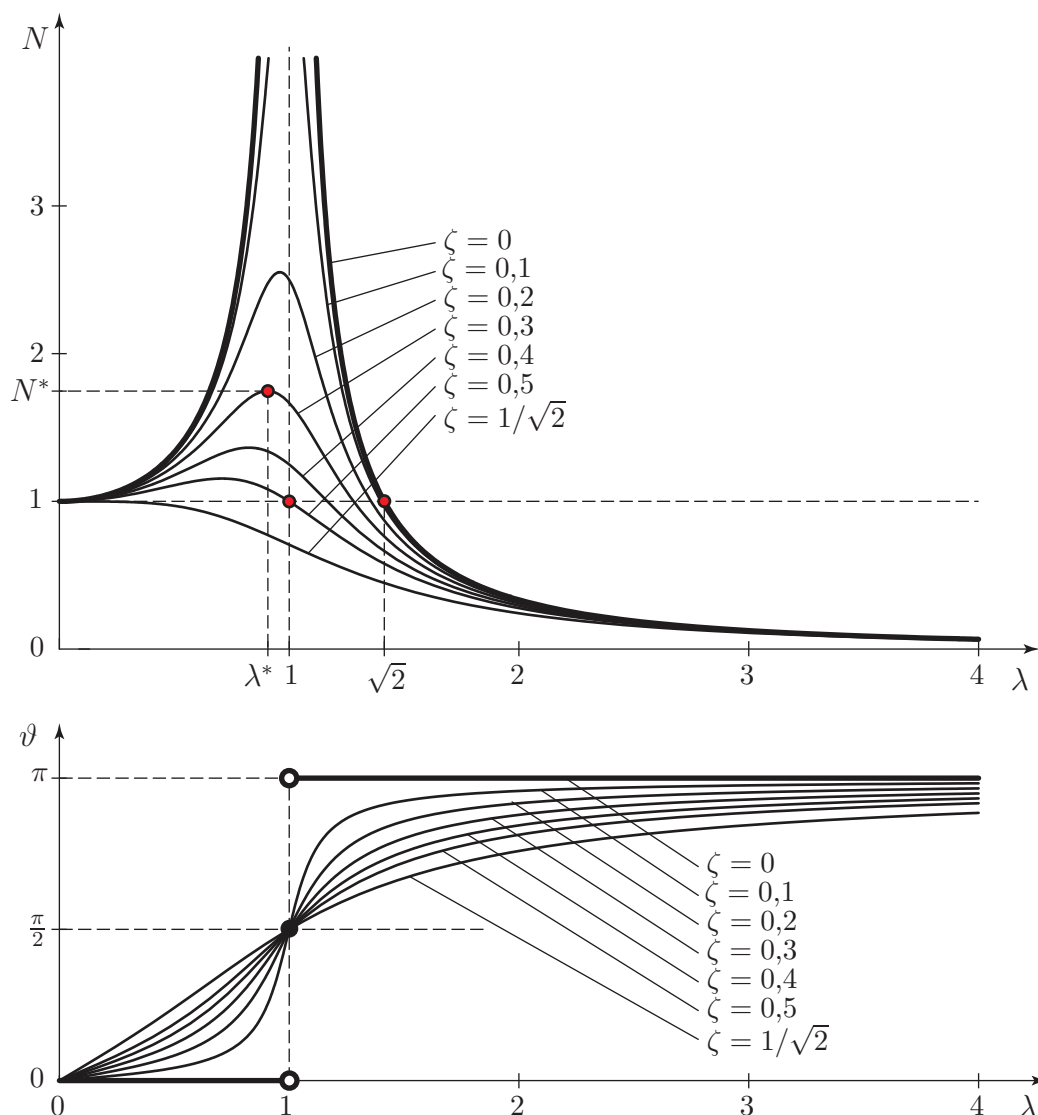
- Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy minden csillapítási tényező értéknél $N(\lambda = 0) = 1$. Ez annak felel meg, hogy nulla gerjesztési frekvenciánál állandó nagyságú a gerjesztő erő, ezért $A = f_0$ elmozdulás következik be, a statikus kitérés definíciójával összhangban.
- $\zeta = 0$ esetén $N(\lambda) = 1/|1 - \lambda^2|$, tehát $N(\sqrt{2}) = 1$ és $\lim_{\lambda \rightarrow 1} N(\lambda) = \infty$.³¹
- $\zeta = 0,5$ -nél $N(\lambda = 1) = 1$.
- Az N nagyítás frekvenciahányados szerinti deriváltja

$$\frac{dN}{d\lambda} = -\frac{2\lambda(2\zeta^2 + \lambda^2 - 1)}{((4\zeta^2 - 2)\lambda^2 + \lambda^4 + 1)^{3/2}}. \quad (2.200)$$

Ez alapján meghatározhatjuk a rezonanciagörbe λ^* *maximumhelyét* és N^* maximumát:

$$\left. \frac{dN}{d\lambda} \right|_{\lambda^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^* = \begin{cases} 0, \\ \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \end{cases}$$

³¹Látni fogjuk a következő fejezetben, hogy rezonanciában (amikor $\lambda = 1$) nem érvényes a nagyítási függvény fenti képlete. Az amplitúdó valóban minden határon túl nő, de ehhez időre van szükség, a (2.210) mozgástörvénynek megfelelően.



2.56. ábra. Rezonanciagörbe és fáziskésés diagram.

tehát $\lambda = 0$ és $\lambda = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ a rezonanciagörbe lehetséges szélsőérték helyei. A szélsőértékek $\lambda = 0$ -nál $N = 1$, míg $\lambda = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ -nál

$$N^* \equiv N(\lambda^*) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Kis csillapításnál a fenti kifejezés 1-nél nagyobb, ezért ez a maximális nagyítás, a maximumhely pedig

$$\lambda^* = \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (2.201)$$

A ζ relatív csillapítás növelésével a görbe maximumhelye eltolódik a kisebb λ frekvenciahányados értékek felé. $\zeta = 1/\sqrt{2}$ -nél $\sqrt{1 - 2\zeta^2} = 0$ lesz, és ennél nagyobb csillapítás mellett már monoton csökkenővé válik az $N(\lambda)$ függvény. Tehát $\zeta > 1/\sqrt{2}$ mellett a rezonanciagörbe maximumhelye és maximuma $\lambda^* = 0$ illetve $N^* = 1$.

- Míg egy erősen csillapított szabad rendszer nem végezhet lengéseket (lásd 2.3.4. fejezet), a gerjesztett rendszerekre $\zeta > 1$ mellett is érvényesek a fenti képletek, azaz elvileg

bármekkora relatív csillapítás mellett is kialakulnak rezgések – a gerjesztési frekvencia növelésével rohamosan csökkenő amplitúdóval.

- Az ω^* rezonancia körfrekvencia a maximális nagyításhoz tartozó gerjesztési körfrekvencia, ami $1/\sqrt{2}$ -nél kisebb relatív csillapítás mellett

$$\omega^* \equiv \omega_n \lambda^* = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (2.202)$$

Értéke kisebb mind a csillapított, mind a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciájánál:

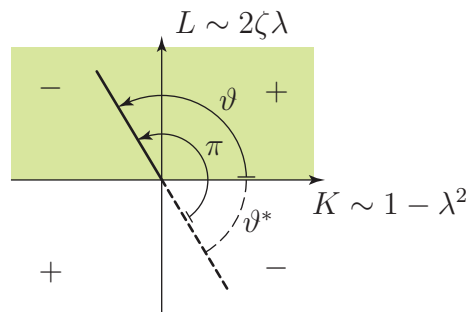
$$\omega^* < \omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} < \omega_n,$$

bár $\zeta < 0,1$ mellett ezek a frekvenciák jó közelítéssel egyenlőnek tekinthetők.

A fáziskésés vagy fázisszög (2.198) alapján a

$$\tan(\vartheta) = \frac{L}{K} = \frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2}$$

képlettel számítható ki. Mivel az $L = A \sin(\vartheta)$ számláló pozitív csillapítás mellett nem lehet negatív – ez a (2.196) képletből látszik –, $\sin(\vartheta) \geq 0$, ezért $\vartheta \in [0, \pi]$. Ha $\lambda < 1$, akkor $\vartheta \in [0, \pi/2]$, míg $\lambda > 1$ frekvenciahányadosnál $\vartheta \in [\pi/2, \pi]$ – ez utóbbi esetben a számológépek által kiszámolt negatív szöghöz π radiánt kell hozzáadni, a 2.57 ábrának megfelelően.



2.57. ábra. A fáziskésés számítása. $L \sim 2\zeta\lambda \geq 0$ miatt $\vartheta \in [0, \pi]$.

A fáziskésés $\vartheta(\lambda)$ grafikonja a 2.56. ábrán látható. Ha nincs csillapítás ($\zeta = 0$), akkor a $\lambda < 1$ tartományban $\vartheta = 0$, tehát a gerjesztés és a létrejövő rezgés fázisban vannak. Ugyanakkor $\lambda > 1$ -re $\vartheta = \pi$ adódik, azaz ebben az esetben ellentétes fázisban van a gerjesztés és a válasz. Ez könnyen szemléltethető egy kis csillapítású rugóra függesztett test rázásával: lassú rázás esetén azonos fázisban, gyors rázás esetén ellentétes fázisban mozog a test a kezünkkel.

Pozitív csillapítás mellett folytonos lesz a $\vartheta(\lambda)$ görbe. A csillapítástól függetlenül, $\lambda = 1$ -nél $\tan(\vartheta) = \infty$, azaz $\vartheta = \pi/2$ (lásd 2.27. ábra).

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda = 1$ frekvenciahányadosnál (tehát $\omega = \omega_n$ esetében) a partikuláris megoldás $x_p(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin(\omega t)$, a sebesség pedig $v_p(t) = A\omega \cos(\omega t)$. Ilyenkor az $F_0 \cos(\omega t)$ gerjesztő erő mindig azonos fázisban van a sebességgel, a sebesség

növelése irányában hat, tehát teljesítménye pozitív. Ez a tulajdonság felhasználható a csillapítatlan rendszer ω_n sajátkőrfrekvenciájának kísérleti meghatározására, viszkózus csillapítás jelenlétében is.

Ha nem csak az állandósult (partikuláris) megoldást akarjuk meghatározni, akkor figyelembe kell venni a homogén egyenlet megoldását is:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \vartheta) + e^{-\zeta \omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)). \quad (2.203)$$

A $C_{1,2}$ együtthatók értéke a kezdeti feltételek alapján számítható ki. A kezdeti kitérés $x(0) = x_0$, azaz

$$x(0) \equiv A \cos(-\vartheta) + C_1 = x_0, \quad (2.204)$$

amiből

$$C_1 = x_0 - A \cos(-\vartheta). \quad (2.205)$$

A kezdeti sebesség $\dot{x}(0) = v_0$. Ennek figyelembevételéhez szükség van a sebesség kifejezésére:

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \vartheta) - \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) \quad (2.206)$$

$$+ e^{-\zeta \omega_n t} (-C_1 \omega_d \sin(\omega_d t) + C_2 \omega_d \cos(\omega_d t)). \quad (2.207)$$

$t = 0$ -ban

$$\dot{x}(0) \equiv -A\omega \sin(-\vartheta) - \zeta \omega_n C_1 + C_2 \omega_d = v_0, \quad (2.208)$$

amiből

$$C_2 = \frac{v_0 - A\omega \sin(\vartheta) + \zeta \omega_n C_1}{\omega_d}. \quad (2.209)$$

Látható, hogy mindkét együttható függ a partikuláris megoldástól, hasonlóan, mint a 2.4.2. fejezetben vizsgált száraz súrlódású oszcillátor esetében.

2.34. megjegyzés: Numerikus módszerek alkalmazása során gyakran csak az állandósult rezgések meghatározása a feladat, ezért a számítási idő csökkentése miatt előnyös, ha minél rövidebb a tranzien rezgés. Különösen akkor van ennek jelentősége, ha hosszú számítási időre számíthatunk – például egy bonyolult alakú alkatrész végeelemes dinamikai vizsgálatakor.

Elvileg csökkenthető a tranzienek időtartama a homogén egyenlet megoldásában szereplő együtthatók megfelelő megválasztásával. Azonban ezek az együtthatók nemcsak a kezdeti kitéréstől és sebességtől, hanem a partikuláris egyenlet megoldásától – azaz a meghatározni kívánt állandósult állapotbeli rezgéstől – is függenek. Mivel ez általában előre nem ismert, a tranzien rezgések megjelenése rendszerint nem kerülhető el. ♣

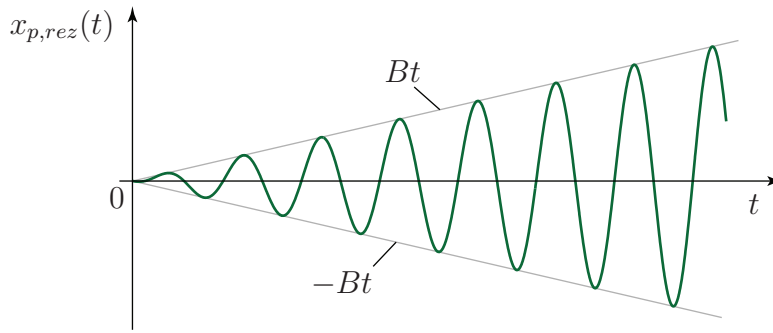
Rezonancia

A (2.195) egyenletrendszernek nincs megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nulla. Ez az ún. *matematikai értelemben vett rezonancia*:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda^2 & 2\zeta\lambda \\ -2\zeta\lambda & 1 - \lambda^2 \end{vmatrix} = (1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, \quad \zeta = 0.$$

Tehát matematikai értelemben akkor beszélünk rezonanciáról, ha a csillapítás nulla és a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik a csillapítatlan rendszer sajátkőrfrekvenciájával. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ebben az esetben nem (2.192) alakú a partikuláris megoldás, hanem

$$x_{p,rez}(t) = Bt \sin(\omega_n t). \quad (2.210)$$



2.58. ábra. A mozgástörvény megoldása matematikai rezonancia esetében.

Rezonanciában tehát az idővel egyenesen arányosan nő az egymás utáni maximális kitérések értéke, a 2.58. ábrának megfelelően.

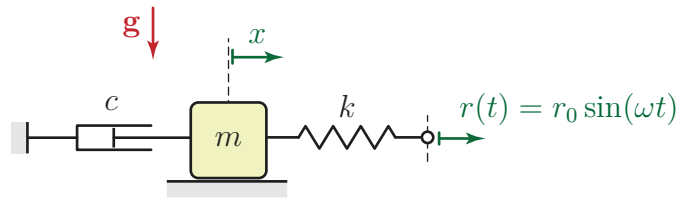
Gyakorlati szempontból akkor is túlságosan nagy lehet a kitérés, ha csak megközelítjük a matematikai értelemben vett rezonanciát – tehát kicsi, de nem nulla az együtthatómátrix determinánsa. *Mérnöki értelemben* akkor beszélünk rezonanciáról, ha

$$0,8 < \lambda < 1,3 \quad \text{és} \quad \zeta < 0,1. \quad (2.211)$$

2.6.3. Útgerjesztés

Gerjesztés rugón keresztül

Az *útgerjesztés* elnevezést gyakran leszűkített értelemben használják, arra az esetre, amikor rugón keresztül történik a lengőrendszer gerjesztése. Az ehhez az esethez tartozó alapmodell látható a 2.59. ábrán. Itt a rugó egyik végpontjának az elmozdulása van előírva az $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ függvénnyel.



2.59. ábra. Az útgerjesztés alapmodellje.

Az általános koordináta $q \equiv x$, tehát a másodfajú Lagrange-egyenlet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q^* \quad (2.212)$$

alakú. A kinetikus energiából és a disszipatív potenciálból származó tagok számítása a korábbi példák alapján egyszerűen megtehető:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (2.213)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = c \dot{x}. \quad (2.214)$$

A potenciális energia a rugó Δx deformációjával írható fel. Mivel a rugó egyik vége az előírt $r(t)$ függvény szerint mozog, a másik vége pedig a hasábal együtt, ezért $\Delta x = x - r(t)$, így

$$U \equiv \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k(x - r(t))^2.$$

A potenciális energiát deriválva előáll a rugóban ébredő erőt megadó kifejezés:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k(x - r(t)). \quad (2.215)$$

2.35. megjegyzés: Természetesen mindegy, hogy az $x - r(t)$ vagy az $r(t) - x$ kifejezést emeljük-e négyzetre a potenciális energia kifejezésében. Akkor is a fenti deriváltat kapnánk, ha az $U = 1/2 k (r(t) - x)^2$ kifejezést használnánk. Ez esetben ugyanis az $f(x) = r(t) - x$ jelölés bevezetésével $U = 1/2 k f^2(x)$, és az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} = kf(x) \cdot (-1) \equiv k(x - r(t)),$$

ahol kihasználtuk, hogy $\partial f/\partial x = -1$. ♣

Látható, hogy ebben az esetben a potenciális energia kifejezésének a deriválásával kaptunk egy gerjesztésnek megfelelő kifejezést. Mivel nincsenek nem potenciálos erők, ezért $Q^* = 0$. A (2.213), (2.214) és (2.215) kifejezéseket behelyettesítve a (2.212) Lagrange-egyenletbe, és csak az x -et vagy annak deriváltjait tartalmazó tagokat megtartva a bal oldalon, az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kr_0 \sin(\omega t).$$

Az egyenlet sztenderd alakja:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f_0\omega_n^2 \sin(\omega t),$$

ahol

$$f_0 = \frac{kr_0}{m\omega_n^2} = r_0. \quad (2.216)$$

A mozgásegyenlet stacionárius megoldása a gerjesztés szinuszos jellege miatt

$$x_p(t) = A \sin(\omega t - \vartheta),$$

a (2.198) egyenlettel megadott A és ϑ paraméterekkel.

A rugó méretezéséhez szükség lehet a *maximális rugóerő* meghatározására is. A (2.215) képlet alapján az időben változó rugóerő

$$F_r(t) = k(x(t) - r(t)). \quad (2.217)$$

Ha a stacionárius rezgést vizsgáljuk, akkor $x(t) = x_p(t)$ és $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ behelyettesítésével

$$\begin{aligned} F_r(t) &= kA \sin(\omega t - \vartheta) - kr_0 \sin(\omega t) \\ &\equiv k(A \cos(\vartheta) - r_0) \sin(\omega t) - kA \sin(\vartheta) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.218)$$

Jelöljük $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatóját F_s -sel illetve F_c -vel:

$$F_s = k(A \cos(\vartheta) - r_0) \quad \text{és} \\ F_c = -kA \sin(\vartheta).$$

A maximális rugóerő meghatározásához írjuk fel a rugóerő kifejezését

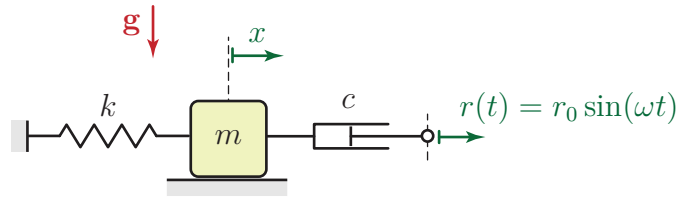
$$F_r(t) = F_{r\max} \sin(\omega t + \delta) \equiv \underbrace{F_{r\max} \cos(\delta)}_{=F_s} \sin(\omega t) + \underbrace{F_{r\max} \sin(\delta)}_{=F_c} \cos(\omega t) \quad (2.219)$$

alakban! (2.218) és (2.219) megfelelő együtthatóinak egyenlősége miatt a maximális rugóerő

$$F_{r\max} \equiv \sqrt{(F_{r\max} \cos(\delta))^2 + (F_{r\max} \sin(\delta))^2} = \sqrt{F_s^2 + F_c^2} = k\sqrt{A^2 - 2Ar_0 \cos(\vartheta) + r_0^2}.$$

Gerjesztés lengéscsillapítón keresztül

A gyakorlatban ritkábban használatos az az útgerjesztés modell, amelyben egy lengéscsillapító egyik végpontjának az elmozdulása adott $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ alakban (2.60. ábra). Az



2.60. ábra. Gerjesztés lengéscsillapítón keresztül.

általános koordináta most is $q \equiv x$. A mozgásegyenlet felírása során ismét a másodfajú Lagrange-egyenletet alkalmazzuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q^*. \quad (2.220)$$

A Lagrange-egyenletnek megfelelő deriváltak:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{és}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = kx.$$

A disszipatív potenciál kifejezésébe a lengéscsillapító két végpontjának sebességkülönbségét kell beírni. A lengéscsillapító előírt mozgású végpontjának sebessége $\dot{r}(t) = r_0 \omega \cos(\omega t)$, ezért

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c (\dot{x} - \dot{r}(t))^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = c (\dot{x} - \dot{r}(t)) \equiv c \dot{x} - c r_0 \omega \cos(\omega t).$$

A mozgásegyenlet a (2.220) Lagrange-egyenlet alapján

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = c r_0 \omega \cos(\omega t),$$

ezúttal tehát a disszipatív potenciál deriválása szolgáltatja az egyenletben a gerjesztés megfelelő kifejezését. Az egyenlet sztenderd alakja:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f_0\omega_n^2 \cos(\omega t),$$

ahol a $c = 2\zeta\omega_n m$ és $\lambda = \omega/\omega_n$ összefüggéseket felhasználva

$$f_0 = \frac{cr_0\omega}{m\omega_n^2} = 2\zeta\lambda r_0. \quad (2.221)$$

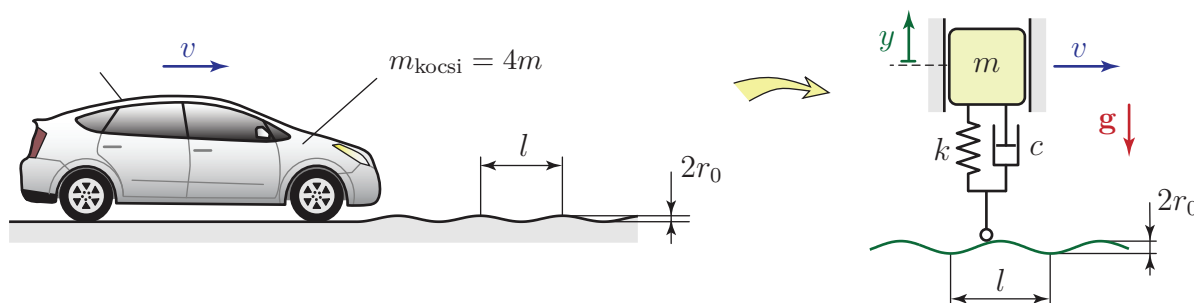
Most tehát a statikus kitérés is függ a gerjesztési frekvenciától, de természetesen továbbra is $x_p(t) = A \cos(\omega t - \vartheta)$ alakban adható meg az állandósult megoldás. (2.198) alapján

$$A = Nf_0 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} 2\zeta\lambda r_0. \quad (2.222)$$

Tervezés során hasznos lehet egy új nagyítási függvény bevezetése az r_0 együtthatójaként ($N' = 2\zeta\lambda N$), ami már az összes frekvenciafüggő tényezőt tartalmazza.

Gerjesztés rugón és lengéscsillapítón keresztül

Az előző két modell kombinációjaként kapjuk a gépkocsi legegyszerűbb egyszabadságfokú modelljét, a 2.61. ábrán látható ún. negyed járműmodellt. A gerjesztést az útegyenetlenség okozza, melynek alakját l periódusú (hullámhosszú) és r_0 amplitúdójú szinuszhullámmal közelítjük: $r(x) = r_0 \sin(2\pi x/l)$. Írjuk fel a rendszer mozgásegyenletét a $q \equiv y$ általános koordinátával!



2.61. ábra. Negyed járműmodell úttestről átadódó gerjesztéssel.

Ha a jármű v sebességgel halad, akkor $T = l/v$ idő alatt teszi meg a két szomszédos kiemelkedés közötti utat, tehát ez a gerjesztés periódusideje. Innen a gerjesztés körfrekvenciája $\omega = 2\pi/T = 2\pi v/l$ és $r(t) = r_0 \sin(\omega t) \equiv r_0 \sin(2\pi vt/l)$. Pontosan ilyen alakú gerjesztést vizsgáltunk az előző két útgerjesztés modellben is. A járműre hat a nehézségi erő is, amit ezekben a példákban nem vettünk figyelembe. Azonban a 2.1.4. fejezetben már láttuk, hogy ha a statikus egyensúlyi helyzettől mérjük az y koordinátát, akkor a statikus rugóerő és a nehézségi erő kiesik a mozgásegyenletből. Ehhez hasonlóan, a potenciális energia felírása során is figyelmen kívül hagyhatjuk a nehézségi erőnek illetve a statikus rugóerőnek megfelelő energiategokat, mert ezek kiejtik egymást. Egy hasonló számítást részletez a 3.1. példa is.

A Lagrange-egyenletet alkalmazva belátható, hogy a mozgásegyenlet jobb oldalán az előző két példában kapott gerjesztő tagok összege jelenik meg:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = kr_0 \sin(\omega t) + kr_0\omega \cos(\omega t).$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva az m tömeggel:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = f_1\omega_n^2 \sin(\omega t) + f_2\omega_n^2 \cos(\omega t),$$

ahol (2.216) és (2.221) alapján

$$f_1 = r_0, \quad \text{és} \quad f_2 = 2\zeta\lambda r_0.$$

Az egyenlet jobb oldalát átalakíthatjuk sztenderd alakba:

$$f_0\omega_n^2 \sin(\omega t + \delta) = f_1\omega_n^2 \sin(\omega t) + f_2\omega_n^2 \cos(\omega t).$$

Az f_0 statikus kitérés meghatározásához alkalmazzuk az addíciós tételt:

$$f_0 \sin(\omega t + \delta) = \underbrace{f_0 \cos(\delta)}_{=f_1} \sin(\omega t) + \underbrace{f_0 \sin(\delta)}_{=f_2} \cos(\omega t),$$

ahol $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatói az előző egyenlet alapján éppen f_1 illetve f_2 . Tehát $f_1 = f_0 \cos(\delta)$ és $f_2 = f_0 \sin(\delta)$, így

$$f_0 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = r_0 \sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2} \quad \text{és}$$

$$\tan(\delta) = \frac{f_2}{f_1} \equiv 2\zeta\lambda.$$

Most $f_1 = r_0 > 0$ és $f_2 = 2\zeta\lambda r_0 > 0$ miatt $\delta \in (0, \pi/2)$. Az állandósult rezgést az

$$x_p(t) = A \sin(\omega t + \delta - \vartheta)$$

függvény írja le, tehát a stacionárius rezgés továbbra is ϑ fázissal késik a gerjesztéshez képest, a δ fázisszög ezt nem befolyásolja. A gerjesztés és válasz közötti fáziskésés

$$\tan \vartheta = \frac{2\zeta\lambda}{1 - \lambda^2}$$

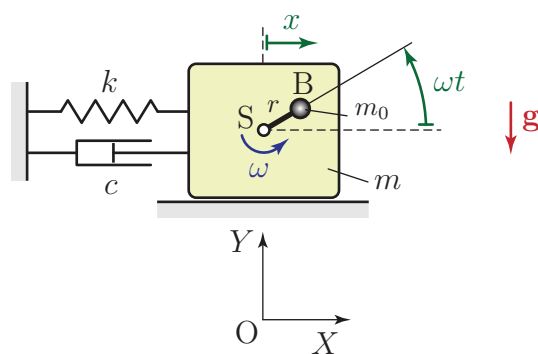
alapján számítható, az állandósult rezgés amplitúdója pedig

$$A = N f_0 = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}}{\underbrace{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}}_{=N''}} r_0, \quad (2.223)$$

a (2.198) képleteknek megfelelően. Mivel ebben az esetben az f_0 statikus kitérés frekvenciafüggő, tervezéshez célszerű az r_0 együtthatójának, az $N'' = \sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2} N$ alakban felírható nagyítási függvénynek a használata.

