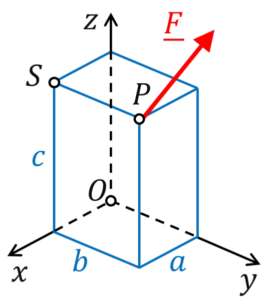
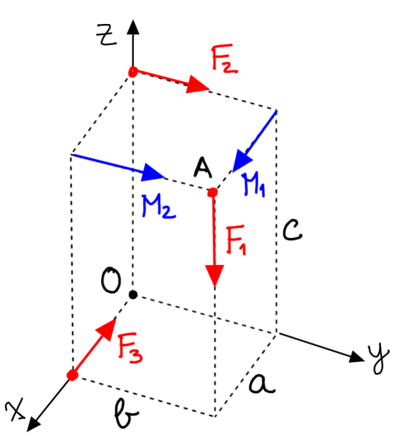
4. Gyakorlat

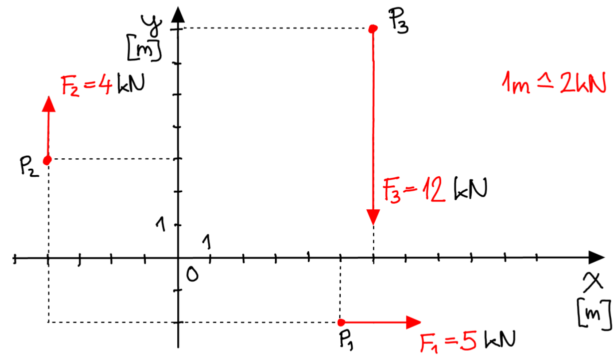
4.1. Példa. Helyezzük át a merev hasábot P pontban terhelő $\underline{F}$ koncentrált erőt az S pontba. Milyen $\underline{M}_S$ nyomatékvektort kell az S pontban működtetnünk ahhoz, hogy az eredeti (P-ben ható) $\underline{F}$ erő hatásával egyenértékű külső hatás érje a testet? Ezt követően redukáljuk az S pontban működő erő és nyomatékvektorokat az O pontra. Írjuk fel az O-ban ható $\underline{M}_O$ nyomatékvektort és számítsuk ki úgy is, mintha a P pontbeli erőt közvetlenül az O-ba redukáltuk volna!
Adatok: $a = 20$ mm, $b = 40$ mm, $c = 60$ m, $\underline{F} = 10\underline{i} + 50\underline{j} + 70\underline{k}$ N.
Megoldás: $\underline{M}_S = 2800\underline{i} - 400\underline{k}$ Nmm, $\underline{M}_O = -200\underline{i} - 800\underline{j} + 600\underline{k}$ Nmm.



4.2. Példa. Egy merev testre az $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ és $\underline{F}_3$ koncentrált erők és az $\underline{M}_1$ és $\underline{M}_2$ koncentrált erőpárok hatnak az ábrán feltüntetett módon. Az erők és nyomatékok nagyságai ismertek: $F_1 = 25$ N, $F_2 = 70$ N, $F_3 = 60$ N, $M_1 = 90$ Nm, $M_2 = 110$ Nm. Geometria adatok: $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 4$ m.
Feladatok:
a) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az O pontra!
b) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az A pontra!
c) Igazoljuk, hogy $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_O$!
d) Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét és redukáljuk az erőrendszert a centrális egyenes egy tetszőleges pontjára!
e) Milyen O pontban működő erővel és erőpárral kell kiegészíteni az erőrendszert, hogy az egyensúlyi legyen?
Megoldás:
a) $\underline{F} = -60\underline{i} + 70\underline{j} - 25\underline{k}$ N, $\underline{M}_O = -265\underline{i} + 160\underline{j}$ Nm;
b) $\underline{M}_A = 90\underline{i} + 350\underline{j} - 320\underline{k}$ Nm;
c) $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_O = 27100$ Nm^2;
d) $\underline{r}(\lambda) = 0,4384\underline{i} + 0,7260\underline{j} + 0,9808\underline{k} + \lambda \cdot \left(-0,6281\underline{i} + 0,7328\underline{j} - 0,2617\underline{k}\right)$;
e) $\underline{F}^* = 60\underline{i} - 70\underline{j} + 25\underline{k}$ N, $\underline{M}_O^* = 265\underline{i} - 160\underline{j}$ Nm.

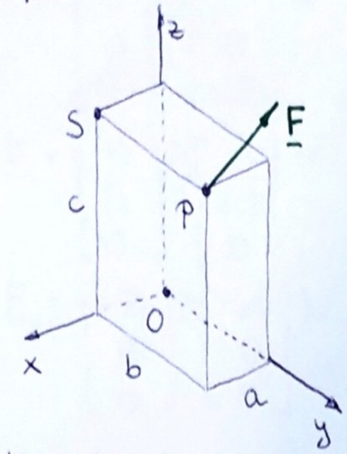


4.3. Példa. Határozzuk meg az alábbi síkbeli erőrendszer $\underline{F}_e$ eredőjének nagyságát és helyét a) szerkesztéssel és b) számítással!
Megoldás: $\underline{F}_e = 5\underline{i} - 8\underline{j}$ kN; hatásvonalának metszéspontja az x-tengellyel: 9,75 m.



