Másodrendű nyomaték:

Elméleti összefoglaló:

A koordináta - rendszer forgatásával találunk egy olyan tengelypárt, amelyre a centrifugális másodrendű nyomaték zérus!

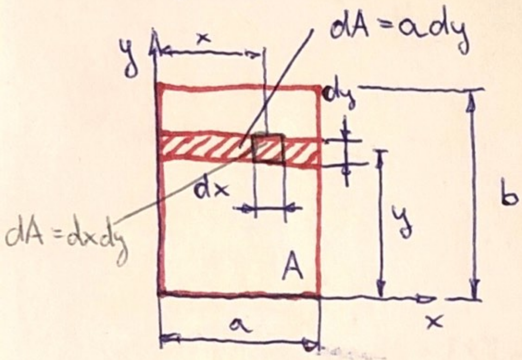
Az 1-es főtengelyre a síkidom másodrendű nyomatéka a legnagyobb, míg a 2-es főtengelyre a legkisebb. Ezek alapján:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

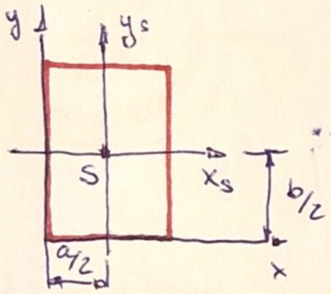
Az 1-es főtengely helyzete az x tengelyhez képest:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right)$$

12.1 Téglalap:



- $I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^b y^2 a\, dy = \left[a\frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$
- $I_y = \frac{ba^3}{3}$
- $I_{xy} = \int_{(A)} xy\, dA = \int_{(A)} xy(dx\,dy) = \int_0^a x\,dx \cdot \int_0^b y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a^2b^2}{4}$

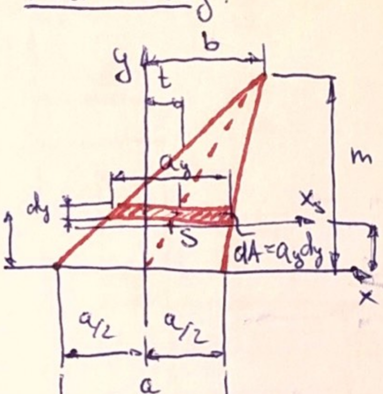


$$I_{xs} = I_x - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \underbrace{(a\,b)}_{=A} = \frac{ab^3}{12}$$

– mert a súlyponti tengelyre a minimális

$$I_{ys} = \frac{ba^3}{12} \qquad I_{x_s y_s} = 0$$

12.2 Háromszög:

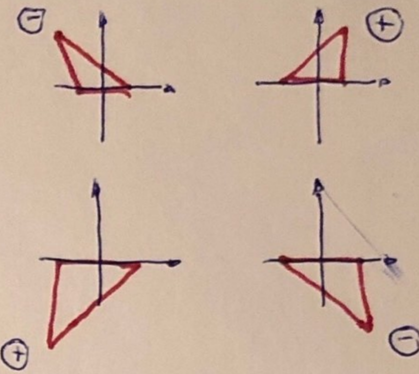


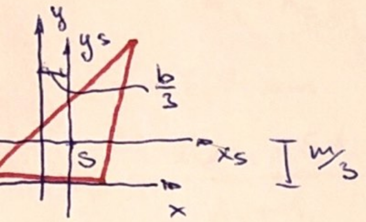
$$a_y = a - \frac{a}{m}y \qquad \begin{matrix} y = 0 & a_y = a \\ y = m & a_y = 0 \end{matrix}$$

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA = \int_0^m y^2 a_y\, dy = \int_0^m y^2\left(a - \frac{a}{m}y\right) dy = \dots = \frac{am^3}{12}$$

$$I_{xs} = I_x - \left(\frac{m}{3}\right)^2\left(\frac{a \cdot m}{2}\right) = \frac{am^3}{36}$$

$t = \frac{b}{m} y \quad \Rightarrow \quad I_{xy} = \int_{(A)} xy\,dA = \int_0^m t y a_y\,dy = \frac{abm^3}{12}$