2.6.4. Kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés

A gépészmérnöki gyakorlatban nagy jelentősége van a *kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztésnek*, hiszen a gépek általában tartalmaznak valamilyen forgó alkatrészt. A megfelelő alapmodell a 2.62 ábrán látható. Itt a statikus kiegyensúlyozatlanságot egy m_0 tömegű, pontszerű testtel vesszük figyelembe, mely r excentricitással – egy r hosszúságú merev rúd



2.62. ábra. Kiegyensúlyozatlan forgórésszel gerjesztett lengőrendszer alapmodellje.

B jelű végére rögzítve, ω szögsebességgel mozog. $t = 0$ -ban a rúd vízszintes, a hasáb helyzetét az egyensúlyi helyzettől mért x általános koordináta jellemzi. Bár egy szabadsági fokú a rendszer, az energiakifejezések felírásához célszerű felvenni az (X, Y) koordináta-rendszert, ahol $X \equiv x$.

A rendszer mozgási energiája a két test energiájának az összege:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_0v_B^2.$$

Az m_0 tömegű test v_B sebességét legkönnyebben az \mathbf{r}_B helyvektor deriválásával számíthatjuk ki. Figyelembe véve, hogy az S súlypont Y koordinátája $y_S = \text{állandó}$,

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x + r \cos(\omega t) \\ y_S + r \sin(\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_B \equiv \dot{\mathbf{r}}_B = \begin{bmatrix} \dot{x} - r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Itt felismerhető a $\mathbf{v}_{sz} = [\dot{x} \ 0]^T$ szállító sebesség és a $\mathbf{v}_{rel} = [-r\omega \sin(\omega t) \ r\omega \cos(\omega t)]^T$ relatív sebesség kifejezése. Ezzel a kinetikus energia

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_0 \left(\dot{x}^2 + r^2\omega^2 \sin^2(\omega t) - 2\dot{x}r\omega \sin(\omega t) + r^2\omega^2 \cos^2(\omega t) \right) \\ &\equiv \frac{1}{2}(m + m_0)\dot{x}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m_0r^2\omega^2}_{= \text{konstans}} - m_0\dot{x}r\omega \sin(\omega t), \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m + m_0)\dot{x} - m_0r\omega \sin(\omega t), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m + m_0)\ddot{x} - m_0r\omega^2 \cos(\omega t), \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{2.224}$$

A potenciális energia és deriváltja:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + m_0g(y_S + r \sin(\omega t)) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = kx. \tag{2.225}$$

A nehézségi erővel kapcsolatos potenciális energia tag időben változik, mégsem befolyásolja a megfelelő általános erőt, hiszen nem függ az x koordinátától. A Rayleigh-féle disszipatív potenciál és a megfelelő általános erő tag

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}. \quad (2.226)$$

Mivel nincsenek nem potenciális erők vagy nem ideális kényszerek, $Q^* = 0$. Viszont a kinetikus energia (2.224) deriváltjában megjelenik egy gerjesztésnek megfelelő tag, amit a mozgásegyenlet jobb oldalára rendezünk. Így (2.225), valamint (2.226) figyelembevételével felírható a mozgásegyenlet:

$$(m + m_0)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0r\omega^2 \cos(\omega t). \quad (2.227)$$

A mozgásegyenlet $m_0r\omega^2 \rightarrow F_0$ és $(m + m_0) \rightarrow m$ helyettesítéssel visszavezethető az erőgerjesztett rendszerek (2.190) mozgásegyenletére.

2.36. megjegyzés: Erő- vagy nyomatékgerjesztés esetében a gerjesztő erő/nyomaték teljesítményéből számítottuk a gerjesztésnek megfelelő Q^* általános erőt. Az útgerjesztéses esetekben a potenciális energia és/vagy a disszipatív potenciál deriváltja tartalmazta a gerjesztésnek megfelelő tagot, amit az egyenlet jobb oldalára rendeztünk. A kiegyensúlyozatlan forgórész által okozott gerjesztésnek megfelelő tag pedig a fenti számítás szerint a kinetikus energiából származtatható.

A feladatban elő van írva az m_0 tömegű test mozgása az idő függvényében, ez tehát egy *időtől függő kényszer*. A kényszerfeltétel teljesülését a forgórészt meghajtó M nyomaték biztosítja, melynek teljesítménye $P = M\omega$. A hasábra ennek az M nyomatéknak a (-1)-szerese hat, de annak a teljesítménye zérus, hiszen a hasáb szögsebessége nulla. A (2.5.1) fejezetben leírtak szerint a Q általános erő kiszámítása során csak az erőket és nyomatékokat kell figyelembe venni, melyek *virtuális* teljesítménye nem nulla. Az időfüggő kényszerfeltételeket biztosító erők/nyomatékok esetében a virtuális teljesítményt az időfüggés kiiktatásával, a kényszer „leállításával” kell kiszámolni. Ebben az esetben a meghajtó nyomatéknak a forgórész megállításával számított teljesítménye adja meg a virtuális teljesítményt, ami így nulla. Ennek megfelelően ez az M nyomaték nem jelenik meg a mozgásegyenletben.

Hasonlóan jártunk el az útgerjesztés esetében is, a 2.6.3. fejezetben: a vizsgált feladatban egy ismeretlen F erőnek kell biztosítania a rugó végpontjának adott $r(t)$ függvény szerinti elmozdulását. Mivel ez egy időfüggő kényszer, az F erőnek a rugó képzeletbeli megállításával számított virtuális teljesítménye abban a feladatban is nulla. Mégis, mindkét esetben figyelembe tudtuk venni a gerjesztés hatását a másodfajú Lagrange-egyenlet más tagjai alapján. A kényszerfeltételek „befagyasztására” tehát azért van szükség, mert különben duplán is figyelembe vennénk a gerjesztést az egyenletben. ♣

A mozgásegyenlet sztenderd alakja

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \underbrace{\frac{m_0r\omega^2}{m + m_0}}_{=f_0\omega_n^2} \cos(\omega t).$$

A statikus kitérés ebben az esetben is függ a gerjesztés körfrekvenciájától, pontosabban a frekvenciahányadostól:

$$f_0 = \frac{m_0r}{m + m_0} \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \equiv \frac{m_0r}{m + m_0} \lambda^2. \quad (2.228)$$

Itt bevezethető az

$$r_0 = \frac{m_0 r}{m + m_0}$$

jelölés, amivel $f_0 = r_0 \lambda^2$. A gerjesztett lengőrendszer modell állandósult megoldása

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \vartheta),$$

ahol ϑ (2.198) alapján számítható, az amplitúdó pedig

$$A = N f_0 = \frac{\lambda^2}{\underbrace{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2}}_{=\tilde{N}}} r_0$$

alakban írható fel. Tehát itt is bevezethető egy új, $\tilde{N} = N \lambda^2$ nagyítási függvény, mely az összes frekvenciafüggő tagot tartalmazza, ezzel megkönnyítve a kiegyensúlyozatlan forgórészű gépek és a gépalapozások tervezését.

2.6.5. Rezgésszigetelés

A gépek rezgéseik során károsíthatják a környezetükben lévő épületeket és a kezelő személyzet egészségét, de befolyásolhatják egymás működését is. Például ha prés- vagy vésőgépet működtetünk forgácsoló gépek mellett, akkor jelentősen rosszabb minőségű lehet a megmunkált felület. Érzékeny műszerekkel végzett mérések pontosságát is csökkentheti a környezetről átadódó rezgések hatása. Ezek a problémák elkerülhetőek megfelelő *rezgésszigetelés* alkalmazásával.

A rezgésszigetelés céljától függően két esetet különböztetjük meg:

- *Aktív rezgésszigetelés* során a cél a környezet védelme a gép rezgéseitől.
- *Passzív rezgésszigetelésről* akkor beszélünk, ha a gépet (műszert) akarjuk megvédeni a környezet rezgéseitől.

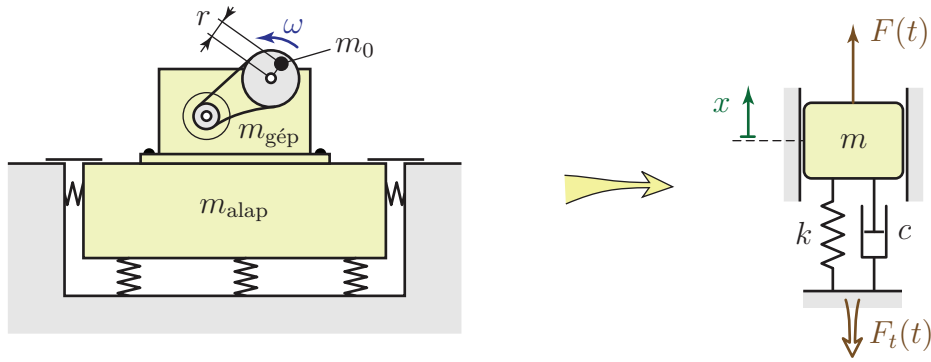
Aktív rezgésszigetelés

Az aktív rezgésszigetelés alapvető modellje a 2.63. ábrán látható. Célunk a talajra átadódó $F_t(t)$ erő dinamikus részének csökkentése az ω szögsebességgel forgó kiegyensúlyozatlan forgórész által gerjesztett állandósult rezgés során. A rendszer mozgásegyenletét (2.227) adja meg, ami visszavezethető egy $F(t) = F_0 \cos(\omega t) \equiv m_0 r \omega^2 \cos(\omega t)$ erőgerjesztésnek kitett lengőrendszer mozgásegyenletére.

Tudjuk, hogy a kialakuló stacionárius rezgés kitérése és sebessége az

$$x_p(t) = A \sin(\omega t - \vartheta) \quad \text{illetve} \quad \dot{x}_p(t) = A \omega \cos(\omega t - \vartheta)$$

függvényekkel írható le, ha az egyensúlyi helyzettől mérjük az x koordinátát. Ebben az esetben az $x = 0$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$ állapotban – egyensúlyban – a talajra átadódó erő a gép és gépalap együttes súlyával egyezik meg. Ez a statikus erő nem károsítja a gép környezetét, ezért csak a talajra átadódó erő dinamikus részének a csökkentésével foglalkozunk.



2.63. ábra. Az aktív rezgésszigetelés alapmodellje.

A dinamikus erő a kitérés és sebesség ismeretében, a rugóerő és a csillapítóerő eredőjéből számítható³²:

$$F_t(t) = kx_p(t) + c\dot{x}_p(t) = kA \sin(\omega t - \vartheta) + cA\omega \cos(\omega t - \vartheta).$$

Az addíciós tételek alapján ez a kifejezés átírható

$$\begin{aligned} F_t(t) &= kA \sin(\omega t) \cos(\vartheta) - kA \cos(\omega t) \sin(\vartheta) + c\omega A \cos(\omega t) \cos(\vartheta) + c\omega A \sin(\omega t) \sin(\vartheta) \equiv \\ &\equiv \underbrace{(kA \cos(\vartheta) + c\omega A \sin(\vartheta))}_{\equiv F_s} \sin(\omega t) + \underbrace{(c\omega A \cos(\vartheta) - kA \sin(\vartheta))}_{\equiv F_c} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.229)$$

alakba. A bejelölt F_s és F_c együtthatók az $x_p(t)$ megoldás ismeretében kiszámíthatók. Ha az $F_t(t)$ erő maximális értékét keressük, akkor érdemes felírni

$$F_t(t) = F_{\max} \sin(\omega t + \delta) \equiv F_{\max} \cos(\delta) \sin(\omega t) + F_{\max} \sin(\delta) \cos(\omega t) \quad (2.230)$$

alakban. A (2.229) és (2.230) egyenletekben $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatói megegyeznek, tehát

$$\left. \begin{aligned} F_s &= F_{\max} \cos(\delta) \\ F_c &= F_{\max} \sin(\delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_{\max} = \sqrt{F_s^2 + F_c^2}.$$

F_s és F_c kifejezéseit behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$F_{\max} = Ak \sqrt{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2},$$

amiből $c = 2\zeta\omega_n m$, $k = m\omega_n^2$, valamint $A = Nf_0$ felhasználásával

$$F_{\max} = Nf_0 k \sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}.$$

A megfelelően szigetelő gépalapozás tervezését megnehezíti, hogy kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés esetén a (2.228) egyenletnek megfelelően $A = Nf_0 = N\lambda^2 r_0$, tehát a statikus kitérés is függ a forgás szögsebességétől – azaz a gerjesztés körfrekvenciájától. Ebben az esetben a maximális erőnek az $F_0 = f_0 k = m_0 r \omega^2$ erőhöz viszonyított arányát szokták

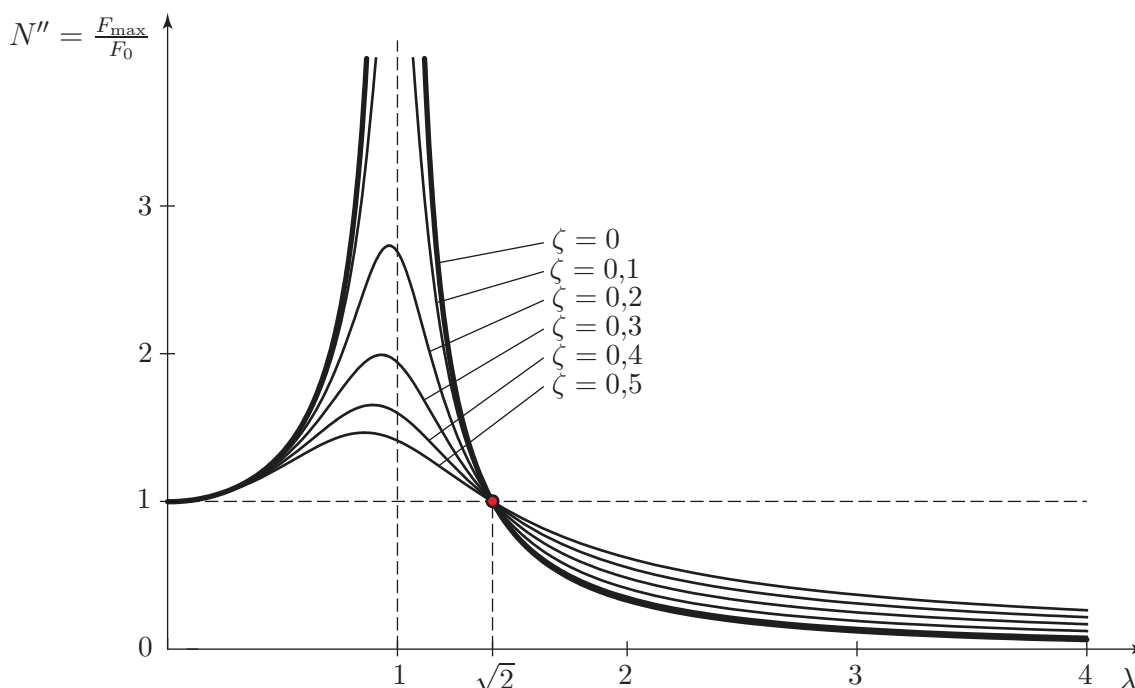
³²A rugót összenyomó teljes erő a fentiek alapján tartalmazza a test súlyát is, tehát $F_r = -kx_p(t) + mg$, de a rezgésszigetelés szempontjából elég csak a dinamikus rugóerővel foglalkozni.

használni a tervezéshez, ami a (2.223) egyenletben megadott N'' nagyítási függvénnyel azonos alakú:

$$N'' = \frac{F_{\max}}{F_0} = \frac{N f_0 k \sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}}{f_0 k} = N \sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}.$$

Az N'' függvény grafikonja a 2.64. ábrán látható. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $N''(\lambda = \sqrt{2}) = 1$, minden ζ csillapítási tényezőnél. $\lambda < \sqrt{2}$ frekvenciahányadosoknál a csillapítás csökkentése a talajra átadódó erő növekedésével, ennél nagyobb frekvenciahányadosoknál pedig az erő csökkenésével jár.

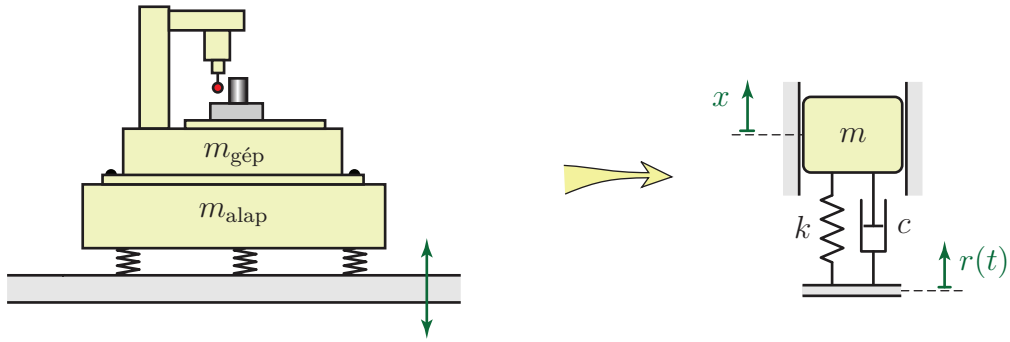
A talajra átadódó erő nagy frekvenciahányadosoknál jelentősen kisebb lehet az F_0 erőnél. Ebben a tartományban a λ frekvenciahányados növelésével és a csillapítás csökkentésével N'' csökken, tehát olyan alapozást érdemes készíteni, ami kis csillapítású és lágú. Mivel általában a gép fordulatszáma, tehát az ω gerjesztési körfrekvencia adott, $\lambda = \omega/\omega_n$ növeléséhez az $\omega_n = \sqrt{k/m}$ sajátkörfrekvenciát kell csökkenteni. Alacsony fordulatszámon működő gépek esetében előfordulhat, hogy a megfelelő sajátfrekvencia eléréséhez túlságosan lágú rugókra lenne szükség, amiknek a használata megengedhetetlenül nagy kitérésekhez vezetne. Ezekben az esetekben a 2.64. ábra szerint a $\lambda < 0,1$ frekvenciatartomány választása – nagyon merev rugók használata – jelenthet kompromisszumos megoldást.



2.64. ábra. Rezgésszigetelés tervezésére használható $N'' = N\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}$ függvény grafikonja.

Passzív rezgésszigetelés

Passzív rezgésszigetelés során a környezet rezgéseitől védeni kívánt műszer *kitérésének* a csökkentése szokott lenni az elsődleges szempont. A megfelelő alapmodell a 2.65. ábrán látható, ami pontosan megfelel a negyed járműmodell példájában vizsgált esetnek. Az ott

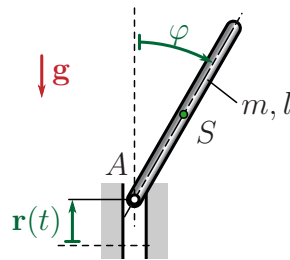


2.65. ábra. A passzív rezgésszigetelés alapmodellje.

kapott (2.223) egyenlet szerint a kitérés amplitúdójának csökkentéséhez most is a 2.64. ábrán ábrázolt $N'' = N\sqrt{1 + (2\zeta\lambda)^2}$ kifejezést kell csökkenteni. Tehát az aktív és a passzív rezgésszigetelés általában ugyanolyan feltételek mellett biztosítható: kis csillapítású, lágy gépalapozással.

2.6.6. Paraméteres gerjesztés

Az eddig tárgyalt gerjesztési típusok mellett megemlíthető még az ún. paraméteres gerjesztés is. Ebben az esetben a mozgásegyenletben nem egy különálló, időfüggő tag jelenik meg, hanem valamelyik tag *együtthatója* válik időfüggővé. Példaként írjuk fel a 2.66. ábrán illusztrált, felfelé fordított (inverz) fizikai inga mozgásegyenletét, melynek felfüggesztési pontja az $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ függvény szerint függőlegesen mozog! Az általános koordináta a függőlegetől mért φ szög.



2.66. ábra. Paraméteresen gerjesztett inverz inga.

A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2 \quad (2.231)$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{r}}_S$ a súlypont helyvektorának deriváltja. Az ábra alapján

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AS} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \sin(\varphi) \\ r(t) + \frac{l}{2} \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (2.232)$$

tehát

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \frac{l}{2}\dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ \dot{r}(t) - \frac{l}{2}\dot{\varphi} \sin(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.233)$$

Felhasználva, hogy $\dot{r}(t) = r_0\omega \cos(\omega t)$, a súlypont sebességének négyzete

$$v_S^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + r_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t) - r_0\omega \cos(\omega t)\dot{\varphi}l \sin(\varphi). \quad (2.234)$$

Tehát a mozgási energia kifejezése

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + r_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t) - r_0\omega \cos(\omega t)\dot{\varphi}l \sin(\varphi) \right) + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2. \quad (2.235)$$

A potenciális energia az alábbi alakban adható meg:

$$U = mg \left(r_0 \sin(\omega t) + \frac{l}{2} \cos(\varphi) \right). \quad (2.236)$$

A Lagrange-egyenlet felírásához szükséges deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= m\frac{l^2}{4}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}mr_0\omega l \sin(\varphi) \cos(\omega t) + \Theta_s\dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \left(m\frac{l^2}{4} + \Theta_s \right) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2}mr_0\omega l \cos(\varphi) \cos(\omega t) + \frac{1}{2}mr_0\omega^2 l \sin(\varphi) \sin(\omega t), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2}mr_0\omega l \cos(\varphi) \cos(\omega t), \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= -mg\frac{l}{2} \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (2.237)$$

A fenti kifejezéseket behelyettesítve a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.238)$$

Lagrange-egyenletbe, kihasználhatjuk, hogy az aláhúzott tagok megegyeznek, ezért kiesnek az egyenletből. Tehát a vizsgált lengőrendszer mozgásegyenlete

$$\left(m\frac{l^2}{4} + \Theta_s \right) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mr_0\omega^2 l \sin(\varphi) \sin(\omega t) - mg\frac{l}{2} \sin(\varphi) = 0. \quad (2.239)$$

Az egyenletet rendezve,

$$\left(m\frac{l^2}{4} + \Theta_s \right) \ddot{\varphi} + \sin(\varphi) \left(\frac{m}{2}l \left(r_0\omega^2 \sin(\omega t) - g \right) \right) = 0. \quad (2.240)$$

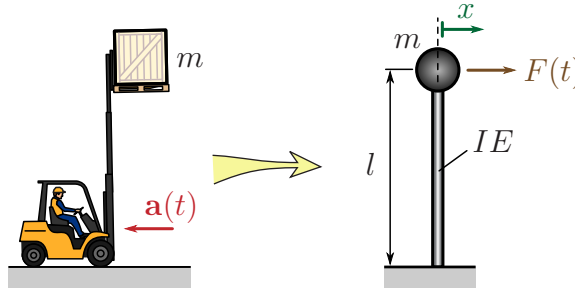
A $\sin(\varphi)$ együtthatója időben változik, tehát ez egy időben változó merevségű lengőrendszernek feleltethető meg. Megmutatható, hogy a paraméteres gerjesztés képes stabilizálni az inga felső egyensúlyi helyzetét.

Ha a felfüggesztési pont nem függőlegesen, hanem vízszintesen mozogna, akkor a $\sin(\omega t)$ -t tartalmazó tag együtthatója $\cos(\varphi)$ lenne, azaz kis φ szögek mellett $\cos(\varphi) \approx 1$ miatt visszakapnánk a korábban megismert gerjesztett lengőrendszer mozgásegyenletét.

2.6.7. Tranziens gerjesztés

A gerjesztés témakörének lezárásaként vizsgáljunk meg egy olyan lengőrendszert, melyre nem periodikus, hanem lineárisan növekvő gerjesztő erő hat. Amint látni fogjuk, ez a gerjesztés típus is lengésekhez vezet.

Tekintsünk egy egyik végén befogott, l hosszúságú, rugalmas, elhanyagolható tömegű rudat, melynek a másik végére m tömegű pontszerű test van rögzítve! A testre $F(t) = pt$ alakú, gerjesztő erő hat, a 2.67. ábrának megfelelően. Amint az 1.3.1. fejezetben megállapítottuk, a rugalmas rúd helyettesíthető egy $k = 3IE/l^3$ merevségű rugóval. A mozgásegyenlet tehát



2.67. ábra. Példa tranziens gerjesztésre: a targonca fékezésekor vagy indulásakor a gyorsulás tipikusan nem állandó, ezért a gyorsuló rendszerben egy időben változó $F(t)$ szállító erő megjelenését tapasztaljuk.

$$m\ddot{x} + kx = pt \quad (2.241)$$

alakú, azaz sztenderd alakban

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{p}{m}t. \quad (2.242)$$

A homogén egyenlet általános megoldása (2.9) szerint

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t), \quad (2.243)$$

ahol $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az egyenlet jobb oldalán található kifejezéshez hasonló, $x_p(t) = At$ alakban keressük, ezért $\ddot{x}_p(t) = 0$. Visszahelyettesítve a (2.242) egyenletbe,

$$\frac{k}{m}At = \frac{p}{m}t, \quad (2.244)$$

amiből $A = p/k$. A mozgásegyenlet megoldása így

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + \frac{p}{k}t. \quad (2.245)$$

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a $t = 0$ pillanatban nyugalomból, az egyensúlyi helyzetből indul a lengőrendszer, azaz $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 0$! A $C_{1,2}$ együtthatók kifejezéséhez szükségünk van a sebességet megadó függvényre is:

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = -C_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + C_2 \omega_n \cos(\omega_n t) + \frac{p}{k}. \quad (2.246)$$

A $t = 0$ értéket behelyettesítve

$$x(0) = C_1, \quad (2.247)$$

$$v(0) = C_2 + \frac{p}{k}. \quad (2.248)$$

Figyelembe véve az $x(0) = 0$ és $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételeket, $C_1 = 0$ és $C_2 = -\frac{p}{k}$, tehát a mozgástörvény

$$x(t) = \frac{p}{k}(t - \sin(\omega_n t)). \quad (2.249)$$

Az eredmény szerint az időben növekvő erő hatására periodikus rezgések alakulnak ki. A példa arra mutat rá, hogy a gerjesztésnek nem kell periodikusnak lennie ahhoz, hogy rezgéseket okozzon. Ehhez hasonló az a jelenség is, amikor gyorsító vagy fékező járművekben periodikus mozgásokat tapasztalunk – például egy gyorsító targonca emelőszerkezete lengeni kezd a felemelt teherrel.

3. fejezet

Több szabadsági fokú lengőrendszerek

Az egy szabadsági fokú lengőrendszerek kapcsán már megállapítottuk a 2.2 fejezetben, hogy a rezgések stabilis egyensúlyi helyzet körül alakulhatnak ki, ezért a nemlineáris egyenleteket az egyensúlyi helyzet körüli sorfejtéssel linearizálhatjuk. Azt is megmutattuk (2.1.4. fejezet), hogy a lineáris mozgásegyenletekből eltűnnek a konstans tagok, ha az egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátát.