Erőrendszer redukáltja:

4.1.



Milyen $\underline{M}_S$ nyomatékvektort kell az S pontban működtetnünk, hogy az eredeti F erő hatását kapjuk?

$\underline{M}_0 = ?$ (Mintha S-ből/P-ből számolnánk)

Adatok: $a = 20\,mm$, $b = 40\,mm$, $c = 60\,mm$, $\underline{F} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} N$

Helyvektorok: $\underline{r}_{SP} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} mm$ $\quad \underline{r}_{OS} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} mm$ $\quad \underline{r}_{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} mm$

S-be redukálva:

$$\underline{M}_S = \underline{r}_{SP} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & b & 0 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 70b \\ 0 \\ -10b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} Nmm$$

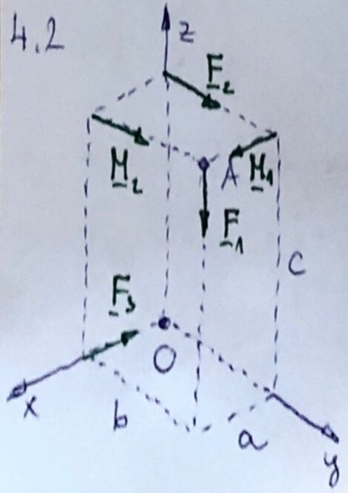
O-ba redukálunk

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_S + \underline{r}_{OS} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}}_{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 0 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3000 \\ -800 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} Nmm$$

Ugyanaz az eredmény, ha P-ből megyünk O-ba:

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{OP} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} Nmm$$

4.2



Adatok: $|\underline{F}_1| = 25N$ $\quad a = 2m$

$|\underline{F}_2| = 70N$ $\quad b = 3m$

$|\underline{F}_3| = 60N$ $\quad c = 4m$

$|\underline{M}_1| = 90Nm$

$|\underline{M}_2| = 110Nm$

Az erő és nyomatékvektorok felírása:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} N \qquad \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

A helyvektorok:

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} m \qquad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} m \qquad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Eredő erő:

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{3} \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} N$$

a) Az erők nyomatéka az O pontra:

$$\underline{M}_o = \sum_{j=1}^{2} \underline{M}_j + \sum_{i=1}^{3} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underbrace{\underline{r}_1 \times \underline{F}_1}_{=\underline{M}_{oF_1}} + \underbrace{\underline{r}_2 \times \underline{F}_2}_{=\underline{M}_{oF_2}} + \underbrace{\underline{r}_3 \times \underline{F}_3}_{=\underline{M}_{oF_3}}$$

$$\underline{M}_{oF_1} = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{M}_{oF_2} = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 70 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{M}_{oF_3} = \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ -60 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$ (átmegy az O ponton $\underline{F}_3$)

$$\underline{M}_o = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} Nm \Rightarrow [\underline{F}, \underline{M}_o]_o \text{, ahol } \underline{F} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} N \quad \underline{M}_o = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} Nm$$

b) A-ból O-ba mutató vektor:

$$\underline{r}_{AO} = -\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} m$$

Erőrendszer nyomatéka A-ra:

$$\underline{M}_A = \underline{M}_o + \underbrace{\underline{r}_{AO} \times \underline{F}}_{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & -4 \\ -60 & 70 & -25 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 355 \\ 190 \\ -320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} Nm$$

Az erőrendszer redukáltja az A-ban:

$$[\underline{F}, \underline{M}_A]_A \text{, ahol } \underline{F} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N és } \underline{M}_A = \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

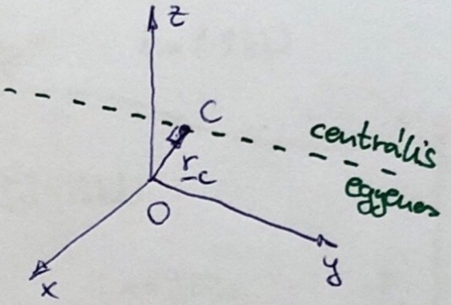
c) Igazolják, hogy $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_0$!

$$\underline{F}\,\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} = (-60)(-265) + 70 \cdot 160 + (-25) \cdot 0 = 27100\,\text{N}^2\text{m}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} = (-60) \cdot 90 + 70 \cdot 350 + (-25)(-320) = 27100\,\text{N}^2\text{m}$$

d) A centrális egyenes C pontjának (O-hoz közelebbi) helyvektora:

$$\underline{r}_c = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{\underline{F}^2}$$



ahol

$$\underline{F}^2 = |\underline{F}|^2 = \underline{F}\,\underline{F} = (-60)^2 + 70^2 + (-25)^2 \Rightarrow \underline{F}^2 = 9125\,\text{N}^2 \Rightarrow |\underline{F}| \cong \underline{\underline{95{,}525\,\text{N}}}$$

