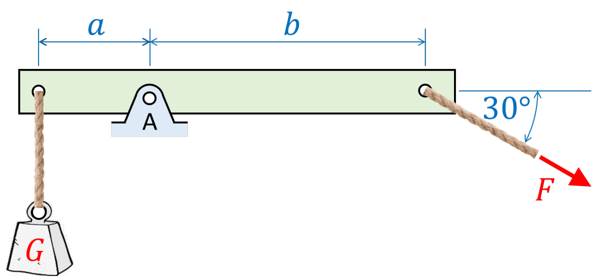
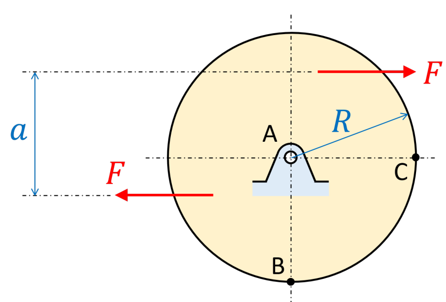
2. Gyakorlat

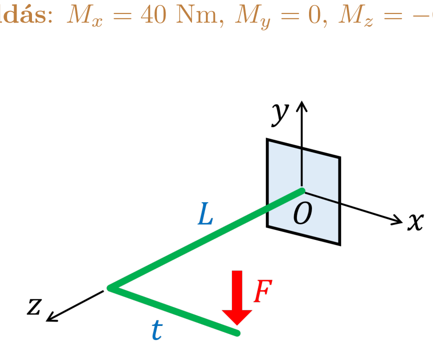
2.1. Példa. A súlytalannak tekintett merev rudat a $G = 300$ N súlyú teher terheli. A rúd az A pontban csuklósan rögzített. Mekkora legyen az F erő nagysága ahhoz, hogy az egyensúlyt biztosítsuk? Adatok: $a = 2$ m, $b = 10$ m.
Megoldás: $F = 120$ N.



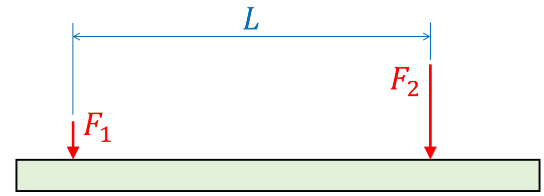
2.2. Példa. Az $R = 20$ cm sugarú korong az A ponton átmenő tengely körül foroghat. A korongot a $F = 10$ N nagyságú erőkből álló erőpár terheli, ahol az erők távolsága $a = 20$ cm. Mekkora és milyen irányítású Q erőt kell alkalmazni a BC hataásvonalon, hogy a korong egyensúlyban maradjon?
Megoldás: $Q = 10\sqrt{2}$ N, B-től C irányba.



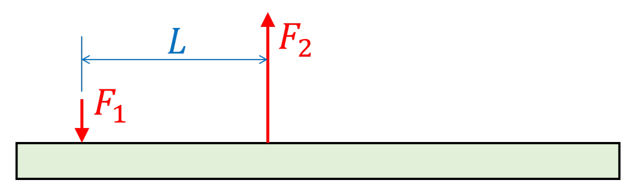
2.3. Példa. Az $L = 2$ m és $t = 30$ cm-es egyenes szakaszokból álló merev törtvonalú tartó az O pontban mereven rögzített a környező falhoz. A tartó terhelése a végén működő y-tengellyel párhuzamos $F = 20$ N nagyságú koncentrált erő. Határozzuk meg ezen erő forgató hatását a bejelölt koordinátatengelyek körül!
Megoldás: $M_x = 40$ Nm, $M_y = 0$, $M_z = -6$ Nm.



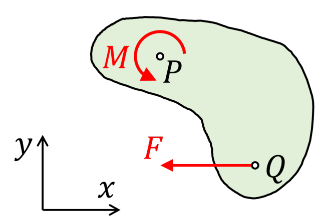
2.4. Példa. Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 4$ kN és $F_2 = 10$ kN nagyságú erők, melyek távolsága $L = 7$ m. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással is a két erőt helyettesítő eredő F_e erő nagyságát és helyét! Mekkora nagyságú, milyen irányú és értelmű erőt kell működtetnünk, hogy a vizsgált merev test egyensúlyban legyen?
Megoldás: $F_e = 14$ kN lefele, 5 m-re F_1-től F_2 irányában.