Több (n) szabadsági fokú rendszerek esetében hasonlóan járhatunk el. A mozgásegyenleteket a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével határozzuk meg. Az n szabadsági foknak megfelelően felvesszünk n darab q_1, \dots, q_n koordinátát az egyensúlyi helyzettől mérve, és felírjuk az – általában nemlineáris –

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j^*, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

mozgásegyenleteket. Feltéve, hogy a rendszer kis kitérésű rezgéseket végez a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet körül – ahol $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_n]^T$ az *általános koordináták vektora* –, az egyenletek linearizálhatók, így analitikusan meg lehet határozni közelítő megoldásukat. Alapvetően kétféleképpen járhatunk el:

1. Felírjuk a (3.1) (nemlineáris) egyenleteket, és azokat linearizáljuk. Ez az eljárás mindig helyes eredményre vezet azokban az esetekben, amikor a másodfajú Lagrange-egyenlet alkalmazható – tehát pl. időfüggő geometriai kényszerek esetén is. Mivel a lineáris egyenletek mellett a nemlineáris egyenletek is rendelkezésre állnak, lehetőség van a lineáris közelítés pontosságának numerikus ellenőrzésére (lásd 3.3. fejezet).
2. Egy másik megközelítés is alkalmazható, ha csak a lineáris egyenletek meghatározása a cél. Az eljárás lényege az, hogy a T , U és \mathcal{D} mennyiségek olyan közelítő alakját használjuk, hogy azokat a (3.1) egyenletbe helyettesítve azonnal lineáris mozgásegyenleteket kapjunk

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*$$

alakban. Ez a módszer önmagában nem alkalmazható, ha időfüggő kényszerek is korlátozzák a rendszer mozgását, de időtől független esetben ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a Lagrange-egyenlet linearizálásával. A két módszer megkülönböztetése érdekében az így kapott lineáris mozgásegyenletet *mátrix együtthetős* mozgásegyenletnek nevezzük.

3.1. Mátrix együtthatós mozgásegyenlet

3.1.1. A kinetikus energia és az általános tömegmátrix

A 2.28. megjegyzésben már volt arról szó, hogy ha az energiakifejezéseket *másodfokig* sorba fejtjük a megfelelő változó szerint, akkor a Lagrange-egyenletben megadott deriválások elvégzése után lineáris közelítésben helyes mozgásegyenleteket kapunk. Több szabadsági fokú rendszerek esetében többváltozós Taylor-sorfejtést kell alkalmazni. Ha *nincsenek időfüggő kényszerek*, akkor a T kinetikus energia az általános sebességek másodfokú függvénye, tehát $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ és $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ körüli Taylor-sorában nincs konstans vagy a sebességben elsőfokú tag:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}_{=m_{ij}} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \dots \quad (3.2)$$

Itt $\dot{q}_i \dot{q}_j$ együtthatója az \mathbf{M} általános tömegmátrix i, j indexű eleme:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \quad (3.3)$$

Nem mindegy, hogy melyik pont körül végezzük a linearizálást: a fenti képletben szereplő $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ jelölés arra utal, hogy a kinetikus energia második deriváltját az egyensúlyi helyzetben kell venni.

3.37. megjegyzés: A kinetikus energia függhet a koordinátáktól is, tehát elvileg a koordináták szerint is kellene számolni a Taylor-sort – az egyensúlyi helyzetet ugyanis $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ és $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ együtt adja meg. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} q_i q_j + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.4)$$

és

$$\frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i q_j \quad (3.5)$$

alakú kifejezéseknek is meg kellene jelenni a fenti sorfejtésben.

Azért nem kell figyelembe vennünk ezeket a tagokat, mert ha a sebességekben másodfokú a kinetikus energia kifejezése, akkor a $\partial^2 T / (\partial q_i \partial q_j)$ kifejezés lineárisan fog függeni a sebességtől, tehát a $\mathbf{q} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetben kiértékelve nullát kapunk.

Ebben az esetben tehát a koordinátáktól való függés nem befolyásolja a linearizált mozgásegyenletet, mert a koordináták csak a mozgási energia sorfejtésének harmad- vagy magasabb fokú tagjaiban jelennek meg, pl. $x\dot{x}^2$ alakban. Ezt a Lagrange-egyenletbe helyettesítve másodfokú tagok jönnének ki – pedig éppen ezeket szeretnénk elhanyagolni.

A fentieknek megfelelően jártunk el a 2.5. példában az erőgerjesztett fizikai inga mozgásegyenletének felírásakor is. Ezt azért tehetjük meg, mert a szögsebesség kifejezéséhez felírható a $q \equiv x$ koordináta a szögkitéréssel $x = l \sin(\varphi)$ alakban, amiből $\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos(\varphi)$. A mozgási energia közelítő alakjának felírásakor $\varphi = 0$ közelében alkalmazható a $\cos(\varphi) \approx 1$ közelítés, így az $\dot{x} = l\dot{\varphi}$ összefüggés még elsőfokig, az $T \sim \dot{x}^2$ mozgási energia pedig másodfokig helyes, és már nem tartalmazza a koordinátát.

A koordináták szerinti sorfejtésből csak annyit veszünk figyelembe, hogy a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ helyen értékeljük ki a deriváltat, így mindenképpen konstans elemű lesz az általános tömegmátrix.

A 2.6.4. fejezetben a kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés példájában láttuk, hogy a kinetikus energia tartalmazhat az általános sebességben elsőfokú tagot is, lásd (2.6.4). Ebben az esetben az időfüggő kényszer miatt a kinetikus energia közelítő alakja nem (3.2) alakú, ezért külön kell kezelni a sebességben elsőfokú tagját. Erre az eljárásra a 3.4.4. fejezetben mutatunk példát. A 3.4.5 és 3.6. fejezetekben pedig olyan eseteket mutatunk be, amikor az időfüggő kényszer nem vezet időfüggő gerjesztő tag megjelenéséhez. A 3.45. megjegyzésben azt is levezetjük, hogy a forgó vonatkoztatási rendszerekben megjelenő ún. *giroszkópikus mátrix* éppen a (3.4) tagok felhasználásával számítható ki. ♣

Mivel a *Young-tétel* miatt a deriválások sorrendje felcserélhető, ezért az *általános tömegmátrix szimmetrikus, sajátértékei valósak*.¹ A tömeg csak pozitív lehet, amiből következik, hogy a kinetikus energia egy *pozitív definit kvadratikus alak*: csak zérus sebességnél nulla az értéke, egyébként pozitív. Ennek megfelelően az *általános tömegmátrix pozitív definit* is, tehát sajátértékei pozitívak.

3.1.2. A potenciális energia és az általános merevségi mátrix

Az $U(\mathbf{q})$ potenciális energia a koordináták függvényében Taylor-sorba fejthető az egyensúlyi helyzet körül:

$$U(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = U(\mathbf{0}) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}}_{=k_{ij}} q_i q_j + \dots = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} + \dots \quad (3.6)$$

A fenti kifejezés konstans tagja a potenciális energia nulla szintjének megválasztásától függ, tehát megfelelő választással ez a tag eltüntethető. Az ún. *Dirichlet-tétel* szerint [4, 7] egy konzervatív rendszer egyensúlyi helyzetében a potenciális energiának szélső értéke van, ezért az összes parciális deriváltja nulla – egyensúlyban nulla az eredő erő minden komponense. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetben az elsőfokú tag is eltűnik, csak a másod- és magasabb fokú tagok maradnak meg. Egy konzervatív rendszer egyensúlyi helyzete akkor és csak akkor *stabil*, ha a potenciális energiának minimuma van. Ez pedig annak felel meg, hogy a második parciális deriváltjaiból alkotott mátrix pozitív definit.

A potenciális energia második deriváltjai a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetben a \mathbf{K} *általános merevségi mátrix* elemeit adják:

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \quad (3.7)$$

A Young-tétel miatt a *merevségi mátrix szimmetrikus* és stabilis egyensúlyi helyzetben a potenciális energia minimumának megfelelően *pozitív definit*.² Ha az egyensúlyi helyzet instabil, akkor nem jön létre rezgés, lásd a 2.2.1. fejezetet. Olyan eset is előfordulhat, amikor az egyensúlyi helyzet a stabilitás határán van. Ilyenkor a merevségi mátrix csak pozitív *szemidefinit* lesz, legalább egy darab nulla nagyságú sajátértékkel.

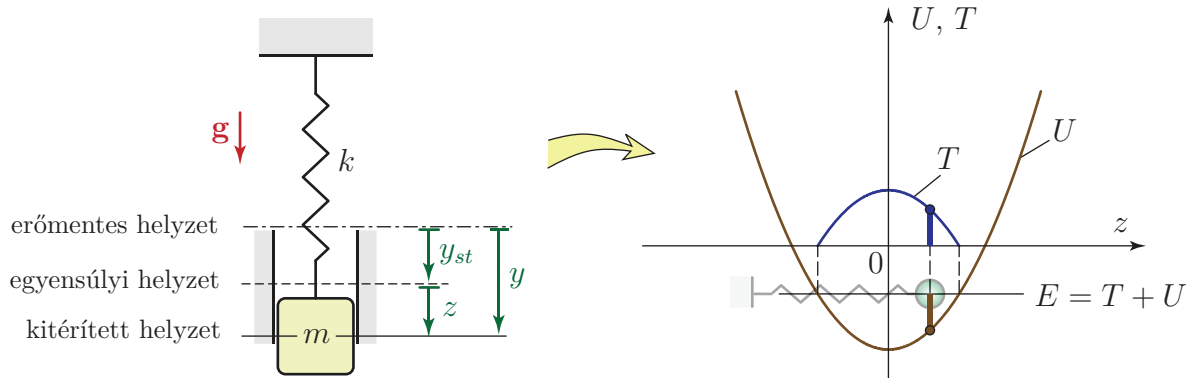
¹Nem ideális kényszerek (súrlódás) jelenlétében előfordulhat, hogy megjelennek a mozgásegyenletben bizonyos gyorsulásfüggő tagok, melyek hozzáadhatók a kinetikus energia deriválásával kapott tömegmátrix valamely elemeihez. Az így kapott együtthatómátrix már lehet aszimmetrikus.

²Súrlódás jelenlétében megjelenhetnek olyan tagok a mozgásegyenletben, melyeket hozzávéve a merevségi mátrixhoz, a kapott mátrix aszimmetrikus lesz.

Időfüggő kényszerek – pl. útgerjesztés (lásd 2.6.3. fejezet) – mellett a potenciális energia időtől függő tagjait is külön figyelembe kell venni. Ebben az esetben a (3.6) kifejezésből nem csak a koordinátákban másodfokú tagokat kell megtartani.

3.1. példa: A fentiek illusztrálására térjünk vissza a 2.1.4 fejezetben tárgyalt feladatra, a nehézségi erőterben k merevségű rugóra függesztett m tömegű test problémájára (2.8. és 3.1. ábra). Tegyük fel, hogy először a rugó erőmentes helyzete felett h magasságban vesszük fel a nehézségi erő potenciális energiájának nulla szintjét. Ekkor a rugó erőmentes helyzetétől lefelé mért y koordinátával

$$U = -mg(h + y) + \frac{1}{2}ky^2.$$



3.1. ábra. Rezgés a potenciálgödörben. A rezgő testre ható eredő erő az U potenciális energia gradiensevel, azaz z szerinti deriváltjával ellentétes irányban hat: az ábrán mutatott helyzetben pozitív z kitérés mellett negatív z irányú az erő.

$y = y_{st} + z$ miatt az egyensúlyi helyzettől felvett z koordinátával

$$U = -mg(h + y_{st} + z) + \frac{1}{2}k(y_{st}^2 + z^2 + 2y_{st}z) \equiv \underbrace{\frac{1}{2}ky_{st}^2 - mg(h + y_{st})}_{=konstans} + \underbrace{(ky_{st} - mg)}_{=0}z + \frac{1}{2}kz^2.$$

A $h = -y_{st}/2$ választással a konstans tag akár nullává is tehető, de ezt a gyakorlatban nem kell kiszámolnunk, hiszen a potenciális energia deriváltja kerül be a mozgásegyenletbe. Az egyszerűség kedvéért persze mindig feltehetjük, hogy a konstans tagot a nulla szint eltolásával eltüntettük. A nehézségi erő potenciális energiájának nulla szintjét ugyanis a rugóerő potenciális energiájának nulla szintjétől függetlenül határozhatjuk meg.

Lényegesebb, hogy az elsőfokú tag az egyensúly $ky_{st} = mg$ feltételéből következően nulla lesz. Tehát ha a nehézségi erő csak lineáris taggal járul hozzá a potenciális energia kifejezéséhez, akkor ez egy állandó nagyságú erőnek felel meg, ezért ez a tag kiejthető. Következésképpen elég csak a rugóban felhalmozott potenciális energiát figyelembe venni $U = 1/2 kz^2$ alakban, az egyensúlyi helyzettől felírt z koordinátával. ♠

3.38. megjegyzés: A potenciális energia grafikonjáról jól látszik (3.1. ábra), hogy ha egy adott $z_0 > 0$ helyzetből kezdősebesség nélkül indítjuk el a testet, akkor kezdetben a mozgási energia nulla és az $F = -\text{grad } U \equiv -\partial U/\partial z \equiv -kz$ erő negatív irányba – a potenciális energia csökkenésének irányába – hat. Ez az erő a rugóerő és a nehézségi erő eredője, hiszen

a z koordinátát a nehézségi erő figyelembevételével vettük fel úgy, hogy $z = 0$ legyen az egyensúlyi helyzetben. Mivel a példában csillapítatlan lengőrendszert vizsgáltunk, a rendszer $E = T + U$ teljes mechanikai energiája megmarad. Ezért a potenciális energia csökkenésével párhuzamosan nőni kezd a kinetikus energia, ami éppen a $z = 0$ egyensúlyi helyzeten történő áthaladásakor, az U potenciális energia minimumhelyénél veszi fel maximális értékét. A $z = 0$ helyzetben $\partial U/\partial z = 0$, ami a rugóerő és a nehézségi erő egyensúlyát fejezi ki.

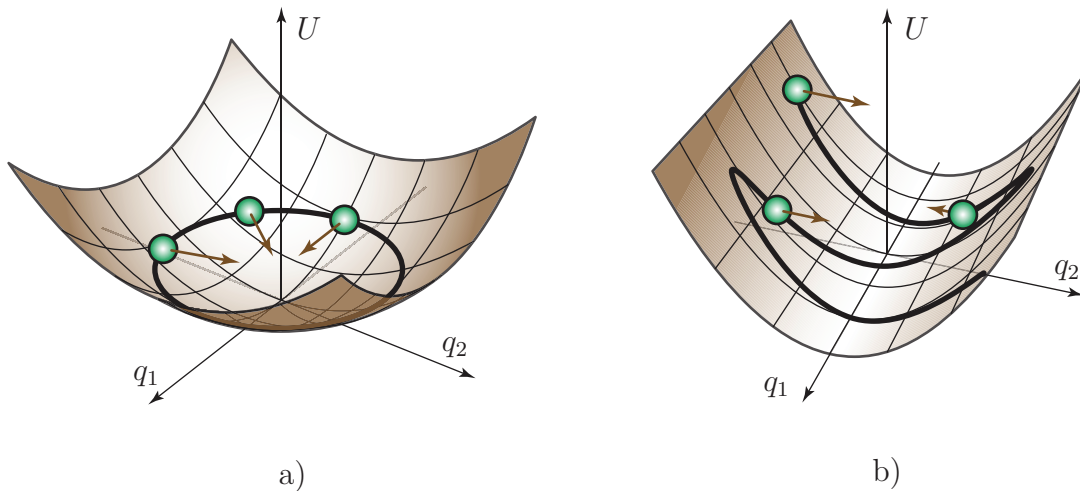
Az egyensúlyi helyzet stabilitásához szükséges, hogy $\partial^2 U/\partial z^2 = k$ pozitív legyen. Ez annak felel meg, hogy az egyensúlyi helyzetben minimuma van a potenciális energiának, tehát bármilyen irányba is próbálnánk kitéríteni a rendszert, nőne a potenciális energia. Mivel az erők a potenciális energia csökkenése irányában hatnak, visszatérítik a rendszert a stabil egyensúlyi helyzet felé.

Több szabadsági fokú rendszerek potenciális energiája már az általános koordináták többváltozós függvényeként írható fel. A stabil egyensúlyi helyzet ilyenkor is a „potenciálgödör alján”, az $U(\mathbf{q})$ függvény minimumhelyénél található (3.2./a ábra). A minimum feltételéből következik, hogy egyensúlyban a $\mathbf{Q} = -\text{grad } U \equiv -[\partial U/\partial q_1 \quad \partial U/\partial q_2 \quad \dots]^T$ általános erő nulla. Ha stabil az egyensúlyi helyzet, akkor bármilyen kis $\Delta \mathbf{q}$ vektorral kitérítve a rendszert az egyensúlyi helyzetből, a potenciális energia megnő. Ekkor a megfelelő potenciális erőnek olyan értelműnek kell lennie, hogy a rendszer újra közelebb kerüljön az egyensúlyhoz. Ezt a feltételt matematikailag az fejezi ki, hogy a

$$\left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \equiv - \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$$

derivált tenzor negatív definit, azaz a $\mathbf{K} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$ merevségi mátrix pozitív definit [4, 7].

Ha az egyensúlyi helyzet nem a potenciálfüggvény szigorú minimumhelye, akkor a stabilitás határán van a rendszer. Ilyenkor a merevségi mátrix egyik sajátértéke nulla, ami állandó sebességű (ún. merevtest-szerű) mozgásnak felel meg. Egy ilyen esetet tárgyal a 3.42. megjegyzés. A megfelelő potenciálfüggvényt a 3.2./b ábra szemlélteti.



3.2. ábra. A potenciálfüggvény szemléltetése. Az (a) esetben az origó stabil, a (b) esetben a stabilitás határán van. A berajzolt pályák egy anyagi pont potenciális energiájának változását mutatják egy lehetséges mozgás során. A nyilak az adott $[q_1 \quad q_2]^T$ helyzethez tartozó $\mathbf{Q} = -\text{grad } U(\mathbf{q})$ általános erő vektorral párhuzamosak.

3.1.3. A disszipatív potenciál és az általános csillapítási mátrix

A disszipatív potenciál – a kinetikus energiához hasonlóan – az általános sebességek másodfokú függvénye (ha nincs időfüggő kényszer, mint pl. útgerjesztés esetén), tehát a

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=0, \mathbf{q}=0} = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}_{=c_{ij}} \bigg|_{\mathbf{q}=0} \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \dots$$

sorfejtéssel bevezethető a \mathbf{C} általános csillapítási mátrix, melynek i, j -edik eleme

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \bigg|_{\mathbf{q}=0}.$$

3.39. megjegyzés: A csillapítás azzal jár, hogy a testek mechanikai energiája hővé, tehát a test és környezete molekulái által végzett rezgések energiájává alakul át. A statisztikus fizika szóhasználatával a sűrűdés, közegellenállás, csillapítás – azaz a *disszipáció* – következtében a rendszer teljes energiája ugyan megmarad, de a makroszkópikus mozgás mikroszkópikus mozgássá alakul át, az *entrópia* nő. Az ilyen folyamatok irreverzibilisek, azaz megfordíthatatlanok. Ez azzal hozható kapcsolatba, hogy a termikus rezgések tisztán mechanikai tárgyalásához az összes részecske mozgásegyenletét fel kellene írni, ami a gyakorlatban lehetetlen. Statisztikus fizikai módszerekkel viszont tárgyalható a disszipáció folyamata, és ennek kapcsán megmutatható, hogy – a sebességtől lineárisan függő disszipáció mellett – a csillapítási mátrix is szimmetrikus és pozitív definit [11]. ♣

3.1.4. A mátrix együtthetős differenciálegyenlet felírása

Ha hat olyan aktív erő (vagy nem ideális kényszererő) is, ami nem potenciálos, akkor az általános erő komponenseinek eddig figyelembe nem vett, a \mathbf{Q}^* vektorba rendezett részét az erők teljesítményéből számíthatjuk ki a (2.141) és (2.142) képletek alapján, figyelembe véve a 2.22. megjegyzést. Lehetséges, hogy – a 2.4. példához hasonlóan –, a teljesítmény alapján kiszámított általános erő komponensek a koordináták vagy a sebességek nemlineáris kifejezései. Ebben az esetben ezeket is linearizálni kell.

Helyettesítsük be az energiakifejezések

$$\begin{aligned} T &\approx \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \\ U &\approx \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad \text{és} \\ \mathcal{D} &\approx \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

közelítő alakjait a másodfajú Lagrange-egyenletbe! Így a nem potenciálos általános erő komponensek figyelembevételével az alábbi lineáris mozgásegyenletet kapjuk:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*. \quad (3.8)$$

Ez a *több szabadsági fokú rendszerek mátrix együtthetős differenciálegyenlete*. Ez az egyenlet már lineáris.³ Az egyenletben szereplő mátrixok és vektorok n szabadsági fokú rendszerek

³A $\partial T/\partial q_i$ tag időtől független kényszerek mellett másodfokú a sebességekben (lásd a 3.37. megjegyzést), tehát a linearizált egyenleteket nem befolyásolja.

esetén $n \times n$ illetve n méretűek, azaz

$$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{Q}^* \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n.$$

Ha van olyan gerjesztő hatás, amit pl. az időfüggő kényszerek miatt nem tudunk figyelembe venni, akkor a mozgásegyenletből hiányzó tagokat a másodfajú Lagrange-egyenlet megfelelő tagjainak felírásával lehet levezetni. Erre az eljárásra a 3.4.4 fejezetben mutatunk példákat.

3.2. Csillapítatlan szabad rezgés

3.2.1. Sajátkörfrekvenciák és lengésképek

Gerjesztetlen esetben a mozgásegyenlet homogén lesz, tehát

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Az egyenlet megoldása különböző frekvenciájú csillapodó rezgések kombinációjaként fejezhető ki, n szabadsági fok esetén $2n$ kezdeti feltétel alapján. Ennek a meglehetősen bonyolult alakú megoldásnak a pontos kiszámítása általában nem szükséges vagy gyakorlatilag nem is lehetséges: az esetek többségében a sok szabadsági fokú rendszerek kezdeti feltételeit nem ismerjük pontosan, és a rendszer paramétereinek – elsősorban a csillapításnak – a meghatározása is meglehetősen nehéz. Ha van csillapítás, akkor a megoldás hamar le is cseng.

A gyakorlatban inkább annak van jelentősége, hogy a *gerjesztett* rendszer hogyan viselkedik, hogyan „válaszol” különböző frekvenciájú gerjesztő hatásokra. Különösen nagy amplitúdójú rezgések alakulhatnak ki, ha a gerjesztés frekvenciakomponensei az ún. *rezonanciafrekvenciák* közelében vannak, ezért ez a szituáció – a mérnöki értelemben vett rezonancia – általában kerülendő. A rezonancia *kör*frekvenciák kis csillapítás mellett jó közelítéssel megegyeznek a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciáival, ahogy az 1 DoF esetben láttuk (2.202). Ez az oka annak, hogy nagy gyakorlati jelentősége van a csillapítatlan szabad rezgést leíró

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

egyenletnek. Keressük a fenti egyenlet megoldását

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}e^{i\omega_n t} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{A}e^{-i\omega_n t}$$

alakban! A fenti függvények második deriváltja

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\omega_n^2 \mathbf{A}e^{\pm i\omega_n t}$$

alakú, amit behelyettesítve a (3.10) mozgásegyenletbe, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\left(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \mathbf{A}e^{\pm i\omega_n t} = \mathbf{0}.$$

Az egy szabadsági fokú esethez hasonlóan (lásd a (2.4) egyenletet), az $e^{\pm i\omega_n t}$ kifejezés nem lehet nulla, csak $t \rightarrow (-\infty)$ -ben tart nullához. Tehát az exponenciális függvénnyel tudunk egyszerűsíteni:

$$\left(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer az \mathbf{A} lengéskép vektor elemeire. Az $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ triviális megoldás az egyensúlyban, nyugalomban lévő lengőrendszernek felelne meg. A rezgéseknek megfelelő nemtriviális megoldás létezésének feltétele, hogy

$$\det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0. \quad (3.12)$$

Ezt az egyenletet *frekvenciaegyenletnek* nevezzük, ebből határozhatjuk meg az ω_n paraméter lehetséges értékeit, a *csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciáit*. A determinánst kifejtve a frekvenciaegyenlet

$$(-1)^n \det \mathbf{M} \omega_n^{2n} + (-1)^{n-1} d_{n-1} (\omega_n^2)^{n-1} + (-1)^{n-2} d_{n-2} (\omega_n^2)^{n-2} + \dots + \det \mathbf{K} = 0 \quad (3.13)$$

alakú, tehát ω_n^2 -nek n -ed fokú polinomja, ahol n a szabadsági fok. Stabil egyensúlyi helyzet körüli rezgések esetében az \mathbf{M} és \mathbf{K} mátrixok pozitív definiték. Ekkor a frekvenciaegyenlet minden ω_n^2 gyöke pozitív, és az egyenletben szereplő d_i tényezők ($i = 0, \dots, n$; $d_0 = \det \mathbf{K}$, $d_n = \det \mathbf{M}$) is mind pozitívak, tehát a frekvenciaegyenlet együtthatóinak előjelei a $(-1)^i$ alakú szorzótényezők miatt váltakoznak (alternálnak). Ez a tulajdonság felhasználható az egyenlet ellenőrzésére.

3.40. megjegyzés: A frekvenciaegyenlet fent említett tulajdonságait a következő gondolatmenettel bizonyíthatjuk. A (3.11) egyenletet $\overline{\mathbf{A}}^T$ -vel (tehát az \mathbf{A} vektor komplex konjugáltjának a transzponáltjával) balról szorozva

$$\overline{\mathbf{A}}^T (-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

amiből

$$\omega_n^2 = \frac{\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{K} \mathbf{A}}{\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{M} \mathbf{A}}. \quad (3.15)$$

Ha \mathbf{K} és \mathbf{M} pozitív definiték és \mathbf{A} valós vektor, akkor ez a kifejezés pozitív, hiszen $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Ha komplex lenne az \mathbf{A} lengéskép vektor, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{A}_r + i\mathbf{A}_i$ alakban lehetne kifejezni, ahol \mathbf{A}_r és \mathbf{A}_i már valós vektorok. Ebben az esetben két-két pozitív definit alak összegeként fejezhető ki a számláló és a nevező, például

$$\overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{K} \mathbf{A} = \mathbf{A}_r^T \mathbf{K} \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_i^T \mathbf{K} \mathbf{A}_i, \quad (3.16)$$

♣

tehát ω_n^2 ekkor is pozitív [10].

Ezt felhasználva alkalmazható a frekvenciaegyenletre a Descartes-féle előjelszabály [2]: egy valós együtthatójú polinom pozitív gyökeinek száma egyenlő az együtthatók előjelváltásainak számával, vagy annál páros számmal kisebb. Az ω_n^2 -re nézve n -ed fokú frekvenciaegyenletnek $n + 1$ együtthatója van, tehát csak akkor lehet az összes gyöke pozitív, ha ezek az együtthatók váltakozó előjelűek. Ez azt jelenti, hogy az előjelek alternálása szükséges feltétele a gyökök pozitív voltának.

A $\det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$ frekvenciaegyenlet megoldásával ω_n^2 -re kapunk pozitív gyököket, amiből a sajátkörfrekvenciák – melyek természetesen szintén pozitívak:

$$\omega_{n1} \leq \omega_{n2} \leq \dots \leq \omega_{nn}.$$

Tehát a legkisebb sajátkörfrekvenciát jelöljük ω_{n1} -gyel.