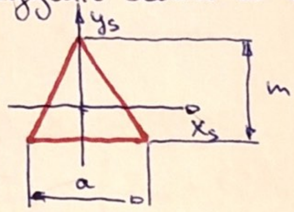
$I \ {}^{m}/_{3}$

$I_{x_s y_s} = I_{xy} - \left(-\frac{b}{3}\right)\left(-\frac{m}{3}\right)\left(\frac{am}{2}\right)$

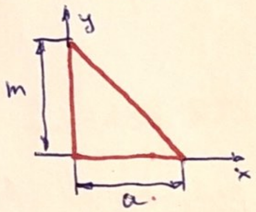
$= \frac{abm^2}{36}$

Megjegyzés:

Egyenlő szárú Δ esetén

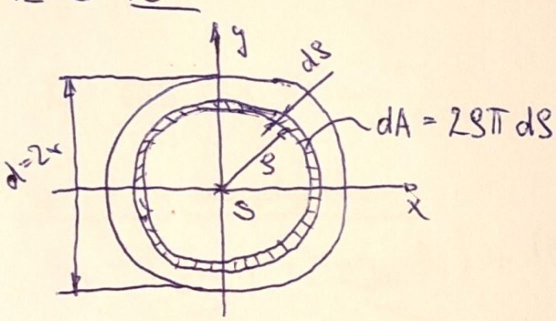


$I_{x_s} = \frac{am^3}{36} \quad I_{y_s} = \frac{ma^3}{48} \quad I_{x_s y_s} = 0$



$I_x = \frac{am^3}{12} \quad I_y = \frac{ma^3}{12} \quad I_{xy} = \frac{m^2 a^2}{24}$

12.3 Kör



Most: poláris másodrendű nyomaték:

$I_p = I_x + I_y$

$I_p = \int_{(A)} \varrho^2 dA = \int_0^r \varrho^2 2\pi \varrho\, d\varrho = \frac{d^4 \pi}{32}$

$\Rightarrow$ szimmetria miatt: $I_x = I_y \quad \Rightarrow \quad I_p = 2 I_x$

$\Rightarrow I_x = I_y = \frac{d^4 \pi}{64} \quad I_{xy} = 0$

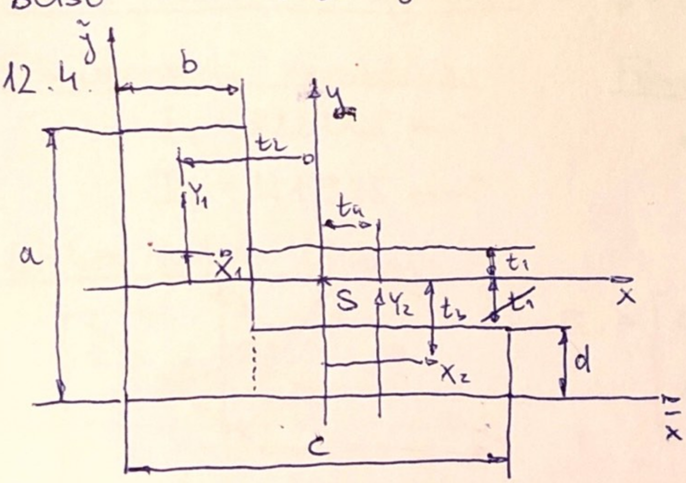
Körgyűrű esetén:

külső átmérő: D

belső — " — : d

$\Rightarrow \quad I_x = I_y = \frac{D^4 \pi}{64} - \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}$

12.4



Adatok:

a = 40 mm

b = 20 mm

c = 80 mm

d = 10 mm

Feladatok:

- Súlypont!
- I_x, I_y, I_{xy}, I_p ?
- $I_1, I_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ = ?