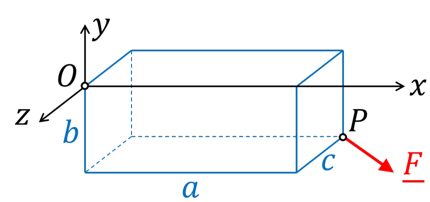
2.5. Példa. Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 5$ kN és $F_2 = 15$ kN nagyságú erők, melyek távolsága $L = 6$ m. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással is a két erőt helyettesítő eredő F_e erő nagyságát és helyét! Mekkora nagyságú, milyen irányú és értelmű erőt kell működtetnünk, hogy a vizsgált merev test egyensúlyban legyen?
Megoldás: $F_e = 10$ kN felfele, 3 m-re F_2-től F_2 jobb oldalán.



2.6. Példa. Az ábrán vázolt síkbeli merev testet a P pontban működő $M = 3$ kNm nagyságú koncentrált erőpár és a Q pontban ható $F = 10$ kN nagyságú vízszintes erő terheli. Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét!
Megoldás: $F = 10$ kN nagyságú jobbra mutató vízszintes erő, 0,3 m-rel az eredeti erő hatásvonala felett.



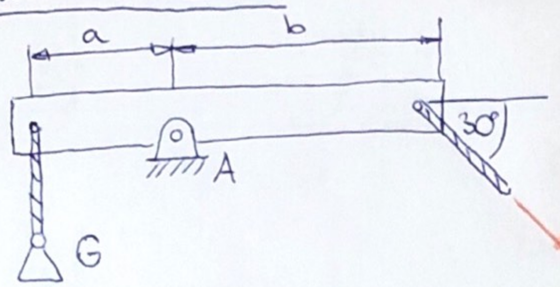
2.7. Példa. Az $a = 5$ m, $b = 3$ m, $c = 4$ m élhosszúságú merev téglatestet a P pontban az $\underline{F} = 6\underline{i} - 2\underline{j} + 8\underline{k}$ kN koncentrált erő terheli. Számítsuk ki az erő nyomatékát az O pontra!
Megoldás: $\underline{M}_O = -32\underline{i} - 64\underline{j} + 8\underline{k}$.



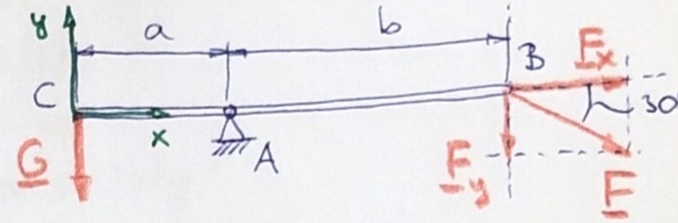
2.8. Példa. Egy merev testre ható külső erőhatások nyomatéka az O pontra $\boldsymbol{M}_O = 21\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$ Nm. Jelöljön ki az $\boldsymbol{t} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ vektor egy irányított tengelyt az O ponton keresztül. Mekkora az erre a tengelyre vonatkozó nyomaték?
Megoldás: $M_t = 15$ Nm.

Nyomaték bevezetése:

2.1



Modell ⇒



Adatok: $a = 2\,m$
$b = 10\,m$
$G = 300\,N$

A rúdnak 3DoF (szabadsági fok) síkban. Az alátámasztás kettőt megfog, de el tud billenni!

Hogy egyensúlyban legyen, nyomatéki egyensúly kell! (A pont) ↺+

$$Ga - F_y b = 0 \text{, ahol } F_y = F\sin 30° = \frac{1}{2}F$$

$$Ga - \frac{1}{2}Fb = 0$$

$$\boxed{F = \frac{2Ga}{b} = \underline{\underline{120\,N}}}$$

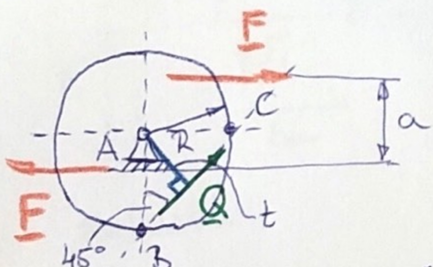
$$\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{0} = \underline{r}_{AC} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{r}_{AB} \times \begin{bmatrix} F\cos 30° \\ -F\sin 30° \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{0} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \overset{(-1)}{\underline{j}} & \underline{k} \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -G & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b & 0 & 0 \\ F\cos 30° & -F\sin 30° & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aG \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -bF\sin 30° \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Megoldás}$$

2.2.