3.41. megjegyzés: A frekvenciaegyenletből számítható sajátkörfrekvenciák és az egy szabadsági fokú esetben használt $\omega_n^2 = k/m$ sajátkörfrekvencia definíció közötti kapcsolat tisztázása érdekében írjuk át a (3.12) egyenletet a determinánsok szorzástétele alapján:

$$\det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \equiv \det(-\omega_n^2 \mathbf{E} + \mathbf{KM}^{-1}) \det \mathbf{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(-\omega_n^2 \mathbf{E} + \mathbf{KM}^{-1}) = 0,$$

ahol \mathbf{E} az egységmátrix. Tehát a frekvenciaegyenlet ω_n^2 -re adódó gyökei a \mathbf{KM}^{-1} mátrix sajátértékei. Ezt láttuk az egy szabadsági fokú esetben is, hiszen $\omega_n^2 = k/m$.

A sajátkörfrekvenciák meghatározásához n szabadsági fokú esetben egy ω_n^2 -ben n -ed fokú polinom gyökeit kell megkeresni, ami $n > 4$ -re csak kivételes esetekben oldható meg analitikusan. Tehát már viszonylag kis méretű lineáris mechanikai rendszerek vizsgálatához is numerikus módszereket kell alkalmazni. Sok gyakorlati esetben a merevségi mátrixban szereplő számoknál néhány nagyságrenddel kisebbre adódik a tömegmátrix elemeinek a számértéke. Mint a (3.13) egyenletből látszik, ez ahhoz vezet, hogy a determináns számítások miatt sok nagyságrendnyi különbség lesz a frekvenciaegyenlet együtthatói között. Ez a gyökkeresés feladatát rendkívül pontatlanná teheti, tehát ezt a szituációt lehetőleg el kell kerülni. Gyakran alkalmazott módszer, hogy az ω_n^2 változó helyett például az $(\omega_n/10)^2$ vagy $(\omega_n/100)^2$ változóra oldják meg a frekvenciaegyenletet, ugyanis így közel azonos nagyságrendűvé tehetők az együtthatók. Segíthet olyan mértékegység használata is, mellyel a mátrixok elemei hasonló nagyságrendűek lesznek. Körülbelül 20 szabadsági fok felett viszont már annyira nagy különbségek adódnak, hogy nem célszerű a determináns számítást alkalmazni. A nagy szabadsági fokú rendszerek sajátkörfrekvenciáinak számítására speciális gyökkereső módszereket használnak [18]. ♣

A mozgásegyenlet megoldásának következő lépése az \mathbf{A} *lengéskép vektorok* meghatározása. Ehhez vissza kell helyettesíteni a sajátkörfrekvenciákat a (3.11) egyenletbe:

$$(-\omega_{n_j}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{A}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Mivel az együtthatómátrix determinánsa nulla (a frekvenciaegyenlet szerint), az \mathbf{A}_j vektorra végtelen sok nem triviális megoldás található, melyek konstans szorzóban különböznek. A számítás egyértelművé tétele érdekében a lengéskép vektorok első elemét 1-nek szokták választani – hacsak nem nulla. Így már a többi elem egyértelműen számítható. Ha nulla az egyik lengéskép vektor első eleme, akkor azt 1-nek választva ellentmondásra jutunk az egyenletrendszer megoldása során. Ebben az esetben egy másik, feltehetően nem zérus elemet kell 1-nek választani.

3.2.2. A mozgás időbeli lefolyása és a lengésképek fizikai tartalma

Minden lengésképhez két lehetséges alapmegoldás tartozik, melyek az exponenciális függvény kitevőjének előjelében különböznek. Ennek a $2n$ darab alapmegoldásnak a lineáris kombinációjaként kapjuk a csillapítatlan szabad rendszer mozgásegyenletének általános megoldását:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n B_{1j} \mathbf{A}_j e^{i\omega_{n_j} t} + B_{2j} \mathbf{A}_j e^{-i\omega_{n_j} t}, \quad (3.17)$$

ahol a B_{1j} és B_{2j} együtthatók komplex számok. Valós értékű koordinátákat csak akkor kaphatunk, ha ezek egymás komplex konjugáltjai. Az összegben szereplő kifejezések átírhatók a (2.8) egyenletben bemutatott módon az alábbi trigonometrikus alakba:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n C_{1j} \mathbf{A}_j \cos(\omega_{n_j} t) + C_{2j} \mathbf{A}_j \sin(\omega_{n_j} t) \equiv \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{A}_j \sin(\omega_{n_j} t + \varepsilon_j). \quad (3.18)$$

Az itt szereplő C_{1j} , C_{2j} illetve C_j és ε_j konstansok a $2n$ kezdeti feltétel alapján határozhatók meg.

Ha azonos jellegűek az általános koordináták (mindegyik elmozdulás- vagy mindegyik szögkoordináta), akkor a lengéskép vektorok dimenziótlanok, és a C_j együtthatók mértékegysége adja meg a $\mathbf{q}(t)$ vektor mértékegységét. Viszont ha keverednek a koordináták, akkor a $\mathbf{q}(t)$ mozgástörvény vektor elemeinek, valamint az \mathbf{M} , \mathbf{C} és \mathbf{K} együtthatómátrixok elemeinek a mértékegységei különbözőek lesznek, ezért a lengéskép vektorok elemeinek is meg kell adni a mértékegységét.

Látszik a (3.18) általános megoldásból, hogy a kezdeti feltételek megfelelő megválasztásával elérhető, hogy $C_j = 0$, $j \neq k$ és $C_k \neq 0$ legyen. Ekkor a megoldásból csak

$$\mathbf{q}(t) = C_k \mathbf{A}_k \sin(\omega_{nk}t + \varepsilon_k)$$

marad, tehát egy ω_{nk} körfrekvenciájú lengés. Mivel az \mathbf{A}_k vektor mindegyik eleme be van szorozva $\sin(\omega_{nk}t + \varepsilon_k)$ -val, az *összes általános koordináta azonos körfrekvenciával, azonos fázisban változik*. Ebből már látszik, hogy mi a lengéskép vektorok fizikai tartalma: a k -adik lengéskép vektor az egyes koordináták lengési amplitúdóinak az *arányait* adja meg abban a speciális esetben, amikor csak az ω_{nk} sajátkörfrekvenciával történik a rezgés. Az általános megoldás n ilyen, különböző körfrekvenciájú és lengésképű rezgés kombinációja. Mivel a C_j együtthatók a kezdeti feltételektől függenek, azok megfelelő megválasztásával elvileg elérhető, hogy csak a kiválasztott lengésképnek megfelelő lengés alakuljon ki. Ennek a legegyszerűbb módja az, hogy a lengésképnek megfelelő kezdeti kitérésekkel, és nulla kezdeti sebességgel indítjuk a mozgást.

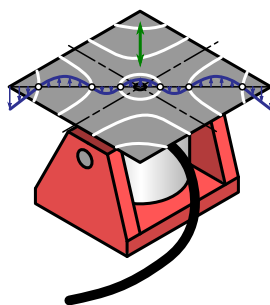
A következő fejezetben látni fogjuk, hogy a lengésképek segítségével jól szemléltethetők az egyes frekvenciákhoz tartozó rezgések. Ez alapján már a tervezési folyamat során ellenőrizni lehet, hogy a vizsgált szerkezet pontjai nem mozognak-e túlságosan nagy kitéréssel a jellemző gerjesztés hatására. Gépjárművek esetében fontos, hogy a motor tipikus fordulatszámainál (például alapjáraton) lehetőleg csak kis amplitúdójú rezgések alakuljanak ki az utastérben. A vizsgált szerkezet tömegeloszlását vagy geometriáját megváltoztatva elérhető a kívánt cél. Például a sebességváltó kar lengései csökkenthetők a váltó végén lévő gomb tömegének megfelelő megválasztásával.

A lengésképek alapján az is láthatóvá válik, ha a szerkezet egyes pontjai nem mozognak az adott sajátfrekvenciával történő lengés során. Az ilyen pontokat *csomópontnak* nevezzük; térbeli mozgás során a csomópontok *csomóvonalakba* rendeződnek. A csomóvonalak szabad szemmel is láthatóvá tehetők, ha egy lemezre finom szemcséjű port (mák, kristálycukor, stb.) szórunk, és valamelyik sajátkörfrekvenciával gerjesztjük a rendszert, a 3.3. ábrának megfelelően. A lemezre szórt anyag a csomóvonalak mentén koncentrálódik a rezgés során. Megjegyezzük, hogy a peremfeltételektől – például a vizsgált rezgő test rögzítésének módjától – is függ, hogy milyen sajátkörfrekvenciák és lengésképek alakulhatnak ki (lásd például a 3.42. példát és a 3.5. fejezetet). Ennek megfelelően eltorzulnak a csomóvonalak, ha megfogjuk a 3.3. ábrán vázolt rezgő lemez valamelyik pontját.

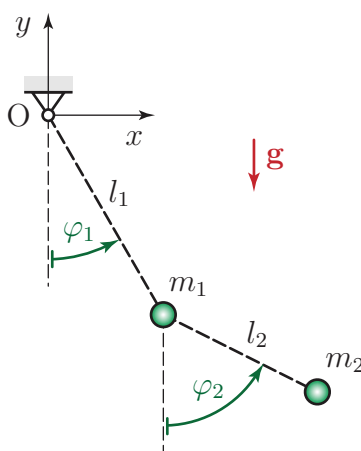
3.2.3. Példák a sajátkörfrekvenciák és lengésképek kiszámítására

3.2. példa: Matematikai kettősingának nevezzük a 3.4 ábrán látható, két nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű fonálból és két pontszerűnek tekinthető testből álló lengőrendszert.

Az egyszerűség kedvéért azt az esetet vizsgáljuk, amikor a két test tömege és a két fonál hossza megegyezik: $m \equiv m_1 = m_2$, $l \equiv l_1 = l_2$. Általános koordinátáknak a fonalak függőleges



3.3. ábra. A csomóvonalak szemléltetése elektromágneses gerjesztővel rázott lemeze szórt por segítségével.



3.4. ábra. Matematikai kettősinga.

helyzettől mért szögkitéréseit választjuk: $q_1 \equiv \varphi_1$ és $q_2 \equiv \varphi_2$, tehát az általános koordináták vektora

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Az egyes tömegpontok \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 sebességvektorai a helyvektoruk deriválásával számíthatók a legkönnyebben. Az ábra szerint felvett (x, y) koordináta-rendszerben

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} l \sin(\varphi_1) \\ -l \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) \\ l\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} l \sin(\varphi_1) + l \sin(\varphi_2) \\ -l \cos(\varphi_1) - l \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} l\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) + l\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) \\ l\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1) + l\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}.$$

A \mathbf{v}_2 sebességvektor kifejezésében a φ_1 -et tartalmazó tagok a szállító sebesség komponenseit, a φ_2 -t tartalmazó tagok pedig a relatív sebesség komponenseit adják. A sebességvektorok kifejezéseit behelyettesítve a kinetikus energia képletébe,

$$T = \frac{1}{2}m \left[2l^2\dot{\varphi}_1^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right].$$

A potenciális energia nulla szintjét vegyük fel az O csukló magasságában! Így a potenciális energia kifejezése

$$U = -2mgl \cos(\varphi_1) - mgl \cos(\varphi_2).$$

Nincsenek csillapító- vagy nem potenciálos erők, ezért $\mathcal{D} = 0$ és $\mathbf{Q}^* = \mathbf{0}$.

A következőkben felírjuk a matematikai kettősinga kis kitérések mellett érvényes mozgásegyenletét két módszerrel: 1) a másodfajú Lagrange-egyenlettel, 2) a mátrix együtthatós differenciálegyenlet segítségével. Ezután meghatározzuk a sajátkörfrekvenciákat és a lengéseképeket a paraméterek függvényében.

Mozgásegyenlet a másodfajú Lagrange-egyenlettel levezetve

Mivel két szabadsági fokú a rendszer, két

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

alakú másodfajú Lagrange-egyenletet kell felírunk. Számítsuk ki először a $\dot{\varphi}_1$ és a φ_1 szerinti deriváltakat:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2}m [4l^2\dot{\varphi}_1 + 2l^2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (3.19)$$

A teljes idő szerinti derivált számítása során figyelembe kell venni, hogy a szögkoordináták is függenek az időtől, tehát $d/dt \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -\sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{2}m [4l^2\ddot{\varphi}_1 + 2l^2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2l^2\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)]. \quad (3.20)$$

A kinetikus energia függ a koordinátáktól is, ezért

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2}m [2l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Végül a potenciális energia deriváltját kell kiszámítani:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 2mgl \sin(\varphi_1). \quad (3.21)$$

Hasonló eredményeket kapunk a φ_2 és $\dot{\varphi}_2$ szerinti deriválásokkal is:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{2}m [2l^2\dot{\varphi}_2 + 2l^2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \frac{1}{2}m [2l^2\ddot{\varphi}_2 + 2l^2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2l^2\dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)], \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2}m [-2l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = mgl \sin(\varphi_2). \quad (3.25)$$

A kapott kifejezéseket behelyettesítve a Lagrange-egyenletbe, a következő nemlineáris mozgásegyenleteket kapjuk:

$$2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - ml^2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 2mgl \sin(\varphi_1) = 0 \quad (3.26)$$

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + mgl \sin(\varphi_2) = 0 \quad (3.27)$$

Az egyenletek első sorában a (3.20) illetve (3.23) kifejezések szerepelnek. Látható, hogy a kinetikus energia koordináta szerinti deriváltjával (ezek az egyenletek második sorának elején vannak) ellenkező előjelű tagok jelentek meg az első sorok végén, ezért lehetőség van az egyenletek egyszerűsítésére.

Az egyenleteket a $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ helyzet körül linearizálva kapjuk a kis kitérésekre érvényes mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned} 2ml^2 \ddot{\varphi}_1 + ml^2 \ddot{\varphi}_2 + 2mgl \varphi_1 &= 0, \\ ml^2 \ddot{\varphi}_2 + ml^2 \ddot{\varphi}_1 + mgl \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A linearizálás során minden olyan tag kiesik, ami vagy az általános sebességek, vagy a koordináták elsónél magasabb fokú kifejezése. Például

$$\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 0,$$

hiszen harmadfokú ($\dot{\varphi}_2^2 \varphi_2$ alakú) a legalacsonyabb fokszerű tag a Taylor-sorában.

Mozgásegyenlet a mátrix együtthatós differenciálegyenlettel levezetve

A kinetikus energia általános sebességek szerinti, illetve a potenciális energia általános koordináták szerinti első deriváltjait a (3.19), (3.22) illetve a (3.21), (3.25) egyenletek adják meg. Ezért az általános tömegmátrix és az általános merevségi mátrix elemeinek meghatározásához már csak ezeket a kifejezéseket kell még egyszer deriválni.

A kinetikus energia kétszeres deriváltjait mátrix alakba rendezve és az egyensúlyi helyzet koordinátáit behelyettesítve kapjuk az általános tömegmátrixot:

$$\mathbf{M} = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2ml^2 & ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ ml^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & ml^2 \end{array} \right]_{\varphi_1=\varphi_2=0} = \left[\begin{array}{cc} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{array} \right].$$

A merevségi mátrix elemeit a potenciális energia deriválásából kapjuk meg:

$$\mathbf{K} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2mgl \cos(\varphi_1) & 0 \\ 0 & mgl \cos(\varphi_2) \end{array} \right]_{\varphi_1=\varphi_2=0} = \left[\begin{array}{cc} 2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{array} \right].$$

Ezzel a mátrixokkal felírható a mátrix együtthatós differenciálegyenlet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A szorzatok kifejtésével ellenőrizhető, hogy ezek az egyenletek megfelelnek a Lagrange-egyenlet alapján kiszámított (3.28) linearizált mozgásegyenleteknek.

Sajátkörfrekvenciák és lengésképek

A sajátkörfrekvenciák a frekvenciaegyenletből határozhatók meg:

$$\begin{aligned} \det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) &\equiv \begin{vmatrix} -2\omega_n^2 ml^2 + 2mgl & -\omega_n^2 ml^2 \\ -\omega_n^2 ml^2 & -\omega_n^2 ml^2 + mgl \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow m^2 l^4 \omega_n^4 - 4m^2 l^3 g \omega_n^2 + 2m^2 g^2 l^2 = 0. \end{aligned}$$

Látható, hogy az egyenlet együtthatóinak váltakozik az előjele, és ω_n^4 együtthatója $\det(\mathbf{M})$, a konstans tag pedig $\det(\mathbf{K})$. Az egyenlet gyökei m^2l^4 -nel való egyszerűsítés után könnyen kiszámíthatók:

$$\omega_n^4 - 4\frac{g}{l}\omega_n^2 + 2\frac{g^2}{l^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{n1,2}^2 = \frac{g}{l} (2 \pm \sqrt{2}).$$

Innen a sajátkörfrekvenciák

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \omega_{n2} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

ahol a szokásos jelölésnek megfelelően ω_{n1} a kisebb sajátkörfrekvencia.

A következő feladat a lengésképek meghatározása. $\omega_n = \omega_{n1}$ -et helyettesítve a (3.11) egyenletbe egy olyan homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek két egyenlete összefüggő. A frekvenciaegyenlet teljesülése ugyanis éppen azt jelenti, hogy a (3.11) egyenlet együtthatómátrixa szinguláris. Az egyenletek összefüggősége miatt a mátrix második sorát nem is érdemes kiírni:

$$\begin{bmatrix} -2\omega_{n1}^2 ml^2 + 2mgl & -\omega_{n1}^2 ml^2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Ennek az egyenletnek végtelen sok, egymástól konstans szorzóban különböző megoldása van az A_{11} , A_{12} elemekre. Mivel számunkra csak a lengéskép vektor elemeinek az aránya fontos, legyen $A_{11} = 1$! Ezzel a választással a (3.29) egyenletrendszer első egyenlete

$$(-2\omega_{n1}^2 ml^2 + 2mgl) \cdot 1 - \omega_{n1}^2 ml^2 \cdot A_{12} = 0,$$

amiből

$$A_{12} = \frac{-2\omega_{n1}^2 ml^2 + 2mgl}{\omega_{n1}^2 ml^2} = \frac{2g}{l\omega_{n1}^2} - 2 = \sqrt{2}.$$

Hasonlóan kapjuk $\omega_n = \omega_{n2}$ behelyettesítésével, hogy $A_{22} = -\sqrt{2}$, tehát a két lengéskép vektor

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

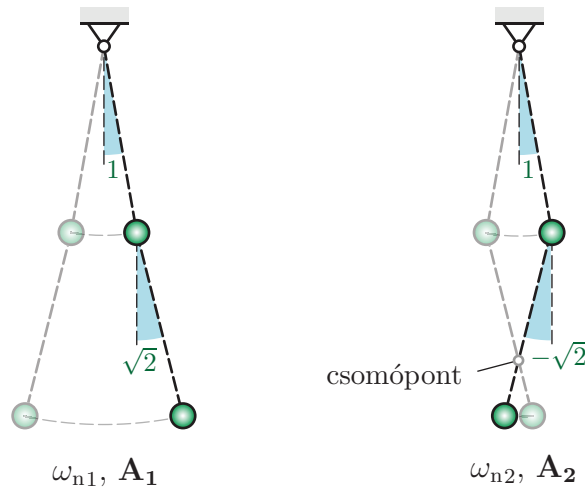
A lengéskép vektorokat az inga 3.5 szerkezeti ábrája segítségével szemléltethetjük.

A $q_2 \equiv \varphi_2$ szög maximális értéke – az alsó inga lengésének amplitúdója – mindkét esetben $\sqrt{2}$ -ször nagyobb abszolút értékű, mint a $q_1 \equiv \varphi_1$ szög maximuma, de a második lengéskép esetében ellentétes fázisban mozog az inga alsó és felső része. Ezért az \mathbf{A}_2 lengéskép ábráján megfigyelhető a *csomópont*, mely az inga mozgása során végig a helyén marad.

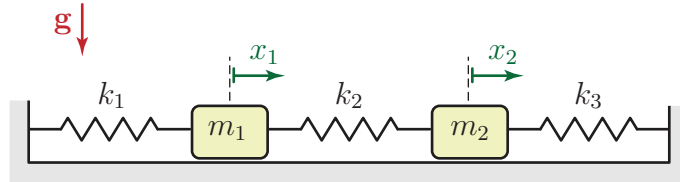
3.3. példa: Sorbakapcsolt tömeg-rugó lánc I. A 3.6 ábrán egy két hasábból és három rugóból álló láncszerű lengőrendszer látható. Írjuk fel a mozgásegyenleteket a mátrix együtthatós differenciálegyenlet segítségével az egyensúlyi helyzettől mért $\mathbf{q} = [x_1 \ x_2]^T$ abszolút koordinátákkal, majd határozzuk meg a sajátkörfrekvenciákat és lengésképeket! Adatok: $m_1 = m_2 = 1$ kg és $k_1 = k_2 = k_3 = 100$ N/m.

A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2,$$



3.5. ábra. A matematikai kettősinga lengésképeinek szemléltetése.



3.6. ábra. Sorba kapcsolt tömeg-rugó lánc.

a potenciális energia pedig

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2.$$

Ezek alapján differenciálások után számítható az általános tömeg- és merevségi mátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

és felírható a frekvenciaegyenlet:

$$\begin{aligned} \det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) &= \begin{vmatrix} -m_1\omega_n^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega_n^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 200 - \omega_n^2 & -100 \\ -100 & 200 - \omega_n^2 \end{vmatrix} = \omega_n^4 - 400 \omega_n^2 + 30000 = 0. \end{aligned}$$

Jól látszik, hogy ugyan csak két nagyságrendnyi különbség van a tömeg kg-ban és a merevség N/s-ban kifejezett számértékei között, a frekvenciaegyenlet együtthatói között már négy nagyságrendnyi eltérés van. Egy hasonló, n szabadsági fokú rendszernél már 2^n nagyságrendnyi eltérést találnánk, ami már komoly számítási problémákat okozhat sok szabadsági fokú rendszerek frekvenciaegyenletének megoldása során. Az egyenletet átírva

$$\begin{aligned} 10^4 \left(\frac{\omega_n}{10}\right)^4 - 400 \cdot 10^2 \left(\frac{\omega_n}{10}\right)^2 + 30000 &= 0, \quad \text{azaz} \\ \left(\frac{\omega_n}{10}\right)^4 - 4 \left(\frac{\omega_n}{10}\right)^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

alakra, az együtthatók azonos nagyságrendűvé tehetők, és $(\omega_n/10)^2$ -re már pontosabban számítható az egyenlet két gyöke:

$$\left(\frac{\omega_{n1}}{10}\right)^2 = 1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2, \quad \left(\frac{\omega_{n2}}{10}\right)^2 = 3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2,$$

amiből gyökvonással és tízzel való szorzással kaphatók a sajátkörfrekvenciák:

$$\omega_{n1} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \omega_{n2} = 10\sqrt{3} \approx 17,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (3.30)$$

A lengésképek meghatározásához válasszuk mindkét lengéskép vektor első elemét 1-nek, tehát legyen $A_{11} = A_{21} = 1$! A lengéskép vektorok második (A_{12} és A_{22}) elemeinek a meghatározásához a

$$(-\omega_{ni}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -m_1 \omega_{ni}^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ A_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

egyenletrendszert kell megoldani. Mivel ennek az egyenletrendszernek a két egyenlete lineárisan összefügg, elég csak az együtthatómátrix első sorát figyelembe venni. Ebből

$$A_{i2} = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \omega_{ni}^2}{k_2} = \frac{200 - \omega_{ni}^2}{100}, \quad i = 1, 2. \quad (3.31)$$

Behelyettesítve ω_{ni} helyére a (3.30) értékeket, $A_{12} = 1$ és $A_{22} = -1$ adódik, amiből a lengéskép vektorok

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

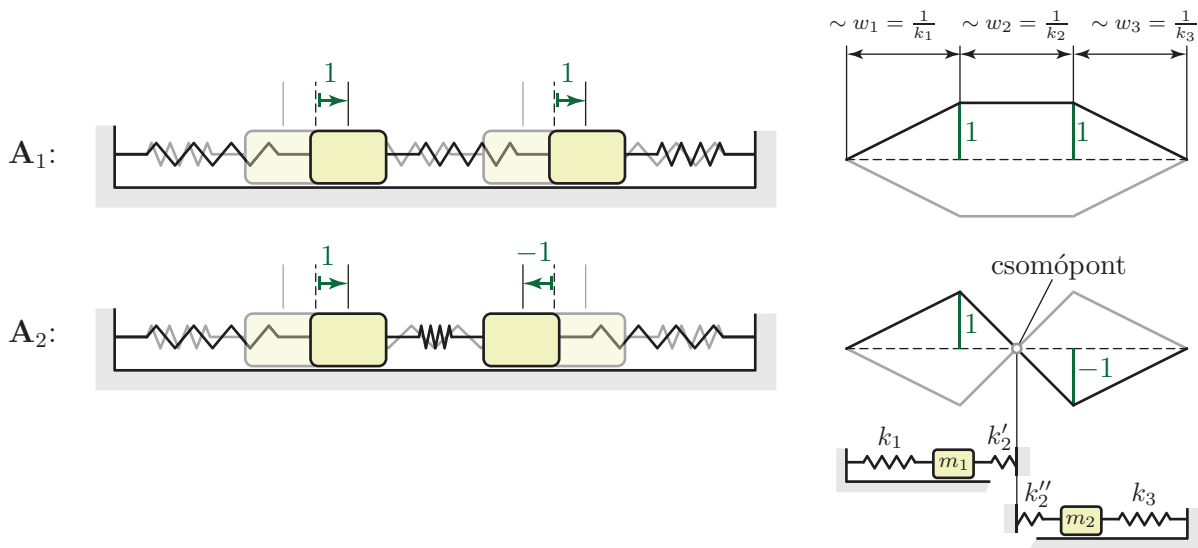
Bár a lengéskép vektorok a szerkezeti ábra segítségével is szemléltethetők, láncszerű rendszerek lengésképeit gyakran a kitérésre merőlegesen rajzolják fel. A 3.7. ábrának megfelelően, általában a rugómerevségek reciprokaival, azaz a rugóállandókkal arányos távolságokban veszik fel a lengéskép vektorok egyes elemeit. Az így kapott pontokat egyenes szakaszokkal összekötve, a rugók egyes pontjainak elmozdulását is lehet szemléltetni.

A lengésképek olyan speciális rezgéseknek felelnek meg, amikor a két test ω_{n1} frekvenciával azonos irányban, illetve ω_{n2} frekvenciával ellentétes irányban mozog. Ez utóbbi esetben – az \mathbf{A}_2 lengéskép ábráján jól látható módon – kialakul egy csomópont, azaz olyan pont, mely nem mozog a rezgés során. A csomópontot akár rögzítettnek is tekinthetjük, és helyettesíthetjük a k_2 rugót egy k'_2 és egy k''_2 merevségű rugóval. Mivel ezek sorosan kapcsolt rugók,

$$\frac{1}{k'_2} + \frac{1}{k''_2} = \frac{1}{k_2}, \quad \text{azaz a rugóállandókkal kifejezve} \quad w'_2 + w''_2 = w_2. \quad (3.33)$$

Az \mathbf{A}_2 lengésképnek megfelelő rezgés során a két hasáb egyszerre veszi fel a szélső helyzetét, ezért a csomópont akkor marad egyensúlyban, ha $k'_2 \cdot 1 = k''_2 \cdot A_{22}$, tehát $1/w'_2 = A_{22}/w''_2$. Ez azt jelenti, hogy a rugóállandókkal arányos távolságban felvéve a lengéskép vektor elemeit, az összekötő vonalak metszéspontja helyesen adja meg a csomópont helyzetét. ♠

3.42. megjegyzés: Ha $k_1 = k_3 = 0$ (3.8. ábra), akkor a két hasábból és egy rugóból álló lengőrendszer nem kapcsolódik a környezetéhez (megváltoztak a peremfeltételek), és így

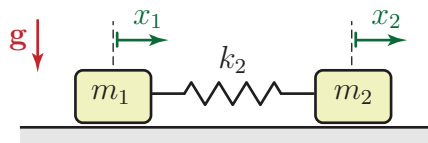


3.7. ábra. Tömeg-rugó lánc lengésképei kétféle ábrázolásban.

