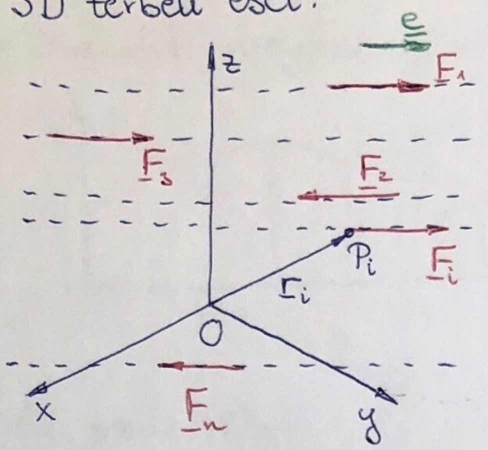
Véges sok párhuzamos erő eredője (megoszló terhelés)

3D térbeli eset:



$\underline{F}_i = F_i \underline{e}$

O-ba redukált vektorkettős:

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e}$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times F_i \underline{e} = \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i\right) \times \underline{e}$$

$\underline{F}$ és $\underline{M}_0$ egymáshoz viszonyított helyzete:

$$\left.\underline{F}\cdot\underline{M}_0 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e}}_{\underline{F}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i\right)\times\underline{e}}_{\underline{M}_0 \ (\Rightarrow \perp \underline{e}\text{-re})} = 0 \right\}$$

skaláris szorzat zérus!

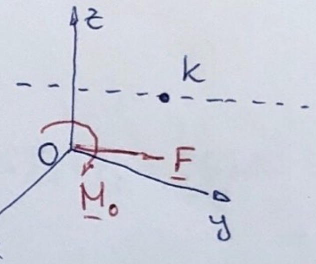
$\underline{M}_0 \perp \underline{F}$

Ekkor az erőrendszer tovább egyszerűsíthető:

- az erőrendszer eredője egyetlen eltolt helyzetű erő lesz

Az eredő hatásvonalának egy pontját jelölje az $\underline{r}_k$.

$\Rightarrow$ k pontra számított nyomaték:



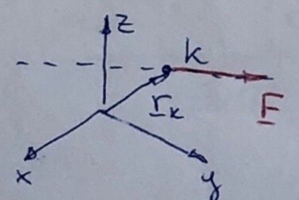
$$\underline{M}_k = \underline{M}_0 - \overset{\underline{r}_{ok}}{\underline{r}_k} \times \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e} = 0$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i\right)\times\underline{e} - \underline{r}_k \times \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\underline{e}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i\right)\times\underline{e} - \underline{r}_k \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\times\underline{e}$$

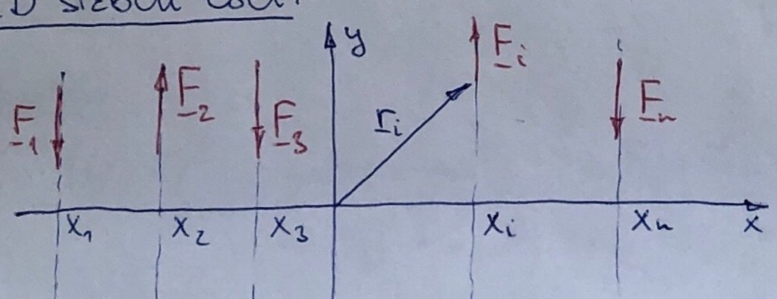
$$= \underbrace{\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i - \underline{r}_k \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\right]}_{=\underline{0}} \times \underline{e} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{r}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Helyettesítés:



- A K pont független $\underline{e}$-től
- K a párhuzamos erők középpontja (csak $\sum F_i \neq 0$ esetén érvényes)

2D síkbeli eset:



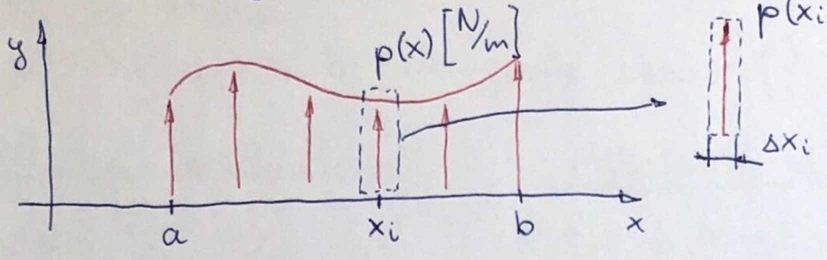
$\underline{F}_i = F_i \underline{j}$

$\underline{r}_i = x_i \underline{i} + y_i \underline{j}$

Az y irányú erők eredőjének x koordinátája:

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

- Vonalmenti megoszló párhuzamos erőrendszer:



Az Δx_i szakaszon átadódó erő:

$$\Delta F_i = p(x_i)\,\Delta x_i$$

Teljes átadódó erő:

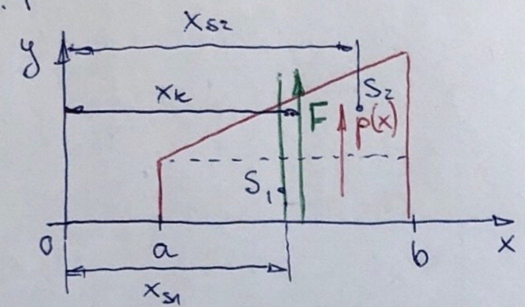
$$F = \sum \Delta F_i \longrightarrow F = \int_a^b p(x)\,dx$$

Az eredő helye:

$$x_k = \frac{\sum x_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i} \longrightarrow x_k = \frac{\int_a^b x\,p(x)\,dx}{F}$$

: hatásvonal; a síkidom súlyponti x_i koordinátáját kell meghatározni!