Adatok: $R = 20\,cm$
$F = 10\,N$
$a = 20\,cm$
$Q = ?$

Az erőpár nyomatéka

$$M_e = -Fa = -2\,Nm$$

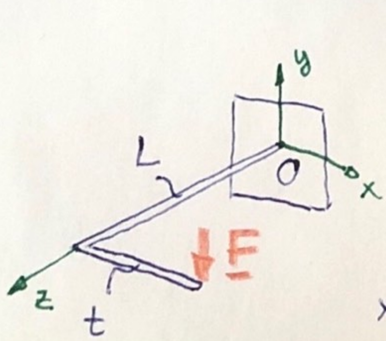
Ezzel kell, hogy egyensúlyt tartson Q nyomatéka:

$$t = R\sin 45° = R\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} = 0{,}14\,m$$

$$Qt = 2 \Rightarrow Q = \frac{2}{t} = 10\sqrt{2}\,N$$

$$\boxed{Q = \underline{\underline{14{,}142\,N}}}$$

2.3.

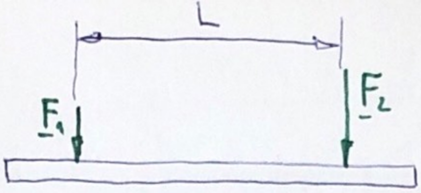


Adatok: $L = 2\,m$ $\underline{F} \parallel y$
$t = 30\,cm$ és $|\underline{F}| = 20\,N$

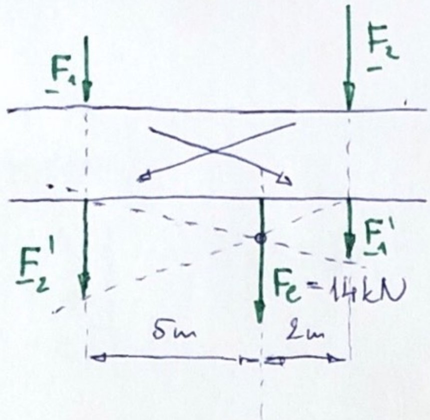
Határozzuk meg $\underline{F}$ forgató hatását x, y, z körül!

x: $M_x = FL = \underline{\underline{40\,Nm}}$ y: $M_y = \underline{\underline{0}}$ mert $\underline{F} \parallel y$ z: $M_z = -Ft = \underline{\underline{-6\,Nm}}$

2.4.



⇕ Modell



szerkesztés!

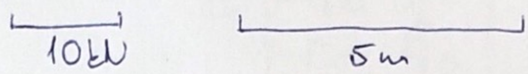
Adatok: $F_1 = 4$ kN

$F_2 = 10$ kN

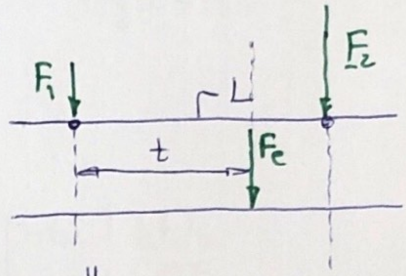
$L = 7$ m

F_e nagysága és helye?

Erő mérték: Hossz mérték:



Számítással:



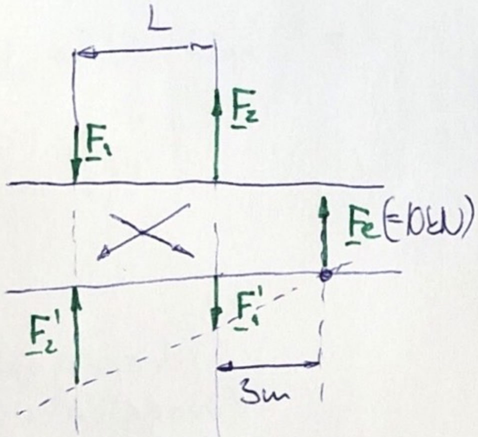
Nyomatéki egyensúly:

$$F_1 t - F_2(L-t) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{F_2}{F_1+F_2} L = \underline{\underline{5\,m}}$$

$$F_e = F_1 + F_2 = \underline{\underline{14\,kN}}$$

2.5



szerkesztés!