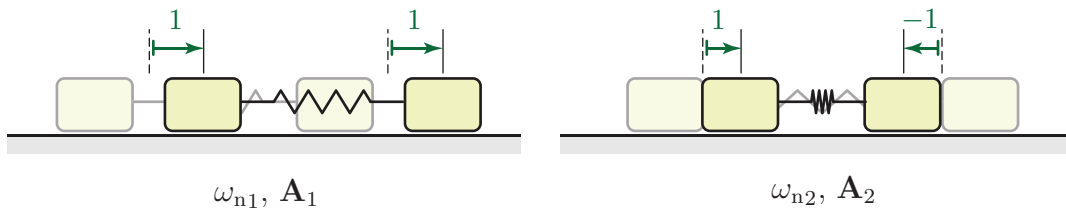
megváltozik a feladat jellege is. A példában kiszámolt tömegmátrix változatlan marad, de a merevségi mátrix

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (3.34)$$

lesz. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\det \hat{\mathbf{K}} = 0$, tehát ez már nem pozitív definit mátrix. Ez összhangban van azzal, hogy a lengőrendszer bármilyen $x_1 = x_2$ helyzetben – azaz amikor nyújtatlan a rugó – egyensúlyban lehet. Ezek a helyzetek nem stabilak, csak a stabilitás határhelyzetében vannak.



3.8. ábra. Két hasázból álló, merevtest-szerű mozgásra is képes „szabad” rugó-lánc.



3.9. ábra. Merevtest-szerű mozgásra is képes rugó-lánc lengésképei.

A frekvenciaegyenlet azonos m tömegű testek esetében

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega_n^2 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega_n^2 + k_2 \end{vmatrix} = \omega_n^4 - 200 \omega_n^2 = 0.$$

Ennek a negyedfokú egyenletnek a gyökei: $0, 0, 10\sqrt{2}, -10\sqrt{2}$.

A 2.13. megjegyzésben láttuk, hogy a sajátkörfrekvenciák a karakterisztikus gyökök képzetes részének abszolút értékeként számíthatók, míg a valós rész a csillapítással kapcsolatos. Ez így van több szabadsági fokú rendszerek esetében is (lásd 3.44. megjegyzés). Ebben a feladatban nincs csillapítás, tehát mindegyik karakterisztikus gyöknek nulla a valós része. Ebből az következik, hogy a sajátkörfrekvenciák közül a kisebbik, $\omega_{n1} = 0$ valójában két egybeeső, nulla értékű gyöknek felel meg, ami a (2.96) egyenlet szerint a lengőrendszer merevtest-szerű, haladó mozgását írja le. Az ehhez tartozó lengéskép vektor

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

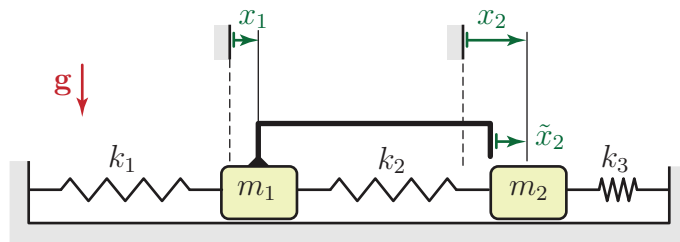
ami szerint $x_1(t) = x_2(t)$, azaz a két test ugyanakkora sebességgel halad (3.9. ábra).

A másik sajátkörfrekvencia és lengéskép $\omega_{n2} = 10\sqrt{2} \approx 14,14$ rad/s, illetve

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{m_1}{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy a két test közös *tömegközéppontja* (súlypontja) – ami egyúttal a csomópont – egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és a testek ekörül rezegnek ω_{n2} sajátkörfrekvenciával. Mivel a csomópont ebben az esetben éppen a rugó felénél van, a rendszer két azonos lengőrendszerre bontható szét a csomópontnál. Ezek a lengőrendszerek egy $m \equiv m_1 = m_2$ tömegű testből és a feladat jelöléseivel $w'_2 = w''_2 = w_2/2$ rugóállandójú, tehát $k'_2 = 2k_2$ merevségű rugóból állnak. Ez alapján is kiszámolható a sajátkörfrekvencia: $\omega_{n2} = \sqrt{2k_2/m}$. ♣

3.4. példa: Sorbakapcsolt tömeg-rugó lánc II. Oldjuk meg az előző feladatot a $\mathbf{q} = [x_1 \ \tilde{x}_2]^T$ általános koordinátákkal, ahol \tilde{x}_2 relatív koordináta. Ez azt jelenti, hogy \tilde{x}_2 az m_2 tömegű test m_1 -től mért távolságának változását – a k_2 merevségű rugó megnyúlását – adja meg, és így $\tilde{x}_2 = 0$ az egyensúlyi helyzetben. Az x_2 abszolút és \tilde{x}_2 relatív koordináta kapcsolatát a 3.10. ábra szemlélteti.



3.10. ábra. Tömeg-rugó lánc az \tilde{x}_2 relatív koordinátával.

Mivel az m_2 tömegű test abszolút helyzetét az $x_2 = x_1 + \tilde{x}_2$ koordináta írja le, a mozgási energia kifejezése

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \equiv \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 + \dot{\tilde{x}}_2)^2,$$

a potenciális energia pedig

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\tilde{x}_2^2 + \frac{1}{2}k_3(x_1 + \tilde{x}_2)^2.$$

A tömeg- és merevségi mátrixok:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & k_3 \\ k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Ezekkel a mátrixokkal ugyanazok a sajátkörfrekvenciák jönnek ki, mint az eredeti x_1 , x_2 koordinátákkal, de a lengéskép vektorok már mások lesznek, mint az előző feladatban vizsgált esetben:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

A lengéskép vektorok második elemei éppen 1-gyel kisebbek mint az eredetileg választott abszolút koordinátákkal. Ez természetes, ha arra gondolunk, hogy az m_2 tömegű test mozgását az m_1 -hez képest vizsgáljuk, tehát például a két test azonos sebességű mozgását az $\mathbf{A}_1 = [1 \ 0]^T$ vektor adja meg. A példából látszik, hogy míg a sajátkörfrekvenciák egyértelműen jellemzik a vizsgált lengőrendszert, a lengéskép vektorok nem egyértelműek, mert a választott koordinátáktól függenek. ♠

3.43. megjegyzés: Ha $k_1 = k_3 = 0$, akkor a példában kiszámolt tömegmátrix ismét változatlan marad, de a merevségi mátrix

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (3.38)$$

lesz. Ekkor $\det \hat{\mathbf{K}} = 0$, és az egyik – a kisebbik – sajátkörfrekvencia nulla: $\omega_{n1} = 0$. ♣

3.3. Numerikus szimuláció

Nemlineáris rendszerek linearizált mozgásegyenlete csak kis kitérések mellett szolgáltat elfogadható pontosságú megoldást. Ha a lineáris közelítés már nem alkalmazható, akkor *numerikus szimulációval* vizsgálhatjuk a nemlineáris mozgásegyenleteket.⁴ A numerikus szimuláció a linearizált mozgásegyenletek megoldásának előállítására és ellenőrzésére is használható, hiszen például a sajátkörfrekvenciák meghatározására is numerikus algoritmusokat kell használni a sok szabadsági fokú esetekben, a 3.41. megjegyzésnek megfelelően.

A differenciálegyenletek numerikus megoldására kidolgozott matematikai módszerek általában

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \quad (3.39)$$

alakú – tehát elsőrendű – egyenletekre alkalmazhatók. A legelterjedtebb módszerek az *Euler-módszer* és a *Runge–Kutta-módszer* változatai [18]. Különösen széles körben használják az ún. negyedrendű Runge–Kutta-módszert. A lehetséges számítási algoritmusok bemutatását mellőzzük, mivel ezek az eljárások számos matematikai programcsomagban megtalálhatók.

Ebben a fejezetben az ún. *Cauchy-átírás* alkalmazását mutatjuk meg, amivel a gyorsulást tartalmazó – tehát másodrendű – differenciálegyenleteket (3.39) alakúra lehet transzformálni. A módszer lényege az, hogy az általános sebességeket új változóknak tekintjük. Így n szabadsági fokú esetben az n darab másodrendű differenciálegyenletből $m = 2n$ darab elsőrendű egyenletet kapunk.

⁴ Bizonyos esetekben a numerikus szimuláció is csak korlátozottan alkalmazható. Például elég nagy kitérések mellett a matematikai kettősinga mozgása *kaotikus*, tehát gyakorlatilag előrejelezhetetlen módon viselkedik.

Egy szabadsági fokú esetben egyetlen másodrendű egyenletet kell két elsőrendű egyenletté transzformálni. Az első lépésben új változókat kell bevezetni a q általános koordináta helyett: $y_1 \equiv q$ és $y_2 \equiv \dot{q}$. Az elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer első egyenlete $\dot{y}_1 = y_2$ lesz, ami az eredeti jelöléssel a $\dot{q} = \dot{q}$ azonosságnak felel meg. A második egyenlet abból adódik, hogy az általános gyorsulás – tehát \ddot{y}_2 – kifejezhető az általános koordinátával és az általános sebességgel, azaz y_1 -gyel és y_2 -vel.

3.5. példa: Az egy szabadsági fokú, csillapított és harmonikusan gerjesztett lengőrendszer mozgásegyenletének sztenderd alakja

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f_0\omega_n^2 \cos(\omega t).$$

A Cauchy-átíráshoz új koordinátákat vezetünk be:

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

Ezzel

$$\dot{\mathbf{y}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -2\zeta\omega_n y_2 - \omega_n^2 y_1 + f_0\omega_n^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2, t) \\ f_2(y_1, y_2, t) \end{bmatrix},$$

ami már (3.39) alakú. Valójában csak az y_2 -vel jelölt általános sebesség új változó. Az x általános koordinátát továbbra is használjuk, csak a formátum egységessé tétele érdekében vezetjük be helyette az y_1 jelölést. ♠

Több szabadsági fokú rendszerekre is igaz, hogy a mozgásegyenletek az általános gyorsulásoknak – azaz az általános koordináták második deriváltjainak – a lineáris kifejezései. Például a kettős inga (3.26) és (3.27) egyenletei közül mindkettőben megtalálható $\ddot{\varphi}_1$ és $\ddot{\varphi}_2$, de csak az első hatványon. Ez azt jelenti, hogy az általános gyorsulások (elég általános feltételek mellett) külön-külön is kifejezhetők csak az általános sebességekkel és az általános koordinátákkal. Ha ezt megtettük, akkor alkalmazható a Cauchy-átírás az egy szabadsági fokú rendszerek kapcsán bemutatott módon.

3.6. példa: A matematikai kettősinga egyenleteinek Cauchy-átírása. Az egyszerűség kedvéért csak a linearizált

$$\begin{aligned} 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl \varphi_1 &= 0, \\ ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\ddot{\varphi}_1 + mgl \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

egyenletek átírását mutatjuk be, a nemlineáris (3.26) és (3.27) egyenletek átírása hasonlóan végezhető el. Vezessünk be új változókat a következő módon:

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}.$$

Ezekkel a jelölésekkel átírható a differenciálegyenlet-rendszer

$$\dot{y}_1 = y_3, \quad (3.40)$$

$$\dot{y}_2 = y_4, \quad (3.41)$$

$$2ml^2\dot{y}_3 + ml^2\dot{y}_4 + 2mgl y_1 = 0, \quad (3.42)$$

$$ml^2\dot{y}_3 + ml^2\dot{y}_4 + mgl y_2 = 0 \quad (3.43)$$

alakba. Ez az egyenletrendszer már csak elsőrendű deriváltakat tartalmaz, de még nem felel meg a (3.39) egyenletnek, hiszen a harmadik és a negyedik egyenlet nem csak egy változó deriváltját tartalmazza. A (3.42) egyenletből kivonva a (3.43) egyenletet, \dot{y}_3 kifejezhető. Visszahelyettesítve a (3.43) egyenletbe, megkapjuk \dot{y}_4 kifejezését is:

$$\begin{aligned}\dot{y}_3 &= \frac{g}{l}(y_2 - 2y_1), \\ \dot{y}_4 &= \frac{2g}{l}(y_1 - y_2).\end{aligned}$$

A fenti két egyenlet a (3.40) és (3.41) egyenletekkel együtt már (3.39) alakú egyenletrendszert alkot. ♠

Általánosan, egy

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*$$

mátrix együtthatós differenciálegyenlettel megadott lineáris mozgásegyenlet szimulációjához az

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}$$

vektor bevezetésével térhetünk át elsőrendű egyenletre. Mivel az általános gyorsulás vektora kifejezhető

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^*$$

alakban, a Cauchy-átírással kapható elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer

$$\dot{\mathbf{y}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^* \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer numerikus szimulációjához szükség lehet a Δt időlépés megadására. Ha tudjuk, hogy a rendszer rezgése milyen frekvenciakomponenseket és azokhoz tartozó periódusidőket tartalmazhat, akkor ezek alapján határozhatjuk meg az időlépést. A 3.5. példában vizsgált lengőrendszer esetében $T_1 = 2\pi/\omega_d$ és $T_2 = 2\pi/\omega$ a két jellemző periódusidő. Periodikus, de nem harmonikus gerjesztés számos frekvenciakomponenst tartalmazhat, melyeket a gerjesztő jel függvényalakjának ismeretében Fourier-sorfejtéssel (lásd 2.6.1. fejezet) határozhatunk meg⁵.

Ha ismertek a rezgés jellemző periódusai, akkor az időlépés javasolt értéke

$$\Delta t \leq \frac{1}{20} \min(T_1, T_2, \dots). \quad (3.44)$$

Az ún. *adaptív módszerek* automatikusan állítják be az időlépést, a megkívánt pontosságnak megfelelően.

⁵Ha a gerjesztés függvényalakját nem ismerjük, de mérni tudjuk, akkor a mért jel *Fourier-transzformációjával* határozhatók meg a frekvenciakomponensek. A gyakorlatban az ún. gyors Fourier-transzformációt (FFT) használják.

3.44. megjegyzés: A 2.13. megjegyzésben láttuk, hogy egy szabadsági fokú lengőrendszer esetében hogyan lehet meghatározni a sajátkőrfrekvenciát és a relatív csillapítási tényezőt. Az ott részletezett módszer általánosítható több szabadsági fokú lengőrendszerek esetére is. Ha a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

együtthatómátrix valamelyik λ_j sajátértéke *valós*, akkor az annak megfelelő sajátvektor olyan kezdeti kitéréseket és sebességeket ad meg, melyek mellett éppen az $e^{\lambda_j t}$ függvény szerint tart a kitérés a nullához. Ez a túlcillapítás esete. A valós sajátvektorok lineáris kombinációiként előálló kezdeti feltételekből indítva a rendszert, a mozgás rezgés nélkül csillapodik.

Ha van egy *komplex konjugált* sajátérték pár ($\lambda_i = \bar{\lambda}_i$), akkor a valós rész és a képzetes rész alapján meghatározható a hozzá tartozó csillapítatlan és csillapított sajátkőrfrekvencia, valamint a ζ_i *modális relatív csillapítási tényező* (lásd (2.70) és (2.93)):

$$\omega_{ni} = |\lambda_i|, \quad \omega_{di} = |\operatorname{Im}\lambda_i|, \quad \zeta_i = \frac{-\operatorname{Re}\lambda_i}{|\lambda_i|}.$$

Minden komplex konjugált gyökpár egy megfelelő sajátfrekvenciájú lengésnek felel meg. Tetszőleges kezdeti feltételek mellett ezek lineáris kombinációja valósul meg. ♣

3.4. Harmonikusan gerjesztett rezgések

A több szabadsági fokú lineáris lengőrendszerek esetében is kitüntetett gyakorlati jelentőséggel bír a harmonikus gerjesztés esete – ennek okait már kifejtettük a 2.6.1 fejezetben az egy szabadsági fokú rendszerek kapcsán.

Most azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}^*$$

differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő általános erő egy szinuszos és egy koszinuszos tag összegeként írható fel, azaz

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_{s0} \sin(\omega t) + \mathbf{Q}_{c0} \cos(\omega t), \quad (3.45)$$

ahol n szabadsági fok esetén

$$\mathbf{Q}_{s0} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{Q}_{c0} \in \mathbb{R}^n.$$

A fenti kifejezés természetesen átírható

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_0 \sin(\omega t + \varepsilon)$$

alakra is, egy megfelelő ε fázisszög bevezetésével.

3.4.1. A stacionárius megoldás meghatározása

A fentiek szerint a több szabadsági fokú, harmonikusan gerjesztett, lineáris lengőrendszer mozgásegyenlete a legáltalánosabb esetben

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{s0} \sin(\omega t) + \mathbf{Q}_{c0} \cos(\omega t) \quad (3.46)$$

alakú. Az egy szabadsági fokú esethez hasonlóan (lásd 2.6.2 fejezet), ennek az egyenletnek a megoldása is a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összegéből állítható elő.

Több szabadsági fokú esetben a csillapítás jelentősen megnehezíti a homogén egyenlet megoldását. Viszont mivel a homogén egyenlet megoldása lecseng, gyakran elegendő is, ha csak a stacionárius megoldást számítják ki. A stacionárius (állandósult) megoldást

$$\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{L} \cos(\omega t) + \mathbf{N} \sin(\omega t) \quad (3.47)$$

alakban keressük, ahol n szabadsági fokú rendszer esetén \mathbf{L} és \mathbf{N} is n elemű vektor: $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$. A fenti kifejezést idő szerint deriválva:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_p(t) &= -\mathbf{L}\omega \sin(\omega t) + \mathbf{N}\omega \cos(\omega t) \quad \text{és} \\ \ddot{\mathbf{q}}_p(t) &= -\mathbf{L}\omega^2 \cos(\omega t) - \mathbf{N}\omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Ezeket a kifejezéseket visszahelyettesítve a (3.46) mozgásegyenletbe egy meglehetősen nagy méretű vektoregyenletet kapunk. Ez az egyenlet két külön egyenletre bontható a $\sin(\omega t)$ és a $\cos(\omega t)$ együtthatóinak megfelelően, ugyanúgy, mint az egy szabadsági fokú esetben (lásd (2.194)):

$$\cos(\omega t) \text{ együtthatói: } -\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{L} + \omega \mathbf{C}\mathbf{N} + \mathbf{K}\mathbf{L} = \mathbf{Q}_{c0}, \quad (3.48)$$

$$\sin(\omega t) \text{ együtthatói: } -\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{N} - \omega \mathbf{C}\mathbf{L} + \mathbf{K}\mathbf{N} = \mathbf{Q}_{s0}. \quad (3.49)$$

Mátrix alakba rendezve

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} & \omega \mathbf{C} \\ -\omega \mathbf{C} & -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{c0} \\ \mathbf{Q}_{s0} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Ebben az egyenletben a mátrix $2n \times 2n$, a két vektor pedig $2n \times 1$ méretű. Az egyenlet jobb oldalán álló vektor első eleme az első-, második eleme a második általános erő komponens koszinuszos részét adja meg. Hasonlóan, n szabadsági fokú rendszer esetén az $n + i$ -edik elem az i -edik általános erő komponens szinuszos része.

(3.50) egy *inhomogén* lineáris egyenletrendszer, aminek csak akkor van megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. Ennek kapcsán érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor pl. csak koszinuszos jellegű a gerjesztés és nincs csillapítás. Ekkor a (3.50) egyenletrendszer két független egyenletrendszerre esik szét, melyekben \mathbf{L} és \mathbf{N} együtthatómátrixa megegyezik:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{L} = \mathbf{Q}_{c0}, \quad (3.51)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Az első egyenlet inhomogén, aminek akkor van megoldása, ha

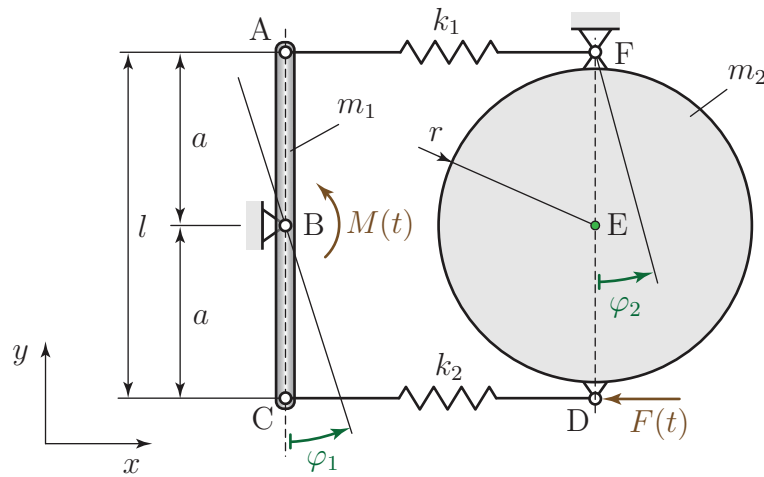
$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \neq 0.$$

A második – homogén – egyenletnek mindenképpen van egy megoldása: $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Nullától különböző, nemtriviális megoldás csak akkor lehetne, ha $\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$ lenne. Ez azonban nem teljesülhet, mert ez ellentétes az első egyenletre megfogalmazott feltétellel. Tehát csillapítás nélküli esetben $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, azaz 0 vagy π radián a fáziseltolódás a gerjesztés és a válasz között, ugyanúgy, mint az egy szabadsági fokú esetben (2.56. ábra).

A (3.52) egyenlet megfelel a sajátkőrfrekvenciák és lengésképek kiszámítása során használt (3.11) egyenletnek. Tehát ha nincs csillapítás, és a gerjesztés körfrekvenciája megegyezik valamelyik sajátkőrfrekvenciával, akkor az együttthatómátrix determinánsa nulla. Következésképpen a (3.52) egyenletnek elvileg lehetne ugyan nemtriviális $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ megoldása is, viszont ekkor a (3.51) egyenletnek nem lenne megoldása. Ez az eset az egy szabadsági fokú rendszerek kapcsán a 2.6.2. fejezetben már említett, matematikai értelemben vett *rezonancia*. Rezonanciában nem (3.47) alakú a mozgástörvény – lásd (2.210) –, ezért nem jelent ellentmondást, hogy ilyenkor nem oldható meg a (3.51) egyenlet. A rezonancia közelében mindegyik koordináta kitérése (\mathbf{L} elemei) naggyá válik, ami általában elkerülendő. A rezonancia jelenségével a 3.4.3. fejezetben foglalkozunk bővebben.

3.4.2. Erő- vagy nyomatékgerjesztett rendszerek stacionárius megoldásának meghatározása

3.7. példa: A 3.11. ábrán vázolt mechanikai rendszer elemei kis kitérésű lengéseket végeznek a vízszintes síkban. Az általános koordináták vektora $\mathbf{q} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$. A rúdra $M(t) = M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1)$ gerjesztő nyomaték, a korongra pedig $F(t) = F_D \sin(\omega t + \varepsilon_2)$ gerjesztő erő hat. Határozzuk meg az állandósult lengés amplitúdóját és fázisszögét, és számítsuk ki a k_2 merevségű rugóban ébredő erő legnagyobb értékét!



3.11. ábra. Rúdból és korongból álló 2 DoF gerjesztett lengőrendszer $M(t) = M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1)$ nyomaték- és $F(t) = F_D \sin(\omega t + \varepsilon_2)$ erőgerjesztéssel.

A rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2} \Theta_{1b} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \Theta_{2f} \dot{\varphi}_2^2,$$

ahol $\Theta_{1b} = 1/12 m_1 l^2$ és $\Theta_{2f} = 1/2 m_2 r^2 + m_2 a^2$ a két test B illetve F ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka. Ebből az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Theta_{1b} & 0 \\ 0 & \Theta_{2f} \end{bmatrix}.$$

A potenciális energia

$$U = \frac{1}{2} k_1 (a \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (l \varphi_2 - a \varphi_1)^2,$$

amiből kétszeres deriválással kapjuk az általános merevségi mátrixot:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)a^2 & -k_2la \\ -k_2la & k_2l^2 \end{bmatrix}.$$

Az erő- és nyomatékgerjesztésnek megfelelő általános erő komponenseket a teljesítmény kifejezéséből számíthatjuk ki:

$$P = \mathbf{M}_B \cos(\omega t - \varepsilon_1) \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{F}_D \sin(\omega t + \varepsilon_2) \cdot \mathbf{v}_D.$$

Mivel az \mathbf{M}_B nyomaték azonos értelmű mint az $\boldsymbol{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{\varphi}_1]^T$ szögsebesség, viszont az \mathbf{F}_D erő iránya ellentétes az (x, y, z) koordináta-rendszerben felírt $\mathbf{v}_D = [l\dot{\varphi}_2 \ 0 \ 0]^T$ sebességvektor irányával, a teljesítményt az alábbi alakban adhatjuk meg:

$$P = M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1)\dot{\varphi}_1 - F_D \sin(\omega t + \varepsilon_2)l\dot{\varphi}_2. \quad (3.53)$$

Ugyanakkor a (2.141) egyenlet szerint a teljesítmény kifejezhető az általános erőkkel és sebességekkel is:

$$P = Q_1 \dot{\varphi}_1 + Q_2 \dot{\varphi}_2. \quad (3.54)$$

(3.53) és (3.54) összevetéséből

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_B \cos(\omega t - \varepsilon_1) \equiv \underbrace{M_B \cos(\varepsilon_1)}_{=Q_{1c}} \cos(\omega t) + \underbrace{M_B \sin(\varepsilon_1)}_{=Q_{1s}} \sin(\omega t), \\ Q_2 &= -F_D l \sin(\omega t + \varepsilon_2) \equiv \underbrace{-F_D l \sin(\varepsilon_2)}_{=Q_{2c}} \cos(\omega t) - \underbrace{F_D l \cos(\varepsilon_2)}_{=Q_{2s}} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

A fenti egyenletekben megjelöltük a két általános erő komponens szinuszos és koszinuszos összetevőinek együtthatóit, ugyanis ezekből állítható össze a gerjesztő erő amplitúdóit tartalmazó vektor.

A gerjesztett rendszer stacionárius megoldásában szereplő L_1 , L_2 , N_1 , N_2 együtthatók a (3.50) egyenlet alapján felírt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\omega^2\Theta_{1b} + (k_1 + k_2)a^2 & -k_2la & 0 & 0 \\ -k_2la & -\omega^2\Theta_{2f} + k_2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2\Theta_{1b} + (k_1 + k_2)a^2 & -k_2la \\ 0 & 0 & -k_2la & -\omega^2\Theta_{2f} + k_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} Q_{1c} \\ Q_{2c} \\ Q_{1s} \\ Q_{2s} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_B \cos(\varepsilon_1) \\ -F_D l \sin(\varepsilon_2) \\ M_B \sin(\varepsilon_1) \\ -F_D l \cos(\varepsilon_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg.