7.1



Adatok:

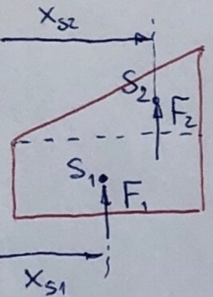
$a = 1\,m$

$b = 6\,m$

$p(a) = 2\,kN/m$

$p(b) = 8\,kN/m$

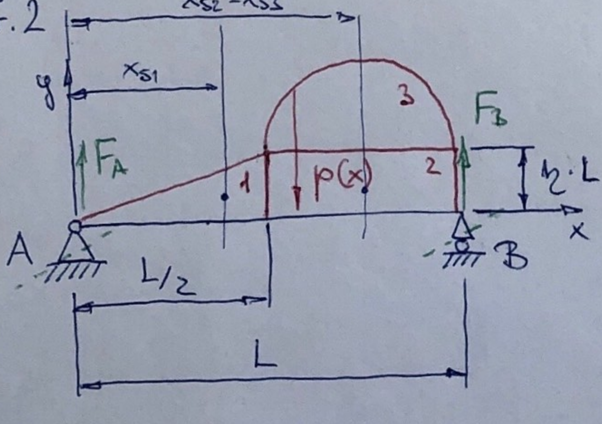
Az eredő nagysága a trapéz területével azonos, a hatásvonala a trapéz súlypontján halad át!



$$\left.\begin{aligned} F_1 &= (b-a)\,p(a) = 10\,kN \\ F_2 &= \tfrac{1}{2}(b-a)\big(p(b)-p(a)\big) = 15\,kN \end{aligned}\right\} F = F_1 + F_2 = \underline{\underline{25\,kN}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{S1} &= \frac{a+b}{2} = 3{,}5\,m \\ x_{S2} &= b - \frac{(b-a)}{3} = \frac{13}{3}\,m \end{aligned}\right\} x_k = \frac{x_{S1}F_1 + x_{S2}F_2}{F} = \underline{\underline{4\,m}}$$

7.2



Feladatok:

1, Rajzolja fel a ~~dimenziótlan~~ "dimenziótlan" η paraméter függvényében a reakcióerők nagyságának F_B/F_A arányát!

2, Számítsa ki, hogy mekkora legyen ~~az~~ η ha $F_B/F_A = 2$!

Reakcióerők:

$$\sum M_A = 0 \qquad -x_{S1}F_1 - x_{S2}F_2 - x_{S3}F_3 + F_B L = 0$$

$$\Rightarrow F_B L = x_{S1}F_1 + x_{S2}F_2 + x_{S3}F_3$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_1 - F_2 - F_3 + F_A + F_B = 0$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = F_A + F_B$$

Megoszló terhelés:

$p(x) = k\,h(x)$, k – arányossági szám $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Súlyponti koordináták:

$x_{s1} = L/3$

$x_{s2} = x_{s3} = \frac{3}{4}L$

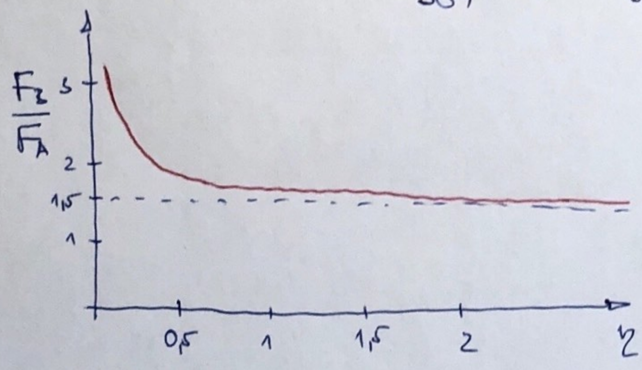
Helyettesítő erők:

$$F_1 = k\,\frac{L}{2}\cdot \eta L \cdot \frac{1}{2} = k\,\frac{\eta L^2}{4}$$

$$F_2 = k\,\frac{L}{2}\eta L = \frac{\eta L^2}{2}$$

$$F_3 = k\left(\frac{L}{4}\right)^2 \pi\,\frac{1}{2} = k\,\frac{L^2\pi}{32}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} F_A &= k\,\frac{3\pi L^2 + 112\eta L^2}{384} \\ F_B &= k\,\frac{9\pi L^2 + 176\eta L^2}{384} \end{aligned}\right\} \quad \frac{F_B}{F_A} = \frac{9\pi + 176\eta}{3\pi + 112\eta}$$



2)

$$2 = \frac{9\pi + 176\eta}{3\pi + 112\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\pi}{16} \cong \underline{\underline{0{,}196}}$$