Adatok:

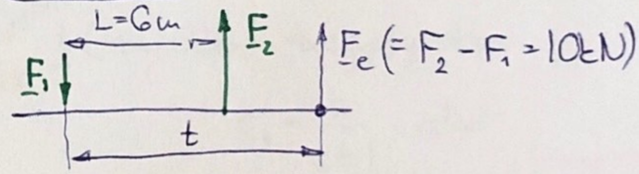
$F_1 = 5$ kN

$F_2 = 15$ kN

$L = 6$ m

$F_e = ?$

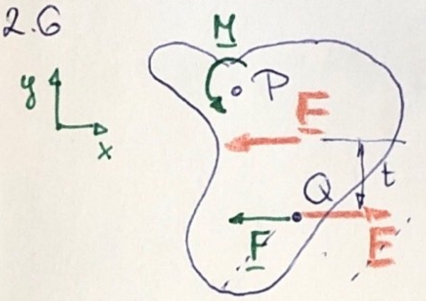
Számítás:



$$F_1 t - F_2 (t - L) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{F_2}{F_2 - F_1} L = \underline{\underline{9\,m}}$$

2.6



Adatok:

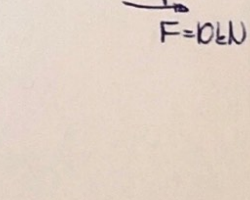
$M = 3$ kNm

$F = 10$ kN

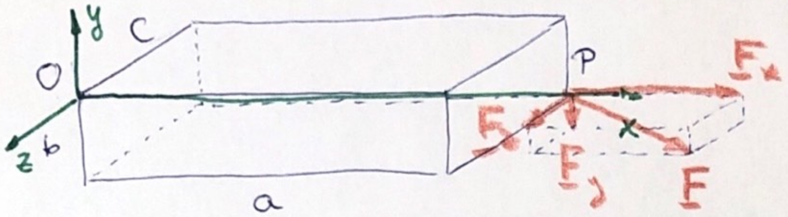
Határozzuk meg az erőrendszer eredőjét!

A koncentrált erőpár (M) helyettesíthető $F = 10$ kN erővel jellemzett erőpárral!

$$t = \frac{3000}{10000} = 0{,}3\,m \quad \left(\frac{M}{F}\right)$$



2.7.



Adatok: $a = 5\,m$, $b = 3\,m$, $c = 4\,m$ $\quad \underline{F} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} kN$

Mekkora a nyomaték az O pontra?

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} -F_z b - F_y c \\ -F_x c - F_z a \\ -F_y a + F_z b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ -64 \\ 8 \end{bmatrix} kNm$$

Másik módszer:

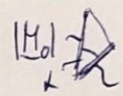
$$\underline{r}_{OP} = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{OP} \times \underline{F} = \begin{array}{ccc} & (-1) & \\ \end{array} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a & -b & -c \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} (i) \\ (j) \\ (k) \end{array} \begin{bmatrix} -8b - 2c \\ -8a - 6c \\ -2a + 6b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ -64 \\ 8 \end{bmatrix} \underline{\underline{kNm}}$$

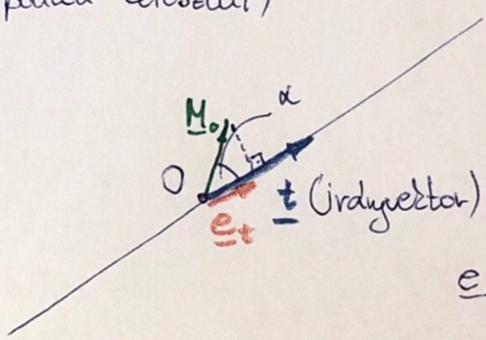
$$|\underline{M}_0| = M_0 = \sqrt{\underline{M}_0 \, \underline{M}_0} = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \ldots$$

2.8



$|\underline{M}_0| \cos\alpha = M_0$

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix} Nm \qquad \underline{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \text{(O ponton keresztül)}$$



$\underline{t}$ (irányvektor) ⇒ egységvektor

$$\underline{e}_t = \frac{\underline{t}}{|\underline{t}|}, \text{ ahol } |\underline{t}| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \underline{\underline{7}}$$

$$\underline{e}_t = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$$

Skaláris szorzat:

$(\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta)$

$\Downarrow$

$\underline{M}_0 \underline{e}_t = |\underline{M}_0| \cos\alpha$

$$M_0 = \underline{M}_0 \underline{e}_t = 21 \cdot \frac{2}{7} + (-7)\frac{3}{7} + 14\,\frac{6}{7} = \underline{\underline{15\,Nm}}$$

⊕ t körül a jobbkéz szabály szerinti értelmű!