Az k_2 merevségű rugóban ébredő erő a rugó két végének elmozdulásából számítható:

$$F_{k_2} = k_2(l\varphi_2 - a\varphi_1).$$

Mivel az állandósult állapotban $\varphi_1(t) = L_1 \cos(\omega t) + N_1 \sin(\omega t)$ és $\varphi_2(t) = L_2 \cos(\omega t) + N_2 \sin(\omega t)$, ez az erő

$$F_{k_2} = k_2 \left(\underbrace{(L_2l - L_1a)}_{\equiv x_c} \cos(\omega t) + \underbrace{(N_2l - N_1a)}_{\equiv x_s} \sin(\omega t) \right)$$

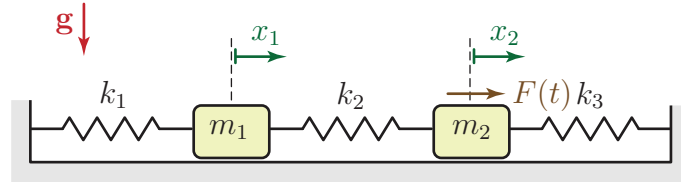
alakban fejezhető ki, ahol bevezettük az x_c és x_s jelöléseket. A maximális rugóerő meghatározásához a (2.11) egyenlethez hasonló átalakítást kell végrehajtani:

$$F_{k_2} = k_2 \sqrt{x_c^2 + x_s^2} \sin(\omega t + \delta).$$

Mivel a szinuszfüggvény -1 és 1 közötti értékeket vehet fel, a maximális rugóerő

$$F_{k_2 \max} = k_2 \sqrt{x_c^2 + x_s^2}. \quad \spadesuit$$

3.8. példa: Láncszerű lengőrendszer gerjesztett rezgései. Vizsgáljuk meg a 3.3. példában vizsgált láncszerű rendszer gerjesztett rezgéseit abban az esetben, amikor $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ erő hat az m_2 tömegű testre! Adott $F_0 = 10$ N erőamplitúdó és $\omega = 10$ rad/s gerjesztési körfrekvencia mellett határozzuk meg úgy az m_1 tömeg nagyságát, hogy az m_2 tömegű test nyugalomban maradjon a stacionárius rezgés során! A 3.3. példának megfelelően $m_2 = 1$ kg és $k_1 = k_2 = k_3 = 100$ N/m.



3.12. ábra. Erőgerjesztett tömeg-rugó lánc. $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

A 3.3. példában már meghatároztuk a tömeg- és merevségi mátrixot, de most m_1 értéke ismeretlen:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A következő lépés az általános erő vektorának meghatározása. Ehhez írjuk fel a gerjesztő erő teljesítményét:

$$P = F(t)\dot{x}_2.$$

A teljesítmény kifejezésében \dot{x}_1 együtthatója lenne az általános erő vektor Q_1 komponense, ami most nulla. \dot{x}_2 együtthatójából $Q_2 = F(t)$, tehát a mozgásegyenlet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0 \cos(\omega t), \quad \text{azaz kifejtve}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} \cos(\omega t).$$

Mivel csillapítatlan a lengőrendszer, a partikuláris megoldást kereshetjük

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{X}_0 \cos(\omega t) \quad (3.55)$$

alakban. Ezt azért tehetjük meg, mert csillapítás nélkül – az egy szabadsági fokú esethez hasonlóan – a gerjesztés és a megoldás (válasz) fázisa vagy azonos, vagy ellentétes (ezzel

kapcsolatban lásd a (3.52) egyenlet megoldásáról leírtakat). A fenti próbafüggvényt vissza kell helyettesíteni a mozgásegyenletbe, amihez szükség van a második deriváltjára:

$$\ddot{\mathbf{q}}_p = -\omega^2 \mathbf{X}_0 \cos(\omega t).$$

Visszahelyettesítés után a

$$-\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{X}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{K} \mathbf{X}_0 \cos(\omega t) = \mathbf{Q}_0 \cos(\omega t)$$

egyenletre jutunk, aminek minden t időpontban teljesülnie kell. Tehát $\cos(\omega t)$ -vel egyszerűsíthetünk, és így

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}\right) \mathbf{X}_0 = \mathbf{Q}_0. \quad (3.56)$$

Adott rendszerparaméterek mellett ebből már meghatározható lenne az \mathbf{X}_0 vektor mindkét eleme, tehát tényleg megfelelő volt (3.55) alakban keresni a partikuláris megoldást.

Most nincs megadva az m_1 tömeg; ezt abból a feltételből lehet meghatározni, hogy az \mathbf{X}_0 vektor második eleme nulla kell legyen. Tehát ebben az esetben is két ismeretlen van az egyenletben: m_1 és \mathbf{X}_0 első eleme – amit X_{01} -gyel jelölünk. A (3.56) egyenlet tehát így fejthető ki:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \\ \begin{bmatrix} 200 - m_1\omega^2 & -100 \\ -100 & 200 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer első egyenletéből

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)X_{01} = 0,$$

amiből a keresett m_1 tömeg

$$m_1 = \frac{k_1 + k_2}{\omega^2} = \frac{200}{100} = 2 \text{ kg.}$$

Az egyenletrendszer második sorából az m_1 tömegű test stacionárius rezgésének maximális nagyságú kitérésére $X_{01} = -0,1$ m adódik. A negatív előjel arra utal, hogy a gerjesztéssel ellentétes fázisban mozog a test.

Tehát az m_1 tömeg megfelelő megválasztásával zérussá tehető az m_2 tömegű test amplitúdója az állandósult állapotban, pedig éppen arra a testre hat a gerjesztő erő. Az ilyen tulajdonságú lengőrendszereket dinamikus lengéfojtónak nevezik.

Ha az m_2 tömegű testet lerögzítenénk, akkor az m_1 tömegű testből és a k_1, k_2 merevségű rugókból álló egy szabadsági fokú lengőrendszernek

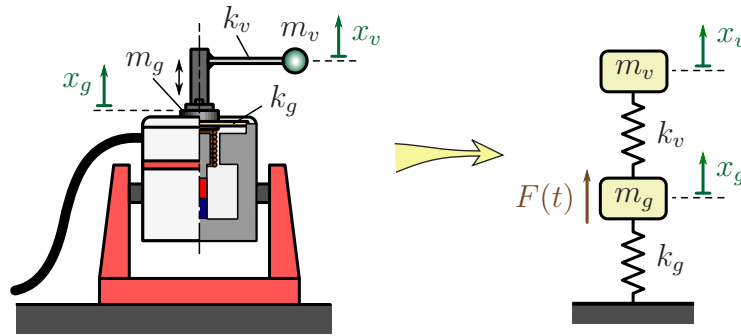
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}$$

lenne a sajátkőrfrekvenciája (lásd a 2.1.5. fejezetet), ami az m_1 tömeg fenti megválasztásával éppen megegyezik a gerjesztés körfrekvenciájával. ♠

3.4.3. Rezonancia és antirezonancia

Az előző példában bemutatott jelenséget – amikor egy több szabadsági fokú lengőrendszer valamelyik elemének az amplitúdója nulla közelivé válik egy bizonyos gerjesztési frekvencián – *antirezonanciának* nevezik. Az antirezonancia jelenségének nemcsak dinamikus lengésfojtók tervezése során lehet jelentősége, hanem például rezgésmérések kiértékelése kapcsán is.

A sajátfrekvenciák kísérleti meghatározásának egyik módja a vizsgált rendszer elektromágneses gerjesztővel történő gerjesztése, és a kialakuló rezgési amplitúdók mérése. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor egy egy szabadsági fokú rendszert helyezünk a gerjesztőre!



3.13. ábra. Elektromágneses gerjesztővel vizsgált lengőrendszer, és annak mechanikai modellje.

A feladat a 3.13. ábrán látható, rugalmas rúdra szerelt m_v tömegű tömegpontból álló lengőrendszer sajátkőrfrekvenciájának meghatározása. Feltételezzük, hogy a csillapítás elhanyagolható. A rúd rugalmasságából számítható merevség k_v . Azonban ha a vizsgált mechanikai rendszert egy elektromágneses gerjesztőre szerelve vizsgáljuk, akkor magát a gerjesztőt is figyelembe kell vennünk a mechanikai modell felállításakor.

Tételezzük fel, hogy a gerjesztő egy m_g tömegű, k_g merevségű lengőrendszerrel modellezhető, melyre $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ gerjesztő erő hat! Ez azt jelenti, hogy a gerjesztő és a vizsgált egy szabadsági fokú rendszer együttese már *két szabadsági fokú* modellel írható le, a 3.13. ábrának megfelelően.

A feladat megoldása során az alábbi adatokat használjuk: $m_v = 1$ kg, $m_g = 0,5$ kg, $k_g = k_v = 200$ N/m. A gerjesztő erő amplitúdója $F_0 = 1$ N, az ω gerjesztési körfrekvenciát pedig változtatjuk a mérés során.

Az általános koordináták vektora a két tömegpont abszolút elmozdulását adja meg az egyensúlyi helyzettől mérve: x_g a gerjesztő, x_v pedig a vizsgált m tömegű tömegpont elmozdulása:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_g \\ x_v \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

A kinetikus energia kifejezése:

$$T = \frac{1}{2} m_g \dot{x}_g^2 + \frac{1}{2} m_v \dot{x}_v^2, \quad (3.58)$$

amiből az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_g & 0 \\ 0 & m_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ kg}. \quad (3.59)$$

A potenciális energia

$$U = \frac{1}{2}k_g x_g^2 + \frac{1}{2}k_v (x_v - x_g)^2, \quad (3.60)$$

aminek a kétszeres deriváltjaiból számítható az általános merevségi mátrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_g + k_v & -k_v \\ -k_v & k_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (3.61)$$

A gerjesztő erő teljesítménye:

$$P = F(t)\dot{x}_g, \quad (3.62)$$

ezért az általános erő vektora

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(\omega t). \quad (3.63)$$

A frekvenciaegyenlet

$$\det(-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = \omega_n^4 m_g m_v - \omega_n^2 (m_v k_g + m_g k_v + m_v k_v) + k_g k_v = 0, \quad (3.64)$$

amiből a két sajátkörfrekvencia

$$\omega_{n1} = 9,3643 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{és} \quad \omega_{n2} = 30,2045 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (3.65)$$

A vizsgálandó, egy szabadsági fokú lengőrendszer sajátkörfrekvenciája – amit ki szeretnénk mutatni a mérés során – az adatok alapján

$$\omega_{nv} = \sqrt{\frac{k_v}{m_v}} = 14,1421 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (3.66)$$

A következőkben arra a kérdésre keressük a választ, hogy hogyan ismerhetők fel ezek a körfrekvenciák a gerjesztett rendszer mért amplitúdói alapján.

Mivel a csillapítást elhanyagolhatónak tekintjük, a partikuláris megoldást

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{L} \cos(\omega t) \equiv \begin{bmatrix} L_g \\ L_v \end{bmatrix} \cos(\omega t) \quad (3.67)$$

alakban kereshetjük. (3.51) szerint az L_g és L_v együtthatókat – azaz a gerjesztő és a vizsgált test rezgésének amplitúdóját – a

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{L} = \mathbf{Q}_0 \quad (3.68)$$

egyenlet megoldásával számíthatjuk ki, ahol $\mathbf{Q}_0 = [F_0 \ 0]^T$. Az egyenletet kifejtve,

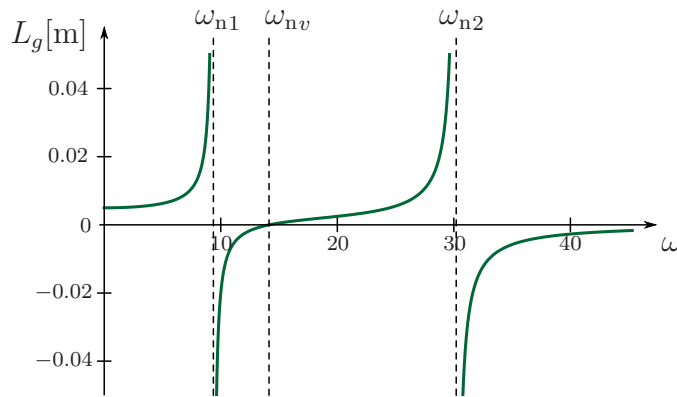
$$-L_v k_v + L_g (k_g + k_v - m_g \omega^2) = F_0, \quad (3.69)$$

$$L_g k_v + L_v (k_v - m_v \omega^2) = 0. \quad (3.70)$$

Ennek a megoldása

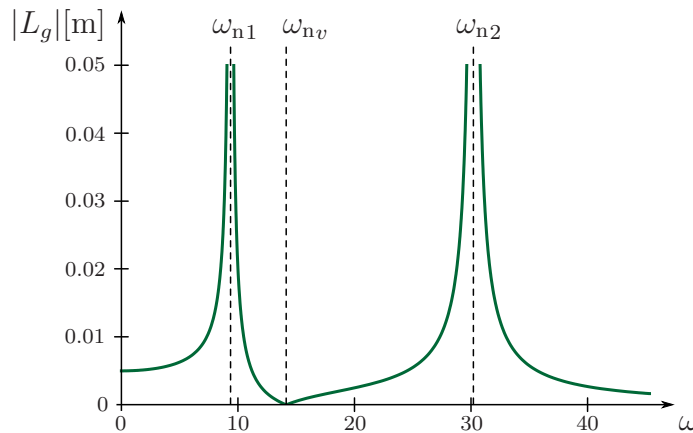
$$L_g = \frac{F_0 (k_v - m_v \omega^2)}{k_g k_v - (m_g k_v + m_v (k_g + k_v)) \omega^2 - m_g m_v \omega^4}, \quad (3.71)$$

$$L_v = \frac{F_0 k_v}{k_g k_v - (m_g k_v + m_v (k_g + k_v)) \omega^2 - m_g m_v \omega^4}. \quad (3.72)$$



3.14. ábra. A gerjesztő kitérése a gerjesztési körfrekvencia függvényében.

Ha a gerjesztő L_g kitérését a gerjesztési körfrekvencia függvényében ábrázoljuk, akkor a 3.14 grafikont kapjuk. Itt megfigyelhető, hogy a kitérés mindkét sajátkörfrekvencia közelében megnő, azaz rezonancia tapasztalható. Az L_g együttható mindkét sajátkörfrekvenciánál előjelet vált, ami azt jelenti, hogy a gerjesztéshez viszonyított fázisa ellentétesre változik. Az egy szabadsági fokú rendszer ω_{nv} sajátkörfrekvenciájánál az L_g együttható értéke nulla, azaz itt tapasztalható az antirezonancia. Mivel L_g előjele is megváltozik itt, a gerjesztéshez viszonyított fázis is megfordul. Ha az L_g együttható abszolút értékét ábrázoljuk, akkor a rezonanciagörbéhez hasonló ábrát kapunk (3.15. ábra).

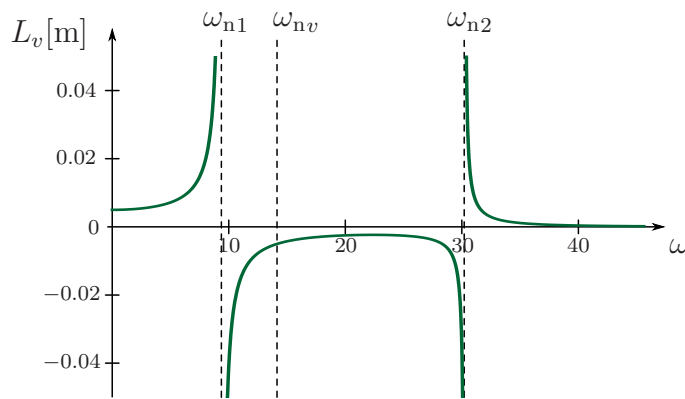


3.15. ábra. A gerjesztő kitérésének abszolút értéke a gerjesztési körfrekvencia függvényében.

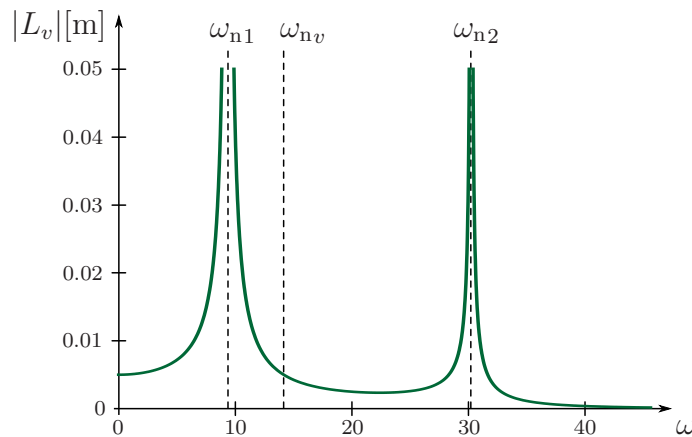
A gerjesztőre szerelt, vizsgált test mozgását jellemző L_v együtthatót és annak abszolút értékét a 3.16 és 3.17. ábrákon ábrázoltuk. Megfigyelhető, hogy a vizsgált test kitérése is megnő mindkét sajátkörfrekvenciánál, ahol a fázisszög is megfordul. Azonban ezeken az ábrákon nem jelenik meg az antirezonancia jelensége.

Ha tisztán a gerjesztőre tett egy szabadsági fokú rendszer vizsgálata a célunk, akkor célszerű a két együttható arányát vizsgálni:

$$\frac{L_v}{L_g} = \frac{k_v}{k_v - m_v \omega^2} = \frac{1}{1 - \lambda^2}, \quad (3.73)$$



3.16. ábra. A vizsgált rendszer L_v kitérése a gerjesztési körfrekvencia függvényében.



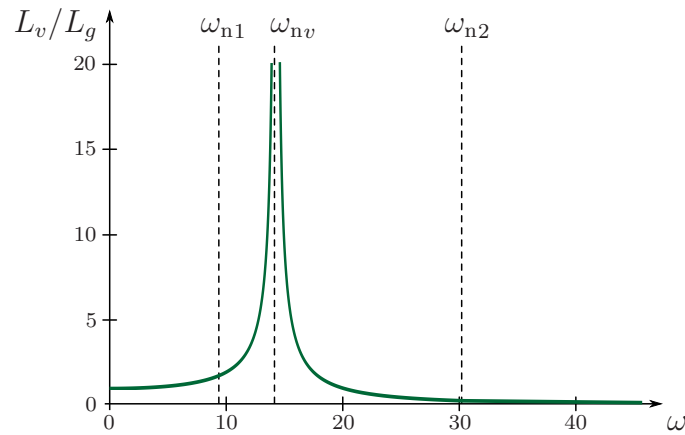
3.17. ábra. A vizsgált rendszer $|L_v|$ amplitúdója a gerjesztési körfrekvencia függvényében.

ahol $\lambda = \omega/\omega_{nv}$ a frekvenciahányados. Ez már megegyezik az egy szabadsági fokú, csillapítatlan rendszer nagyítási diagramjával, amint a 3.18. ábra mutatja.

Az eredmények szerint a gerjesztés során nem mindegy, hogy a gerjesztő *erőnek* (mint ebben a példában) vagy a gerjesztő *kitérésének* az amplitúdóját tartjuk-e állandó értéken a mérés során. Ez utóbbi ugyanis a korábban vizsgált útgerjesztés esetének felel meg, tehát ekkor közvetlenül kimérhető a gerjesztőre tett egy szabadsági fokú rendszer sajátkörfrekvenciája. Érdeemes megjegyezni, hogy az elektromágneses gerjesztők teljesítménye korlátos, ezért a sajátkörfrekvencia közelében nem képesek a rezonanciának megfelelő nagy kitérés megvalósítására.

3.4.4. A mátrix együtthatós differenciálegyenlet használata időfüggő kényszerek esetén

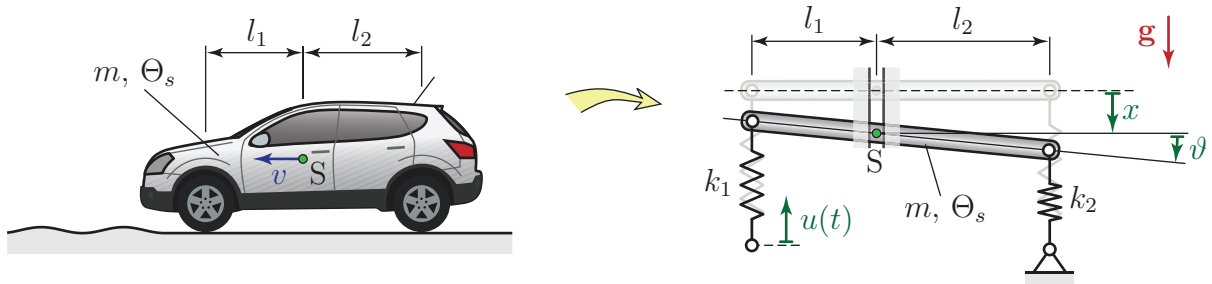
Ha időtől közvetlenül függő kényszerfeltételek korlátozzák a rendszer viselkedését, akkor a gerjesztésnek megfelelő általános erő komponensek nem számíthatók a mátrix együtthatós differenciálegyenlet 3.1. fejezetben részletezett felírási módszerével. Az ilyen jellegű feladatok vagy a másodfajú Lagrange-egyenlet által szolgáltatott nemlineáris egyenletek linearizá-



3.18. ábra. L_v/L_g a gerjesztési körfrekvencia függvényében.

lásával oldhatók meg, vagy a két módszer kombinációjával. Ebben a fejezetben ez utóbbi módszerre mutatunk példákat.

3.9. példa: Útgerjesztés rugón keresztül (fél járműmodell). A kéttengelyes járművek egyszerű – egy merev testből és két rugóból felépített – két szabadsági fokú mechanikai modellje látható a 3.19. ábrán.



3.19. ábra. Jármű útegyenetlenség általi gerjesztése és a megfelelő fél járműmodell. Az időfüggő kényszerfeltétel: $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$.

Az m tömegű és Θ_s tehetetlenségi nyomatékú jármű mozgásának leírására bevezetett általános koordináták $q_1 \equiv x$ és $q_2 \equiv \vartheta$. Ezek közül x a súlypont függőleges elmozdulása az egyensúlyi helyzettől lefelé, míg ϑ a karosszéria megdőlése az óramutató járásával egyező irányban mérve. Az egyszerűség kedvéért az útegyenetlenség általi gerjesztést csak az első keréken vesszük figyelembe, azaz a modellben úgy tekintjük, hogy a k_1 merevségű rugó alsó végpontja az előírt $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ függvény szerint mozog. A feladat a mozgásegyenletek levezetése.

A rendszer mozgási energiája

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\vartheta}^2,$$

amiből az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_s \end{bmatrix}.$$

Mivel most különböző jellegűek az általános koordináták, a tömegmátrix elemeinek is különbözőek lesznek a mértékegységei:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \text{kg} & \text{kg m} \\ \text{kg m} & \text{kg m}^2 \end{bmatrix}.$$

Amint a 3.1. példában már láttuk, a konstans tagok kiesnek a linearizált mozgásegyenletből, ha az egyensúlyi helyzettől mérjük a koordinátákat. Ebben a feladatban ez azt jelenti, hogy figyelmen kívül hagyhatjuk a nehézségi erő potenciális energiáját, és a rugók potenciális energiájának azt a részét, ami a jármű súlyának megfelelő előfeszítésből adódik. Egyensúlyban éppen az ezeknek a potenciális energiáknak megfelelő erők tartanak egyensúlyt, azaz eredőjük nulla.

Ennek megfelelően a potenciális energia közelítőleg (lásd 2.2.2. fejezet és 2.28. megjegyzés):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k_1(u + x - l_1\vartheta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x + l_2\vartheta)^2 \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 + \frac{1}{2}(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\vartheta^2 + (k_2l_2 - k_1l_1)x\vartheta + k_1ux - k_1l_1u\vartheta + \frac{1}{2}k_1u^2. \end{aligned}$$

A mozgásegyenlet felírásához szükség van a potenciális energia koordináták szerinti deriváltjaira. Az első deriváltak a $Q_j = -\partial U/\partial q_j$ összefüggés miatt az általános erő komponenseinek (-1)-szeresét adják:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= (k_1 + k_2)x + (k_2l_2 - k_1l_1)\vartheta + \boxed{k_1u}, \\ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} &= (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\vartheta + (k_2l_2 - k_1l_1)x \boxed{-k_1l_1u}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

A merevségi mátrix elemeit további differenciálásokkal kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} k_{11} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = k_1 + k_2, \\ k_{12} &\equiv k_{21} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \vartheta} = k_2l_2 - k_1l_1, \\ k_{22} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} = k_1l_1^2 + k_2l_2^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Ezeknek az elemeknek a mértékegysége is különböző:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \text{N/m} & \text{N} \\ \text{N} & \text{Nm} \end{bmatrix}.$$

A mátrix együtthatós mozgásegyenletben a \mathbf{Kq} szorzat jelenik meg. A szorzást elvégezve megkapjuk azokat az általános erő komponenseket, amelyeket figyelembe vehetünk a merevségi mátrix felírásával:

$$\mathbf{Kq} \equiv \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2l_2 - k_1l_1 \\ k_2l_2 - k_1l_1 & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)x + (k_2l_2 - k_1l_1)\vartheta \\ (k_2l_2 - k_1l_1)x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

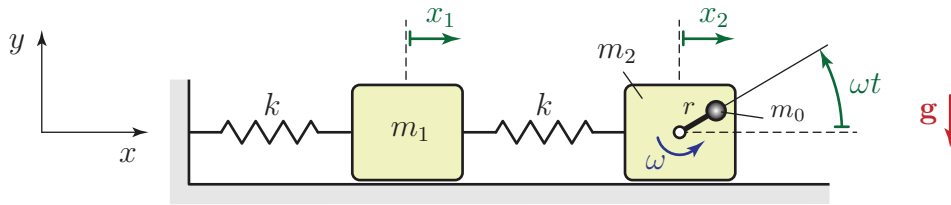
A (3.74) egyenletekkel összehasonlítva látszik, hogy az általános erő $u = u_0 \sin(\omega t)$ gerjesztést tartalmazó tagjai – melyeket bekereteztünk a (3.74) egyenletekben – hiányoznak a

(3.76) kifejezésből. Ezeket a hiányzó tagokat a mozgásegyenlet jobb oldalán tüntetjük fel, (-1)-gyel szorozva:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 u_0 \sin(\omega t) \\ k_1 l_1 u_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

A feladat megoldása egyszerűbb, ha az útgerjesztést helyettesítjük egy azzal azonos fázisban változó, $F_0 = k_1 u_0$ erőamplitúdójú, $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ gerjesztő erővel, mely közvetlenül a testre hat a rugó felső rögzítési pontjánál. Ennek az erőnek a nyomatóka jelenik meg (3.77) jobb oldalának második tagjában. ♠

3.10. példa: Kiegyensúlyozatlan forgórészrel gerjesztett 2 DoF lengőrendszer. A 3.20. ábrán látható lengőrendszer m_1 és m_2 tömegű hasábköböl, valamint azokat egymással és egy rögzített fallal összekötő k merevségű rugókból áll. Az m_2 tömegű testhez rögzített tengely körül m_0 tömegű kiegyensúlyozatlan forgórész forog ω szögsebességgel és r excentricitással. Az általános koordináták vektora $\mathbf{q} = [x_1 \ x_2]^T$, ahol az x_1 és x_2 elmozdulásokat a hasábok egyensúlyi helyzeteitől mérjük. A forgórész a t pillanatban ωt szöget zár be a vízszintessel, ami egy időtől függő kényszerfeltétel.



3.20. ábra. Kiegyensúlyozatlan forgórészrel gerjesztett tömeg-rugó lánc.