és

$$\underline{F} \times \underline{M}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -60 & 70 & -25 \\ -265 & 160 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} \text{N}^2\text{m}$$

$$\underline{r}_c = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{\underline{F}^2} = \frac{1}{9125} \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0{,}4384 \\ 0{,}7260 \\ 0{,}9808 \end{bmatrix} \text{m}$$

<u>A centrális egyenes egység irányvektora:</u>

$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \begin{bmatrix} -0{,}6281 \\ 0{,}7328 \\ -0{,}2617 \end{bmatrix}$$

A centrális egyenes egyenlete:

$$\underline{r}(\lambda) = \overbrace{\underline{r}_c}^{\text{egy pontjának a helyvektora}} + \lambda \underbrace{\underline{e}_F}_{\text{irányvektor}}$$

$$\underline{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0{,}4384 \\ 0{,}7260 \\ 0{,}9808 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -0{,}6281 \\ 0{,}7328 \\ -0{,}2617 \end{bmatrix}$$

A C pontba az erőrendszer redukáltja:

$$\underline{M}_c = \underline{M}_o + \underline{r}_c \times \underline{F} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 86,808 \\ 47,890 \\ -74,247 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -178,192 \\ 207,890 \\ -74,247 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

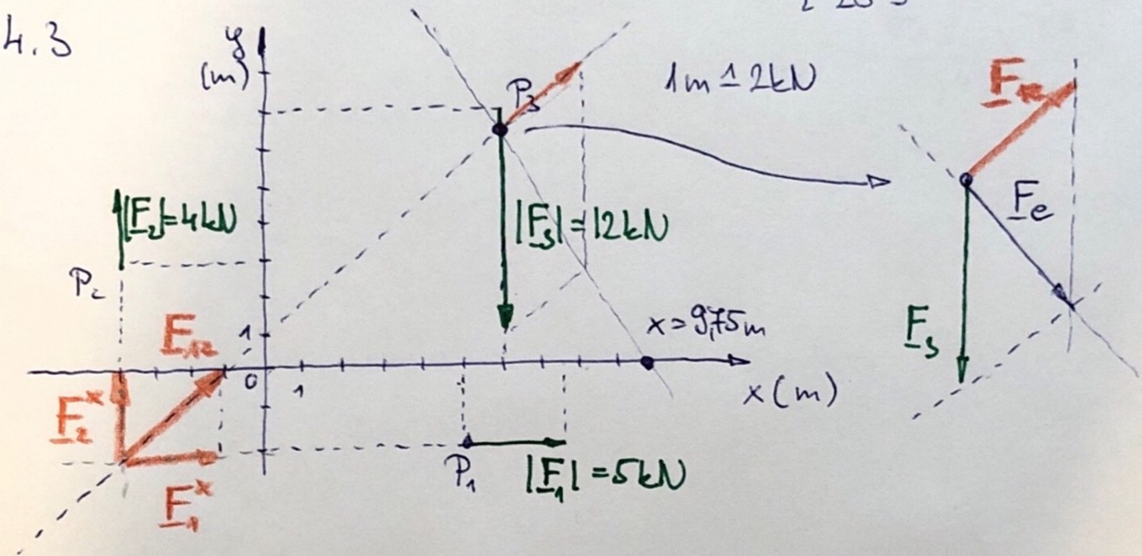
Ellenőrzés: $\underline{M}_c \times \underline{F} = \underline{0}$ (Párhuzamos a két vektor)

e) Az egyensúly biztosításához az O pontban az O-ba redukált statikai vektorkettős (−1)-szeresét kell alkalmazni

Tehát az $[\underline{F}^*, \underline{M}_o^*]_o = [-\underline{F}, -\underline{M}_o]_o$

$$\Rightarrow \underline{F}^* = \begin{bmatrix} 60 \\ -70 \\ 25 \end{bmatrix} \text{N} \qquad \underline{M}_o^* = \begin{bmatrix} 265 \\ -160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

4.3



Eredő erő (szerkesztés)

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{N}$$

Számítás: A koncentrált erők helyvektorai:

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_{OP1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m} \qquad \underline{r}_2 = \underline{r}_{OP2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m} \qquad \underline{r}_3 = \underline{r}_{OP3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \text{m}$$

A koncentrált erők vektorai:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kN}$$

Az erőrendszer redukáltja O-ba:

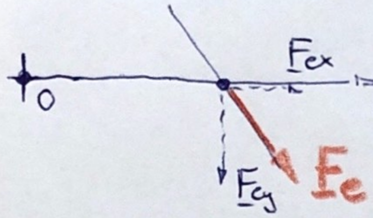
$[\underline{F}_e, \underline{M}_o]_o$, ahol $\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \text{N}$

$$\underline{M}_o = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} kNm$$

$$|\underline{M}_0| = 2F_1 - 4F_2 - 6F_3 = \underline{\underline{-78\,kNm}}$$

<u>$\underline{F}_e$ hatásvonalának meghatározása:</u> x - tengellyel való metszéspontjának helye:



$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{0x} \times \underline{F}_{ey} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8x \end{bmatrix}$$

$x = 9{,}75\,m$