A rendszer kinetikus energiája

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_0 v_0^2.$$

Az m_0 tömegű test v_0 sebességének kiszámításához írjuk fel a test helyvektorát:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_2 + r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Ebből differenciálással határozható meg a \mathbf{v}_0 sebességvektor és annak négyzete:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix},$$

$$v_0^2 = \dot{x}_2^2 + r^2 \omega^2 - 2r\omega \dot{x}_2 \sin(\omega t).$$

Tehát a kinetikus energia az általános koordinátákkal felírva

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_0 r^2 \omega^2 - m_0 r \omega \dot{x}_2 \sin(\omega t).$$

A potenciális energia kifejezésében egyaránt figyelembe vesszük a rugókban és a nehézségi erőterben felhalmozódó energiát:

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + m_0 g r \sin(\omega t).$$

Csillapítás vagy nem potenciális erő nem szerepel a feladatban (lásd a 2.36. megjegyzést), ezért a másodfajú Lagrange-egyenlet(ek)et az alábbi formában írhatjuk fel:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Az alábbiakban összehasonlítjuk a fenti egyenletek és a mátrix együtthetős egyenlet levezetésének lépéseit, az egymásnak megfelelő kifejezéseket egymás mellé írva.

Másodfajú Lagrange-egyenlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \ddot{x}_1 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= (m_0 + m_2) \dot{x}_2 - m_0 r \omega \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} &= (m_0 + m_2) \ddot{x}_2 - m_0 r \omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \rightarrow$$

Mátrix együtthetős egyenlet

$$\begin{aligned} m_{12} &\equiv \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} = 0 \\ m_{11} &\equiv \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} = m_1 \end{aligned}$$

$$m_{22} \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} = m_0 + m_2$$

A mátrix együtthetős egyenletből kiesik a gerjesztést tartalmazó tag.

Az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_0 + m_2 \end{bmatrix}.$$

Ezeknek a tagoknak nincs megfelelőjük a mátrix együtthetős egyenletben, mert időfüggő kényszerek nélkül mindig vagy nullát, vagy nemlineáris kifejezést adnak eredményül.

A potenciális energia deriválása során a nehézségi erőből származó tag mind a Lagrange-egyenletből, mind a mátrix együtthetős egyenletből kiesik, hiszen nem függ a koordinátáktól:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2kx_1 - kx_2 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= k(x_2 - x_1) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} k_{11} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2k \\ k_{22} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = k \\ k_{12} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -k \end{aligned}$$

Ebből az általános merevségi mátrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}.$$

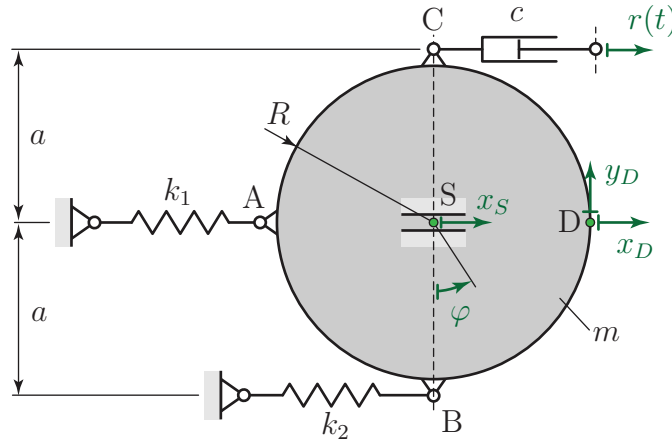
A levezetés alapján a mátrix együtthetős differenciálegyenlet

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_0 + m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_0 r \omega^2 \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

A jobb oldalon látható általános erő vektort a másodfajú Lagrange-egyenletből kapott, bekereztett tagból számítottuk. Az egyenlet többi tagja ugyanolyan alakban adódik a két módszerrel. Természetesen a tömegmátrixot az általános gyorsulás vektorral, a merevségi mátrixot pedig az általános koordináták vektorával megszorozva lehet összehasonlítani az egymásnak megfelelő tagokat.

A feladat megoldása leegyszerűsíthető, ha a kiegyensúlyozatlan forgórészt egy $F_0 = m_0 r \omega^2$ amplitúdójú gerjesztő erővel helyettesítjük, ami az m_0 tömegű test felé mutat. Ezen kívül az m_0 tömeget is hozzá kell adni a tömegmátrix megfelelő eleméhez. ♠

3.11. példa: Útgerjesztés lengéscsillapítón keresztül [12]. A 3.21. ábrán látható, lengéscsillapítón keresztül gerjesztett lengőrendszer m tömegű, R sugarú korongja el tud fordulni az S súlypontja körül, és maga az S pont is elmozdulhat vízszintes irányban. A lengéscsillapító jobb oldali végpontjának elmozdulását az $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ függvény adja meg. Írjuk fel a mozgásegyenleteket a súlypont x_S elmozdulását és a korong φ elfordulását tartalmazó $\mathbf{q} = [x_S \ \varphi]^T$ általános koordináta vektor segítségével!



3.21. ábra. Lengéscsillapítón keresztül gerjesztett 2DoF lengőrendszer. Az időfüggő kényszerfeltétel: $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$.

Mivel a szögsebesség $\dot{\omega} = \dot{\varphi}$, a mozgási energia azonnal felírható az általános sebességek kifejezéseként:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2,$$

ahol $\Theta_s = 1/2 m R^2$ az S súlyponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték. Ez alapján az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_s \end{bmatrix}.$$

A potenciális energia kifejezése:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_A^2 + \frac{1}{2} k_2 x_B^2.$$

Kihasználva, hogy lineáris közelítésben $x_A \approx x_S$ és $x_B \approx x_S + a\varphi$, a potenciális energia az általános koordinátákkal is felírható:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_S^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_S + a\varphi)^2.$$

Az x_S és φ szerinti kétszeres deriváltakból számítható a merevségi mátrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a \\ k_2 a & k_2 a^2 \end{bmatrix}.$$

A Rayleigh-féle disszipatív potenciál

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c(v_C - \dot{r}(t))^2,$$

azaz $v_C \approx \dot{x}_S - a\dot{\varphi}$ és $\dot{r}(t) = r_0\omega \cos(\omega t)$ miatt

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c(\dot{x}_S - a\dot{\varphi} - r_0\omega \cos(\omega t))^2.$$

A disszipatív potenciál első deriváltjai:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_S} &= c(\dot{x}_S - a\dot{\varphi} - r_0\omega \cos(\omega t)) \quad \text{és} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} &= -ca(\dot{x}_S - a\dot{\varphi} - r_0\omega \cos(\omega t)). \end{aligned}$$

Innen a csillapítási mátrix elemei akár \dot{x}_S és $\dot{\varphi}$ együtthatóiból is számíthatók:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -ca \\ -ca & ca^2 \end{bmatrix}.$$

Mivel a disszipatív potenciál első deriváltjaiban szereplő, gerjesztéssel kapcsolatos tagok nem jelennek meg a csillapítási mátrixban, azokat a mozgásegyenlet jobb oldalán – ellentétes előjellel – figyelembe kell venni:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \Theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -ca \\ -ca & ca^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 a \\ k_2 a & k_2 a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kr_0\omega \cos(\omega t) \\ -kar_0\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \spadesuit$$

3.12. példa: Oldjuk meg az előző feladatot a $\mathbf{q} = [x_D \quad y_D]^T$ koordinátaválasztással is!

A mozgási energia természetesen ugyanúgy írható fel, mint az előző példában:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\tilde{\omega}^2.$$

A mozgásegyenletek levezetéséhez az általános koordináták segítségével kell kifejezni a kinetikus energiát. Ebben az esetben $\Theta_s = 1/2 mR^2$, $\tilde{\omega} \equiv \dot{\varphi} \approx \dot{y}_D/R$ és $\dot{x}_S \approx \dot{x}_D$ felhasználásával

$$T \approx \frac{1}{2}m\dot{x}_D^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\frac{\dot{y}_D^2}{R^2} = \frac{1}{2}m\dot{x}_D^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{y}_D^2,$$

tehát az általános tömegmátrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}.$$

A potenciális energia jó közelítéssel

$$U = \frac{1}{2}k_1x_A^2 + \frac{1}{2}k_2x_B^2$$

alakban írható fel. $x_A \approx x_D$ és $x_B \approx x_D + a\varphi \approx x_D + ay/R$ felhasználásával, lineáris közelítésben

$$U \approx \frac{1}{2}k_1x_D^2 + \frac{1}{2}k_2 \left(x_D + a\frac{y_D}{R} \right)^2.$$

Innen a merevségi mátrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2\frac{a}{R} \\ k_2\frac{a}{R} & k_2\frac{a^2}{R^2} \end{bmatrix}.$$

A disszipatív potenciál $v_C \approx \dot{x}_D - ay_D/R$ és $\dot{r}(t) = r_0\omega \cos(\omega t)$ felhasználásával

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c(v_C - \dot{r}(t))^2 = \frac{1}{2}c \left(\dot{x}_D - a\frac{\dot{y}_D}{R} - r_0\omega \cos(\omega t) \right)^2.$$

A disszipatív potenciál első deriváltjai, melyek a Lagrange-egyenlet megfelelő tagjainak felelnek meg:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_D} &= c \left(\dot{x}_D - a\frac{\dot{y}_D}{R} - \boxed{r_0\omega \cos(\omega t)} \right) \quad \text{és} \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}_D} &= c \left(\dot{x}_D - a\frac{\dot{y}_D}{R} - \boxed{r_0\omega \cos(\omega t)} \right) \left(-\frac{a}{R} \right). \end{aligned}$$

Újabb differenciálásokkal számítható ki a csillapítási mátrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c\frac{a}{R} \\ -c\frac{a}{R} & c\frac{a^2}{R^2} \end{bmatrix},$$

ami most sem tartalmazza a gerjesztésnek megfelelő, a fenti egyenletekben bekeretezett tagokat. Ezeket ismét a mozgásegyenlet jobb oldalára célszerű rendezni:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_D \\ \ddot{y}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c\frac{a}{R} \\ -c\frac{a}{R} & c\frac{a^2}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2\frac{a}{R} \\ k_2\frac{a}{R} & k_2\frac{a^2}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr_0\omega \cos(\omega t) \\ -c\frac{a}{R}r_0\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}.$$

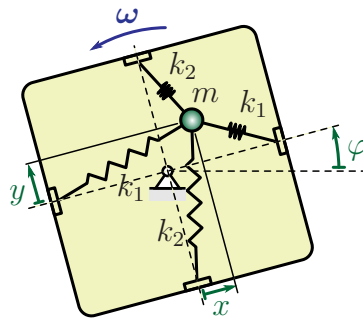
A példa megoldását egyszerűsíti, ha úgy tekintjük, mintha egy $F(t) = cr_0\omega \cos(\omega t)$ alakú erőgerjesztés hatna a C pontban, és rögzített lenne a lengéscsillapító másik végpontja. Itt ügyelni kell arra, hogy ennek a helyettesítő erőnek a függvényalakját az $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ útgerjesztés idő szerinti deriváltjából határozzuk meg. ♠

3.4.5. Giroszkópikus mátrix

Az időfüggő kényszerek nem minden esetben vezetnek ún. *nem autonóm* mozgásegyenletre, azaz olyanra, amelyben közvetlenül megjelenik változóként az idő. Egy ilyen esetre mutat példát a 3.22. ábra, melyen egy állandó ω szögsebességgel forgó merev lapra szerelt lengőrendszer látható. A lengőrendszer egy m tömegű pontszerű testből és két-két darab, k_1 illetve k_2 merevségű rugóból áll. A forgás szögsebessége adott, tehát a szöghelyzet kifejezhető $\varphi = \omega t$ alakban, ami egy időfüggő kényszerfeltétel.

A $q_1 \equiv x$ és $q_2 \equiv y$ általános koordináták a tömegpont helyét adják meg a forgó laphoz képest, tehát ezek *relatív koordináták*. Az xy koordináta-rendszert a merev laphoz rögzítettük, ami ω szögsebességgel forog. A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.79)$$



3.22. ábra. Forgó laphoz rögzített két szabadsági fokú lengőrendszer. A tömegpont elmozdulását felnagyítva ábrázoltuk, a számítások csak kis kitérések esetén érvényesek.

ahol az anyagi pont sebessége a relatív és a szállító sebesség összegéből számítható:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

amiből

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2(x^2 + y^2) - 2\dot{x}y\omega + 2\dot{y}x\omega). \quad (3.81)$$

Lineáris közelítésben – az x és y koordinátákat kicsinek tekintve – a k_1 merevségű rugók deformációja x -szel, a k_2 merevségű rugók deformációja pedig y -nal arányos. Ennek figyelembevételével felírható a potenciális energia:

$$U = \frac{1}{2} (2k_1x^2 + 2k_2y^2). \quad (3.82)$$

A Lagrange-egyenletben szereplő deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} - m\omega y, & \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y} + m\omega x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} - m\omega \dot{y}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\ddot{y} + m\omega \dot{x}, \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= m\omega^2 x + m\omega \dot{y}, & \frac{\partial T}{\partial y} &= m\omega^2 y - m\omega \dot{x}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= 2k_1x, & \frac{\partial U}{\partial y} &= 2k_2y. \end{aligned}$$

A fenti eredmények szerint a mozgásegyenletek

$$m\ddot{x} + (2k_1 - m\omega^2)x - 2m\omega\dot{y} = 0, \quad (3.83)$$

$$m\ddot{y} + (2k_2 - m\omega^2)y + 2m\omega\dot{x} = 0. \quad (3.84)$$

Mátrix együtthatókkal felírva:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2m\omega \\ 2m\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_1 - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

Az $[\dot{x} \ \dot{y}]^T$ vektor együtthatómátrixa antiszimmetrikus, a főátlóban nulla elemek szerepelnek. Ez nem a korábban megismert \mathbf{C} csillapítási mátrix, hiszen az szimmetrikus – és a modellben nem is szerepel csillapító elem. Ezt a

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -2m\omega \\ 2m\omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

mátrixot *giroszkópikus mátrixnak* nevezik. Azért jelent meg a mozgásegyenletben, mert az x és y koordinátákat forgó rendszerben értelmezzük: így vehető figyelembe a testre ható Coriolis-erő. A Coriolis-erőről ismert, hogy teljesítménye nulla, nem végez munkát, tehát nem járulhat hozzá a disszipációhoz. Ezzel összhangban, a giroszkópikus mátrixból számítható $\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}$ giroszkópikus erő teljesítménye is nulla:

$$P_g = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -2m\omega\dot{y} & 2m\omega\dot{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 2m\omega(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}) = 0. \quad (3.87)$$

A szállító (centrifugális) erőnek megfelelő $m\omega^2x$ és $m\omega^2y$ tagok a merevségi mátrixon keresztül jelentek meg az egyenletben.

3.45. megjegyzés: A levezetésből látható, hogy a giroszkópikus mátrix elemei a kinetikus energia deriválásával határozhatók meg, a másodfajú Lagrange-egyenlet alapján. Azonban a giroszkópikus mátrix is kifejezhető a kinetikus energia második deriváltjaival, a tömegmátrixhoz hasonlóan. A 3.37. megjegyzésben már volt arról szó, hogy a kinetikus energia sorfejtésében a másodfokú tagokat kell figyelembe venni. Ha T másodfokú a sebességekben, akkor a másodfokú tagok együtthatóiból – a sebességek szerinti második deriváltakból – a tömegmátrix elemeit számíthatjuk ki. Azonban a vizsgált feladatban sebességben elsőfokú tagok is megjelentek a mozgási energia kifejezésében, ezért a másodfokig történő sorfejtés során figyelembe kell venni a (3.4) egyenletnek megfelelő

$$\frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} q_i \dot{q}_j + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} \dot{q}_j q_i \quad (3.88)$$

tagokat is. Mivel a Young-tétel miatt a deriválások sorrendje felcserélhető, duplán jelenik meg minden tag a kinetikus energia fenti sorfejtésében – ezt kompenzálja az $1/2$ -es szorzó. Például $i = 1$ és $j = 2$ mellett

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \dot{y}} x \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial x} \dot{y} x = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \dot{y}} x \dot{y}. \quad (3.89)$$

Vezessük be a

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.90)$$

jelölést! Ezzel a kinetikus energia koordinátáktól is függő része

$$T_g = T_{11}x\dot{x} + T_{12}x\dot{y} + T_{21}y\dot{x} + T_{22}y\dot{y}. \quad (3.91)$$

Végrehajtva a kijelölt deriválásokat,

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \dot{x}} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial x} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = 0 \\ T_{12} &= \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \dot{y}} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial x} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = m\omega \\ T_{21} &= \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial \dot{x}} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial y} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = -m\omega \\ T_{22} &= \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial \dot{y}} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial y} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} = 0. \end{aligned}$$

A fentieket behelyettesítve a Lagrange-egyenletbe, kifejezhetők a mozgásegyenlet giroszkópikus mátrixhoz köthető tagjai:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_g}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T_g}{\partial x} &= T_{11}\dot{x} + T_{21}\dot{y} - (T_{11}\dot{x} + T_{12}\dot{y}) = (T_{21} - T_{12})\dot{y} \equiv g_{12}\dot{y} = -2m\omega\dot{y}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_g}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T_g}{\partial y} &= T_{12}\dot{x} + T_{22}\dot{y} - (T_{21}\dot{x} + T_{22}\dot{y}) = (T_{12} - T_{21})\dot{x} \equiv g_{21}\dot{x} = 2m\omega\dot{x}. \end{aligned}$$

Következésképpen a giroszkópikus mátrix elemei az alábbi formulával számíthatók:

$$g_{ij} = T_{ji} - T_{ij} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0} - \left. \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \right|_{\mathbf{q}=0, \dot{\mathbf{q}}=0}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.92)$$

♣

3.5. Rudak hajlítólengései

Az 1.3.1. fejezetben már láttuk, hogy egy szabadsági fokú, rugalmas rudat tartalmazó lengőrendszerek egyenértékű rugómerevsége hogyan számolható ki szilárdságtani megfontolások alapján. Ebben a fejezetben több szabadsági fokú rendszerekre általánosítjuk az ott leírt módszert. Olyan szerkezeteket vizsgálunk, melyek egy valamilyen módon megtámasztott, elhanyagolható tömegű rugalmas rúdból, és arra ráékeltestestekből állnak. A rendszer csillapítatlan rezgéseit leíró linearizált mozgásegyenlet

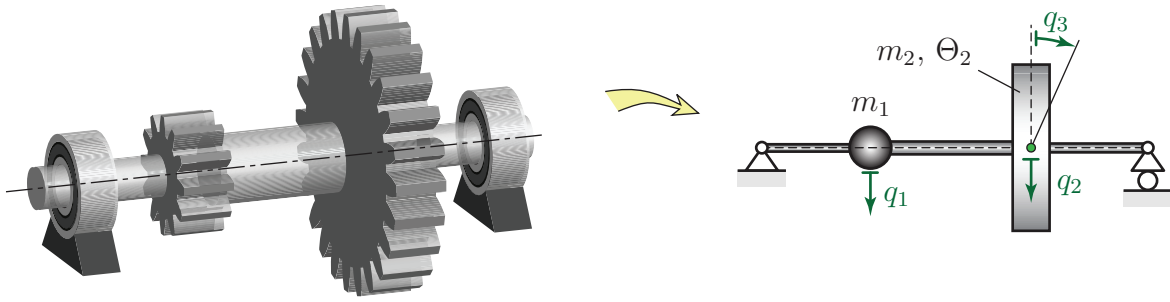
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

alakban írható fel.

Ha a rúdhoz rögzített merev testek tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolható, akkor pontszerűnek is tekinthetjük azokat. Általános koordinátáknak a testek súlypontjainak elmozduláskoordinátáit választjuk. Ha a testek rúdra merőleges tengely körüli elfordulását is figyelembe akarjuk venni, akkor azok elfordulási szögeit is hozzá kell venni az általános koordináták vektorához. Ezzel a koordinátaválasztással az egyes testek mozgási energiája külön-külön figyelembe vehető. Az általános esetben egy merev test mozgási energiája a tehetetlenségi nyomatéki mátrix összes elemétől függ:

$$T = \frac{1}{2} \left(\Theta_x \omega_x^2 + \Theta_y \omega_y^2 + \Theta_z \omega_z^2 - 2D_{xy} \omega_x \omega_y - 2D_{xz} \omega_x \omega_z - 2D_{yz} \omega_y \omega_z \right). \quad (3.93)$$

A tömegmátrix felírásához a szögsebesség ω_x , ω_y és ω_z komponenseit ki kell fejezni az általános koordinátákkal.



3.23. ábra. Rugalmas tengelyre ékelt fogaskerek és a megfelelő három szabadsági fokú mechanikai modell.

Ha a test síkmozgást végez, és az elforduláshoz tartozó tengely a test egyik tehetetlenségi főtengelye – mint például a 3.24. ábrán látható fogaskerék q_3 koordinátája esetében –, akkor az egyes általános sebességek külön tagokban szerepelnek a kinetikus energia kifejezésében, azaz

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\dot{q}_3^2 \dots \quad (3.94)$$

Ebben a legegyszerűbb esetben tehát a tömegmátrix diagonális:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \Theta_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

A merevségi mátrix a 3.1. fejezet alapján az U potenciális energiából számítható, melyet az általános koordináták segítségével kell kifejezni. Jelen esetben a potenciális energia megegyezik a hajlított rúd *alakváltozási energiájával*. Szilárdságtanból ismert [14], hogy az M_h hajlítónyomatéki függvénnyel

$$U = \frac{1}{2IE} \int_{(l)} M_h^2(x, F_i, M_j) dx$$

alakban, tehát végeredményben az $F_i, M_j, i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, R$ terhelések függvényeként fejezhető ki az alakváltozási energia, ahol x a rúd hossza mentén felvett koordináta, I a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomaték, és E a rugalmassági modulusz. Bár a szilárdságtan munkatételei (a Betti- és a Castigliano-tétel) segítségével kiszámítható az U alakváltozási energiából egy keresztmetszet q_i elmozdulása vagy elfordulása, a fordított feladat megoldása nagyon nehézkes.

Ez az oka annak, hogy egy másik megközelítést alkalmazunk a rúd rugalmas tulajdonságainak a figyelembevételére. Az egy szabadsági fokú lengőrendszerek vizsgálata kapcsán már láttuk (lásd 1.3.1. fejezet), hogy a rugalmas rudak rugóállandója könnyebben számítható, mint az egyenértékű rugómerevségük. Több szabadsági fokú esetben a $\mathbf{W} \equiv \mathbf{K}^{-1}$ *rugóállandó mátrixot* tudjuk egyszerűen kiszámítani. A \mathbf{W} rugóállandó mátrix szimmetrikus, hiszen a szimmetrikus \mathbf{K} merevségi mátrix inverze. Ez az eredmény az ún. *Maxwell-féle felcserélhetőségi tételnek* [14] felel meg.

Ha a lengőrendszer valamilyen \mathbf{Q} -állandó általános erő hatása alatt a \mathbf{q}_e koordinátákkal megadott *egyensúlyi helyzetben* van, akkor $\dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}$ és $\ddot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}$ miatt

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_e = \mathbf{Q}, \quad \text{tehát}$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q} \equiv \mathbf{W}\mathbf{Q}. \quad (3.95)$$

Az általános erő komponenseinek

$$Q_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = j, \\ 0 & \text{ha } k \neq j \end{cases}$$

alakban történő megválasztásával a \mathbf{q}_e vektor komponenseiből – tehát az akár numerikusan is meghatározható elmozdulásokból – könnyen kiszámíthatók a \mathbf{W} rugóállandó mátrix elemei.

3.46. megjegyzés: A fenti gondolatmenet szerint a potenciális energia

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}_e^T \mathbf{K} \mathbf{q}_e \quad (3.96)$$

kifejezését (lásd (3.6)) az alábbi alakokban is felírhatjuk:

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{q}_e^T \mathbf{Q} = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^T \mathbf{Q}. \quad (3.97)$$

Kihasználva, hogy a szimmetrikus mátrixok inverze is szimmetrikus, azaz $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$, a rugóállandó mátrix elemei kifejezhetők

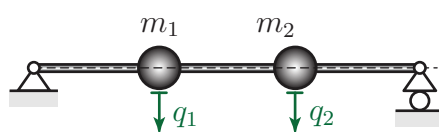
$$w_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j}, \quad (3.98)$$

alakban, a merevségi mátrix

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.99)$$

kifejezéséhez hasonlóan. ♣

Nézzük meg a rugóállandó mátrix kiszámítását egy egyszerű példán keresztül! A 3.24. ábrán látható lengőrendszerben két pontszerű test van egy rugalmas rúdra rögzítve. Ha állandó



3.24. ábra. Rugalmas rúdra rögzített pontszerű testek – két szabadsági fokú mechanikai modell.

nagyságú $\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2]^T$ erő hat, akkor (3.95) alapján a két test egyensúlyi elmozdulása az erőmentes helyzettől mérve

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

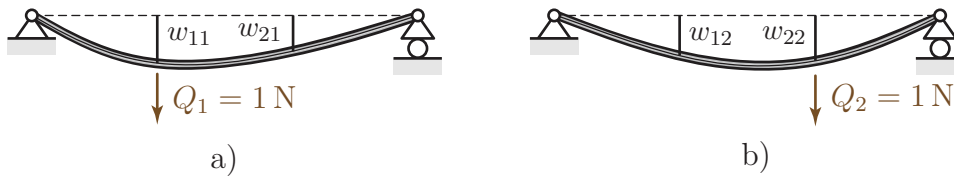
tehát kifejtve

$$q_1 = w_{11}Q_1 + w_{12}Q_2 \quad (3.101)$$

$$q_2 = w_{21}Q_1 + w_{22}Q_2. \quad (3.102)$$

Ha például w_{11} -et akarjuk meghatározni, akkor $Q_1 = 1$ és $Q_2 = 0$ választással q_1 számértéke éppen megadja w_{11} értékét. Ugyanilyen erőkomponensek mellett q_2 éppen w_{21} számértékével egyezik meg. $Q_1 = 0$ és $Q_2 = 1$ választással w_{12} és w_{22} értéke számítható ki. Általánosan, w_{ij} számértéke q_i számértékével egyezik meg ha $Q_j = 1$, a többi általános erő komponens pedig nulla.

Az egyes erők vagy nyomatékok által okozott elmozdulásokat a szilárdságtan munkatételei (pl. a Castigliano-tétel), vagy a rugalmas szál differenciálegyenlete segítségével határozhatjuk meg. Egyszerű esetekben javasolható a járulékképletek használata is. Ha bonyolult geometriájú a vizsgált szerkezet, akkor numerikus módszereket – például a *végeselem módszert* is lehet alkalmazni az elmozdulások számítására.



3.25. ábra. A rugóállandó mátrix elemeinek meghatározása megfelelő támadáspontú és irányú, egységnyi nagyságú erők alkalmazásával. a) w_{11} és w_{21} , b) w_{12} és w_{22} .

A rugóállandó mátrix ismeretében elvileg számítható a merevségi mátrix, és így alkalmazhatóak az eddig említett megoldási módszerek. A mátrixinvertálás művelete azonban nagyon számításigényes, különösen nagyméretű mátrixok esetében. Ez a probléma elkerülhető, ha az

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

mozgásegyenletben szereplő tagokat beszorozzuk balról a \mathbf{W} rugóállandó mátrixszal. Mivel $\mathbf{W}\mathbf{K} = \mathbf{I}$, ezért

$$\mathbf{W}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{W}\mathbf{Q}.$$

Ennek az egyenletnek nyilván ugyanaz a megoldása, mint az eredeti mozgásegyenletnek. Például $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ mellett kiszámíthatók a rendszer sajátkőrfrekvenciái és lengésképei. A megoldást $\mathbf{q} = \mathbf{A}e^{\pm i\omega_n t}$ alakban keresve, és azt visszahelyettesítve a fenti egyenletbe, a frekvenciaegyenletet

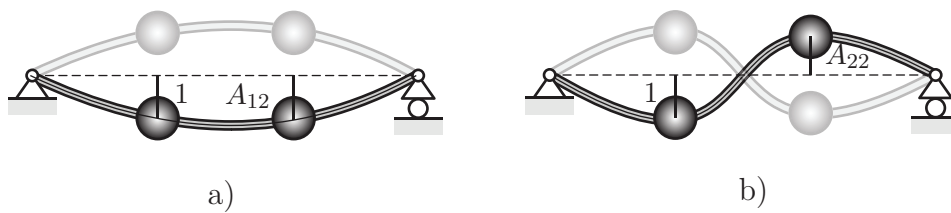
$$\det(-\omega_n^2 \mathbf{W}\mathbf{M} + \mathbf{I}) = 0$$

alakban kapjuk, amiből számíthatók az $\omega_{n1}, \omega_{n2}, \dots$ sajátkőrfrekvenciák. A lengésképek a

$$(-\omega_{n_j}^2 \mathbf{W}\mathbf{M} + \mathbf{I}) \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$$

egyenlet alapján határozhatók meg. A lengésképek ábrázolása ebben az esetben folytonos vonalakkal történik – a valóságos lengésképeket jelleghelyesen visszaadva –, ahogy a 3.26. ábra is mutatja.

A mozgásegyenlet átírásához csak mátrixszorzást kellett elvégezni, ami jelentősen egyszerűbb és pontosabb, mint a mátrix invertálás. Arra azonban ügyelni kell, hogy ugyan egy szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus, de két szimmetrikus mátrix szorzata már nem biztos, hogy az. Ennek megfelelően, az általános esetben a $\mathbf{W}\mathbf{M}$ mátrix sem szimmetrikus.

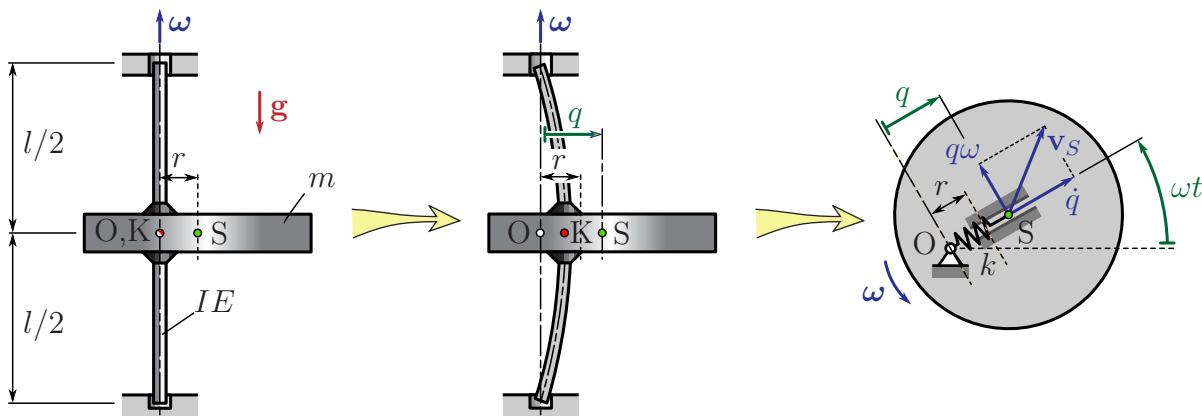


3.26. ábra. Hajlítólengést végző rúd lengésképeinek ábrázolása.

3.6. Tengelyek kritikus fordulatszám

Egy rugalmas tengelyre szerelt, kiegyensúlyozatlan forgórészre a szögsebesség négyzetével és az r excentricitással arányos szállító (centrifugális) erő hat. Az ehhez köthető gerjesztő hatás káros rezgésekhez vezethet. Az alábbiakban két modell alapján is megvizsgáljuk, hogy milyen rezgések jöhetnek létre egy kiegyensúlyozatlan forgórész mozgása során.

3.6.1. Egy szabadsági fokú modell



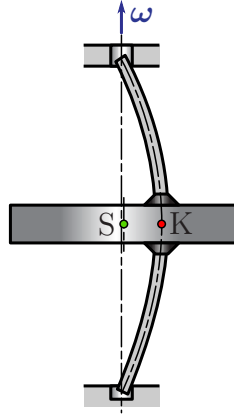
3.27. ábra. A statikusan kiegyensúlyozatlan forgórész egyszerű modellje.

A 3.27. ábrán vázolt forgórész dinamikusan kiegyensúlyozott, de statikusan kiegyensúlyozatlan, azaz az S súlypontja r távolságra van a tengelytől, melynek K pontjában van felékelve a tárcsa. A tárcsa súlypontjának mozgását a tengely elméleti vonalán található O ponttól felvett q általános koordinátával írjuk le. Álló helyzetben a tengely egyenes, ezért az O és K pontok egybeesnek, az általános koordináta értéke $q = r$. A tengely forgása egy időfüggő kényszerfeltételt jelent, és q a tengellyel együtt forgó rendszerben értelmezett relatív koordináta, a 3.4.5. fejezetben leírtakhoz hasonlóan.

Kísérleti tapasztalatok szerint egy bizonyos ω_{kr} kritikus szögsebességnél kisebb szögsebességek mellett a tengely meghajlik, K pontja eltávolodik az O ponttól, a súlypont kitérése pedig $q > r$ lesz.

3.47. megjegyzés: A kritikus fordulatszám feletti szögsebességnél tapasztalható a tengely „önkiegyensúlyozása”. Ez azt jelenti, hogy az S súlypont átkerül a tengely másik oldalára, az O és K pontok közé, a 3.28. ábrának megfelelően. Ekkor a q koordináta negatív lesz:

$q < 0$, és $|q| < r$ is teljesül, azaz a súlypont közelebb kerül a tengely elméleti vonalához, mint álló helyzetben. Mint látni fogjuk, a vizsgált modell szerint ez a megoldás instabil,



3.28. ábra. Kiegyensúlyozatlan forgórész önkiegyensúlyozása.

viszont megmutatható, hogy a kísérleti tapasztalatokat egy bonyolultabb, két szabadsági fokú mechanikai modell már visszaadja (lásd 3.6.2 fejezet). ♣

Ha a tengely l hosszúságú, IE hajlítómerevségű, és a forgórész mindkét csapágytól $l/2$ távolságra van felékelve, akkor az 1.3.1. fejezetben leírt módszerekkel meghatározható az egyenértékű lengőrendszer merevsége:

$$k = \frac{48IE}{l^3}. \quad (3.103)$$

Figyelembe véve, hogy a tengely K pontjának elmozdulása $q - r$, felírható a rugalmas tengelyben tárolt potenciális energia:

$$U = \frac{1}{2}k(q - r)^2, \quad (3.104)$$

a forgórész kinetikus energiája pedig

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\omega^2. \quad (3.105)$$

A súlypont sebessége a 3.27. ábra szerint

$$v_S^2 = \dot{q}^2 + q^2\omega^2, \quad (3.106)$$

ezért a mozgási energia⁶

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + q^2\omega^2) + \frac{1}{2}\Theta_s\omega^2. \quad (3.107)$$

A mozgásegyenletet a Lagrange-egyenlet alapján írjuk fel:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad (3.108)$$

⁶Látható, hogy a mozgási energiának van a koordinátában másodfokú tagja is. Több szabadsági fokú rendszerekben ebben az esetben a (3.5) képletnek megfelelő tagokkal kellene kiegészíteni a kinetikus energia sorfejtését. Eredményül egy olyan mátrixot kapnánk, ami összevonható a merevségi mátrixszal.

ahol

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad (3.109)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}, \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m\omega^2, \quad (3.111)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = k(q - r). \quad (3.112)$$

Ezeket behelyettesítve a Lagrange-egyenletbe, az alábbi mozgásegyenletet kapjuk:

$$m\ddot{q} - m\omega^2 q + kq = kr. \quad (3.113)$$

Az egyenlet bal oldalán látható $-m\omega^2 q$ tag a szállító (centrifugális) erőnek feleltethető meg. A mozgásegyenlet sztenderd alakban

$$\ddot{q} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) q = \frac{k}{m} r \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + (\omega_{n0}^2 - \omega^2) q = \omega_{n0}^2 r, \quad (3.114)$$

ahol $\omega_{n0} = \sqrt{k/m}$ az álló tengely hajlítólengéseinek a körfrekvenciája.

A mozgásegyenlet megoldását $q(t) = q_h(t) + q_p(t)$ alakban keressük, tehát úgy tekintjük, hogy a tengely a partikuláris megoldásnak megfelelő pozíció körül leng a homogén megoldás által megadott módon.

Ha a q koordináta együtthatója pozitív a mozgásegyenletben, azaz $\omega_{n0}^2 - \omega^2 > 0$, akkor a homogén egyenlet megoldása

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) \quad (3.115)$$

alakban írható fel, ahol $\omega_n = \sqrt{\omega_{n0}^2 - \omega^2}$ a lengés – fordulatszámától függő – körfrekvenciája.

A partikuláris megoldást konstansnak tételezzük fel, tehát $q = q_p$ -t helyettesítve a mozgásegyenletbe:

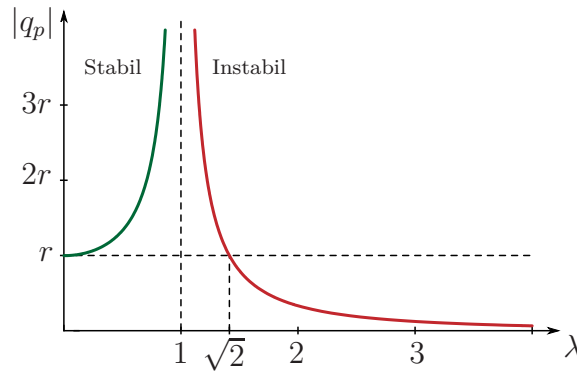
$$(\omega_{n0}^2 - \omega^2) q_p = \omega_{n0}^2 r. \quad (3.116)$$

Bevezetve a $\lambda = \omega/\omega_{n0}$ frekvenciahányadost:

$$q_p = \frac{\omega_{n0}^2 r}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} = \frac{r}{1 - \lambda^2}. \quad (3.117)$$

A q_p kitérés az $\omega = \omega_{n0}$ szögsebesség mellett a végtelenhez tart, tehát a gyakorlatban el kell kerülni ezt az ún. *kritikus fordulatszámot*. Noha a modell szerint $\lambda > \sqrt{2}$ – azaz $\omega > \sqrt{2}\omega_{n0}$ – mellett a $|q_p|$ kitérés kisebb lesz az r excentricitásnál, ez a megoldás nem stabil. Ekkor ugyanis a (3.114) képlet szerint q együtthatója negatívvá válik, ami az egyensúlyi helyzet (a q_p megoldás) instabilitását vonja maga után.

Emlékeztetünk arra, hogy a csillapítatlan lengőrendszerek nagyítási függvénye $N = 1/|1 - \lambda^2|$ (lásd 2.6.2. fejezet). Ennek megfelelően, $|q_p|$ grafikonja hasonlít a rezonancia-görbére, ahogy a 3.29. ábra is mutatja. A rezonanciagörbéhez való hasonlóság azonban csak látszólagos, valójában itt egészen más jelenségről van szó. A rezonanciagörbe hajlítólengéseket végző, ω körfrekvenciával gerjesztett tengelyre értelmezhető. Ezzel szemben a forgó

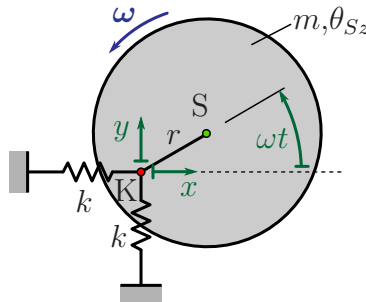


3.29. ábra. A kiegyensúlyozatlan forgórész mozgásegyenletének partikuláris megoldása.

tengely nem végez gerjesztett hajlítólengéseket, hanem a deformált alakja körbe forog, miközben a tengely húzott és nyomott száalai ugyanazok maradnak.⁷ Ez az oka annak, hogy a forgó tengely esetében nem tapasztalható az anyag kifáradása – amit hajlítólengések során tapasztalhatnánk.

3.6.2. Jeffcott-rotor

Az előző fejezetben tárgyalt egy szabadsági fokú modellből a kísérleti tapasztalatoknak elmentmondó, instabil megoldás adódott a kritikus fordulatszám felett. Ennek a problémának a megoldása érdekében ebben a fejezetben egy két szabadsági fokú modellt vizsgálunk meg, az ún. Jeffcott-rotort.



3.30. ábra. A Jeffcott-rotor mechanikai modellje

A 3.30 ábrán látható a Jeffcott-rotor mechanikai modellje. A modell két darab egymásra merőleges, k merevségű rugót tartalmaz, melyek a K pontban – ahol fel van ékelve a tárcsa a tengelyre – kapcsolódnak egymáshoz. A rugók a csapágyak és a tengely rugalmasságát egyaránt jellemezhetik. A K pont elmozdulását és a rugók megnyúlását a tengely elméleti vonalától mért x és y koordináták adják meg. Az $x = y = 0$ helyzetet a 3.27 ábra bal oldalán illusztráljuk. Statikus kiegyensúlyozatlanság esetén az S súlypont r távolságra van a K ponttól.

⁷Erre a mozgásra persze ráakódhatnak a homogén egyenlet megoldásának megfelelő rezgések, de azok a valóságos szerkezetben mindig jelenlévő csillapítás mellett lecsengenek.

A forgórész állandó ω szögsebességgel forog. Ez egy időfüggő kényszerfeltétel, hiszen annak felel meg, hogy a t pillanatban a KS szakasz $\varphi = \omega t$ szöget zár be az x tengellyel. Az általános koordináták vektora:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

A mozgásegyenlet felírásához a másodfajú Lagrange-egyenletet használjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.119)$$

A kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^2 + \frac{1}{2} \Theta_{S_z} \omega^2, \quad (3.120)$$

ahol a súlypont sebessége annak helyvektorából számolható:

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} x + r \cos(\omega t) \\ y + r \sin(\omega t) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{x} - r\omega \sin(\omega t) \\ \dot{y} + r\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (3.121)$$

Visszahelyettesítve \mathbf{v}_S komponenseit a kinetikus energia kifejezésébe:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + r^2 \omega^2 - 2\dot{x}r\omega \sin(\omega t) + 2\dot{y}r\omega \cos(\omega t)) + \frac{1}{2} \Theta_{S_z} \omega^2. \quad (3.122)$$

Végrehajtva a (3.119) képletben szereplő deriválásokat, az alábbi kifejezéseket kapjuk:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - mr\omega \sin(\omega t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} - mr\omega^2 \cos(\omega t), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + mr\omega \cos(\omega t), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} - mr\omega^2 \sin(\omega t), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (3.124)$$

A potenciális energia és annak deriváltjai:

$$U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} ky^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = kx, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = ky. \quad (3.125)$$

A fentieket behelyettesítve a (3.119) Lagrange-egyenletbe, az alábbi két egyenlet adódik:

$$m\ddot{x} + kx = mr\omega^2 \cos(\omega t), \quad (3.126)$$

$$m\ddot{y} + ky = mr\omega^2 \sin(\omega t). \quad (3.127)$$

E két egyenlet egymástól független, ezért a továbbiakban elegendő csak az egyiket vizsgálni.

Az első egyenlet sztenderd alakja:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = r\omega^2 \cos(\omega t), \quad (3.128)$$

ahol az ω_n sajátkörfrekvencia nem függ az ω szögsebességtől.

A megoldás a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, ahol

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t), \quad (3.129)$$

$$x_p(t) = X_0 \cos(\omega t - \vartheta). \quad (3.130)$$

A homogén egyenlet megoldásában szereplő $C_{1,2}$ együtthatók a kezdeti feltételek alapján határozhatók meg. A partikuláris megoldás – azaz a kiegyensúlyozatlanság által gerjesztett rezgés – számításához vissza kell helyettesíteni a fenti próbamegoldást a (3.128) mozgásegyenletbe:

$$-X_0\omega^2 \cos(\omega t - \vartheta) + \omega_n^2 X_0 \cos(\omega t - \vartheta) = r\omega^2 \cos(\omega t). \quad (3.131)$$

Felhasználva, hogy $\cos(\omega t - \vartheta) = \cos(\omega t) \cos(\vartheta) - \sin(\omega t) \sin(\vartheta)$, valamint szétválogatva $\sin(\omega t)$ és $\cos(\omega t)$ együtthatóit, az alábbi két egyenletre jutunk:

$$\cos(\omega t) : -X_0\omega^2 \cos(\vartheta) + X_0\omega_n^2 \cos(\vartheta) = r\omega^2, \quad (3.132)$$

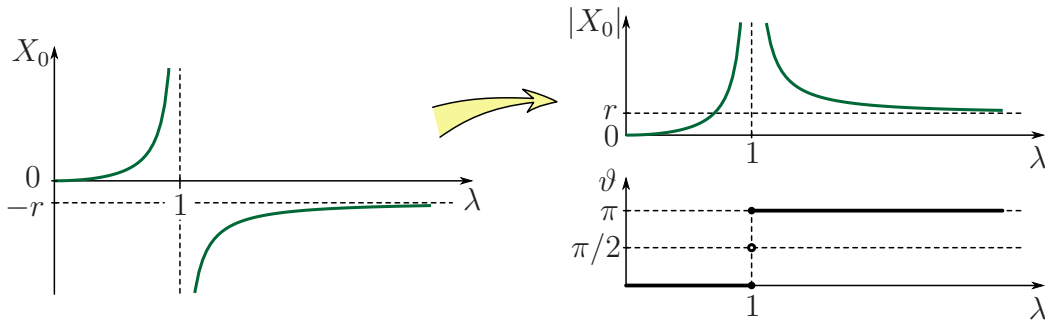
$$\sin(\omega t) : -X_0\omega^2 \sin(\vartheta) + X_0\omega_n^2 \sin(\vartheta) = 0. \quad (3.133)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\vartheta = 0, \quad (3.134)$$

$$X_0 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} r = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} r, \quad (3.135)$$

ahol $\lambda = \omega_n/\omega$ a frekvenciahányados.



3.31. ábra. Az X_0 amplitúdó és a ϑ fáziskésés a λ frekvenciahányados függvényében.

A 3.31 ábra az X_0 amplitúdót ábrázolja a λ frekvenciahányados függvényében. Amint látható, ez a modell már a kísérletekkel minőségileg egyező eredményekre vezet: kis fordulatszámokon X_0 pozitív, és az álló tengely sajátkörfrekvenciájának megfelelő szögsebességnél végtelenhez tart. Itt előjelet vált, és $\omega > \omega_n$ mellett már $X_0 < 0$. Ezzel az eredménnyel egyenértékű, ha pozitívnak tekintjük X_0 értékét – annak abszolút értékét vesszük – és $\omega > \omega_n$ mellett $\vartheta = \pi$ fázisszöggel számolunk:

$$|X_0| = \frac{\lambda^2}{|1 - \lambda^2|} r = \tilde{N} r. \quad (3.136)$$

Ekkor $|X_0|$ kifejezésében azonosítható a kiegyensúlyozatlan forgórészrel gerjesztett lengőrendszerek kapcsán bevezetett \tilde{N} nagyítási függvény (lásd (2.6.4) egyenlet).

A kapott eredmény szerint nagy fordulatszámokon közelebb kerül a súlypont a tengely elméleti vonalához, tehát bekövetkezik a forgórész önkiegyensúlyozása, amit a 3.28 ábra szemléltet.

Mindkét fenti modelltől azt kaptuk, hogy az álló tengely sajátkörfrekvenciájának megfelelő szögsebességgel egyenlő a kritikus fordulatszám, azonban ez a valóságban nem teljesen pontos, az alábbi okok miatt:

-
- A pörgettyűhatás (dinamikus kiegyensúlyozatlanság) általában csökkenti a kritikus fordulatszámot.
 - A csapágycsapatások a valóságban nem tökéletesen merevek. Rugalmasságuk szintén a számítotttnál kisebb kritikus fordulatszámot eredményez.
 - A tengely melegedése során a rugalmassági modulusz csökkenése is csökkenti a kritikus fordulatszámot.
 - A tengely axiális terhelése is a kritikus fordulatszám csökkenését okozza.

Tárgymutató

- abszolút koordináta 130
- adaptív módszerek 137
- addíciós tétel 26
- aktív rezgészigetelés 109
- általános csillapítási mátrix 122
- általános erő 77, 79
- általános gyorsulások 136
- általános koordináta 75
- általános koordináták vektora 117
- általános merevségi mátrix 119
- általános tömeg 91
- általános tömegmátrix 118
- amplitúdó 26
- analitikus módszerek 72
- aperiodikus határeset 57

- bizonytalansági zóna 68

- Cauchy-átírás 135
- centrikus ütközés 5
- Coulomb-féle súrlódás 66

- csavarrugó 17
- csillapítási tényező 49
- csillapítás mérése 55
- csillapítatlan szabad lengés 23
- csomópont 126, 130

- dinamikus lengésfojtó 143
- dinamikus rugóerő 33
- dinamikus terhelés 98
- Dirichlet-tétel 119
- disszipáció 122
- disszipatív potenciál 81

- egyenértékű csillapítási tényező 91
- egyenértékű modell 19
- egyenértékű rugómerevség 91
- erőgerjesztés 94

- erőimpulzus 6
- erőlökés 6
- erős csillapítás 57
- Euler-Lagrange-egyenlet 82
- Euler-módszer 135

- fáziskésés 97
- fázisszög 26, 97
- felharmonikus 93
- fizikai inga 37
- Fourier-sor 92
- Fourier-transzformáció 93, 137
- frekvenciaegyenlet 124
- frekvenciahányados 97
- frekvenciaviszony 97

- geometriai kényszerek 72
- gerjesztés
 - amplitúdója 95
 - kiegyensúlyozatlan forgórész által 95, 106
 - körfrekvenciája 95
 - lengéscsillapítón keresztül 104
 - rugón keresztül 102
- gerjesztett lengőrendszerek 92
- gerjesztett rezgés amplitúdója 97
- giroszkópikus mátrix 119, 156

- gyenge csillapítás 52

- hangolás 97
- harmonikus gerjesztés 92
- harmonikus rezgés 2, 26
- hirtelen rögzítés 15

- ideális kényszer 73
- időállandó 57
- időlépés 137
- időtől függő kényszer 74

- inga 37
 instabil egyensúlyi helyzet 42

 kaotikus mozgás 135
 karakterisztikus egyenlet 25, 52
 kezdeti feltételek 27
 kinematikai kényszerek 72
 kritikus csillapítás 57

 Lagrange-függvény 82
 Lehr-féle csillapítási tényező 51
 lengéskép vektor 124
 lengéskép vektorok 125
 linearizálás 38
 Lipschitz-feltétel 67
 logaritmikus dekrementum 56

 másodfajú Lagrange-egyenlet 72, 78
 matematikai inga 37
 matematikai kettősinga 126
 mátrix együtthatós
 differenciálegyenlet 122
 mozgásegyenlet 117
 maximális kitérés számítása 53
 maximális rugóerő meghatározása 103
 Maxwell-ábra 6
 Maxwell-féle felcserélhetőségi tétel 158
 merevség 18
 merevségi mátrix 119
 mozgásegyenlet 2
 mozgásegyenlet általános megoldása 25
 mozgásegyenlet sztenderd alakja 24
 mozgástörvény 2

 nagyítás 98
 nagyítási görbe 98
 nagyítás maximuma 98
 nemlineáris lengőrendszer 34
 nemtriviális megoldás 124
 Newton-Euler módszer 71
 numerikus szimuláció 135

 nyomatékgerjesztés 94

 passzív rezgésszigetelés 109, 111
 peremfeltételek 27
 periodikus gerjesztés 92
 periódusidő
 csillapított rezgése 52
 mérése 55
 potenciális erők 80
 pozitív definit kvadratikus alak 119

 radián 29
 Rayleigh-féle disszipatív potenciál 81
 redukált tömeg 11
 relatív csillapítási tényező 51
 relatív koordináta 134
 relatív sebesség 107
 rezgésszigetelés 109
 rezonancia 140
 matematikai értelemben 101
 mérnöki értelemben 102
 rezonancia frekvenciák 123
 rezonanciagörbe 98
 rezonancia körfrekvencia 100
 Routh-Hurwitz-kritériumok 41, 52
 rugalmas elemek 17
 rugó 17
 rugóállandó 18
 rugóállandó mátrix 20, 158
 rugók
 előfeszítése 33
 párhuzamos kapcsolása 20
 soros kapcsolása 21
 rugómerevség 18
 rugó potenciális energiája 18
 Runge-Kutta-módszer 135

 sajátfrekvencia 29
 sajátkörfrekvencia
 csillapítatlan rendszeré 25
 csillapított rendszeré 52
 spirálrugó 18
 stabilitás feltétele 41
 stacionárius megoldás 96
 stacionárius rezgés 92, 96
 statikus deformáció 96
 statikus kitérés 30, 68, 96
 statikus rugóerő 33
 statikus terhelés 98

 szállító sebesség 107
 száraz súrlódás 66
 sztochasztikus gerjesztés 92

 tehetetlen elemek 17
 tehetetlenségi nyomaték mérése 39

- tömegmátrix 118
torziós rugó 18
torziós rugóállandó 18
torziós rugómerevség 18
tranziens gerjesztés 92
triviális megoldás 124
túlcsillapított lengőrendszer 58
- útgerjesztés 95, 102
ütközés
 álló tengely körül elforduló test 10
 excentrikus 12
- hirtelen rögzítés 15
tökéletesen rugalmas 4
tökéletesen rugalmatlan 4
 utáni sebesség 6
ütközési normális 4
ütközési talppont 11
ütközési tényező 4, 6
- variációszámítás 82
virtuális teljesítmény 73
- Young-tétel 119

Irodalomjegyzék

- [1] Béda Gyula, Bezák Antal: Kinematika és dinamika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [2] J.N. Bronstejn, K.A. Szemengyajev, G. Musiol, H. Mühlig: Matematikai kézikönyv, TypoT_EX Kiadó, Budapest, 2000.
- [3] Budó Ágoston: Kísérleti fizika I, 12. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [4] Budó Ágoston: Mechanika, 10. kiadás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.
- [5] Csernák Gábor: Dinamika, Akadémiai Kiadó, ISBN: 978 963 05 9924 5, <https://mersz.hu/csernak-dinamika>, 2018
- [6] Dede Miklós: Kísérleti fizika I, Kossuth Lajos Tudományegyetem, 14. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [7] F. Gantmacher: Lectures in Analytical Mechanics, MIR Publishers, Moszkva, 1970.
- [8] Hraskó Péter: Elméleti fizika I – Elméleti mechanika, Janus Pannonius Tudományegyetem jegyzetkiadója, 1995.
- [9] A.N. Kolmogorov, Sz.V. Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [10] L.D. Landau, E.M. Lifsic: Elméleti fizika I – Mechanika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [11] L.D. Landau, E.M. Lifsic: Elméleti fizika V – Statisztikus fizika I, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [12] Ludvig Győző: Lengéstan példatár, 41033, Műegyetemi Kiadó, 1998.
- [13] Muttnyánszky Ádám: Kinematika és kinetika, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.
- [14] Muttnyánszky Ádám: Szilárdságtan, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [15] Pach Zs. Pálné - Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
- [16] L.Sz. Pontrjagin: Közönséges differenciálegyenletek, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.
- [17] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete, 4. kiadás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1998.
- [18] Stoyan Gisbert, Takó Galina: Numerikus módszerek, ELTE-TypoT_EX, Budapest, 1993.

- [19] Szeidl György, Kiss László: Mechanical Vibrations – An Introduction. Foundations of Engineering Mechanics Series. Springer.