Súlypont:

$$\tilde{x}_s = \frac{10A_1 + 50A_2}{A_1 + A_2} \quad \text{ahol} \quad A_1 = 20 \cdot 40 = 800\ mm^2$$

$$A_2 = 60 \cdot 10 = 600\ mm^2$$

$$\tilde{x}_s = 27{,}14\ mm$$

$$\tilde{y}_s = \frac{20A_1 + 5A_2}{A_1 + A_2} = 13{,}57\ mm$$

Másodrendű nyomatékok: (súlyponti tengelyekre)

$t_1 = 6{,}43\ mm$ $\quad t_3 = 8{,}57\ mm$

$t_2 = 17{,}14\ mm$ $\quad t_4 = 22{,}86\ mm$

Az x tengelyre:

$$I_x = \left(I_{x1} + t_1^2 A_1\right) + \left(I_{x2} + t_3^2 A_2\right), \text{ ahol} \quad I_{x1} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106\,666{,}67\ mm^4$$

$$I_{x2} = \frac{60 \cdot 10^3}{12} = 5000\ mm^4$$

$$I_x = 188\,809{,}52\ mm^4$$

Az y tengelyre:

$$I_y = \left(I_{Y1} + t_2^2 A_1\right) + \left(I_{Y2} + t_4^2 A_2\right), \text{ ahol} \quad I_{Y1} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 26\,666{,}67\ mm^4$$

$$I_{Y2} = \frac{10 \cdot 60^3}{12} = 180\,000\ mm^4$$

$$I_y = 755\,238{,}10\ mm^4$$

Az x-y tengelypárra:

$$I_{xy} = \left(\underbrace{I_{x1Y1}}_{=0} + x_{s1}y_{s1} A_1\right) + \left(\underbrace{I_{x2Y2}}_{=0} + x_{s2}y_{s2} A_2\right)$$

előjelesek az x-y-ban

$x_{s1}y_{s1} = t_1(-t_2)$

$x_{s2}y_{s2} = (-t_3)\,t_4$

$$I_{xy} = -205\,714{,}29\ mm^4$$

Poláris másodrendű nyomaték: $I_p = I_x + I_y = 944\,047{,}62\ mm^4$

Főmásodrendű nyomatékok:

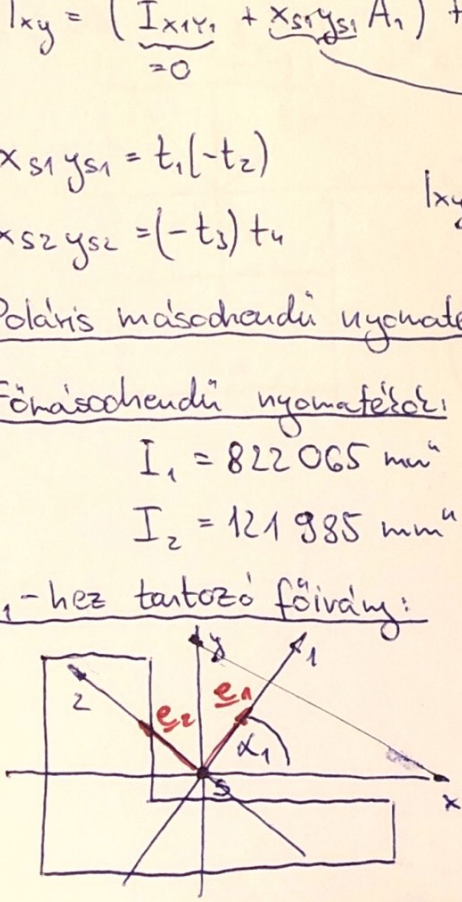
$I_1 = 822\,065\ mm^4$

$I_2 = 121\,985\ mm^4$

Főirány:

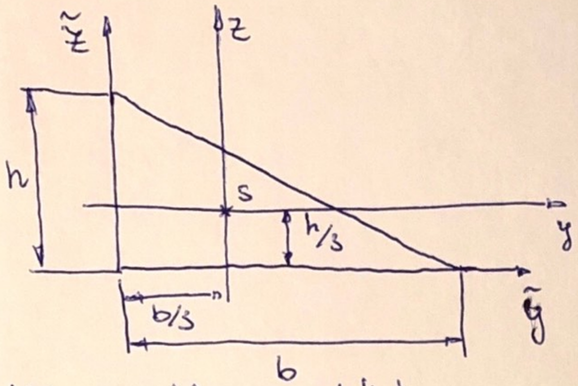
$\alpha_1 = 1{,}2567\ rad \approx 72°$

I_1-hez tartozó főirány:



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}951 \\ 0{,}309 \end{bmatrix}$$

12.5 Háromszög:



- Másodrendű nyomatékok!
- Fő másodrendű nyomatékok főtengelyekkel!

Másodrendű nyomatékok:

$$I_{\tilde{y}} = \frac{bh^3}{12} \quad I_{\tilde{z}} = \frac{hb^3}{12} \quad I_{\tilde{y}\tilde{z}} = \frac{b^2h^2}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{b^2h^2}{24}$$

A súlyponti (y, z) tengelyekre:

$$I_y = I_{\tilde{y}} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 A = \frac{bh^3}{36} \qquad I_z = I_{\tilde{z}} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 A = \frac{hb^3}{36}$$

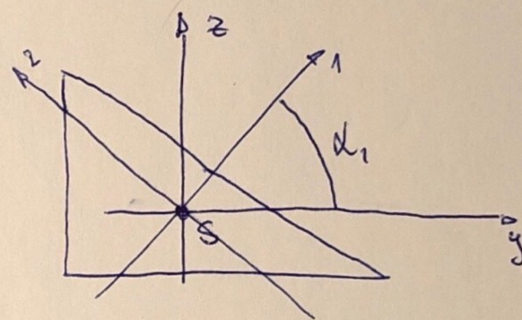
$$I_{yz} = I_{\tilde{y}\tilde{z}} - \left(-\frac{b}{3}\right)\left(-\frac{h}{3}\right)A = -\frac{b^2h^2}{72}$$

Numerikusan:

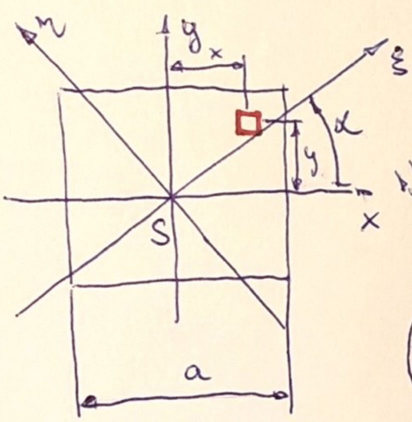
$b = 75$ mm $\qquad I_1 = 367\,448{,}95$ mm^4

$h = 30$ mm $\qquad I_2 = 40\,363{,}55$ mm^4

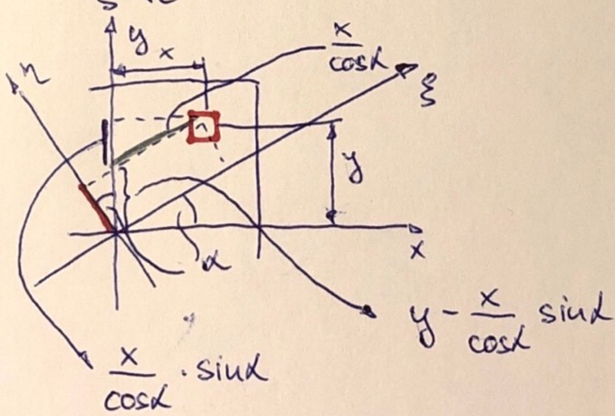
$\alpha_1 = 77{,}27°$



12.6



Határozzuk meg a négyzet másodrendű nyomatékát ξ-re!



$y\cos\alpha - x\sin\alpha$

$$I_\xi = \int_{(A)} (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2\, dA =$$

$$= \int (\underbrace{y^2}_{I_x}\cos^2\alpha - 2\underbrace{xy}_{I_{xy}}\sin\alpha\cos\alpha + \underbrace{x^2}_{I_y}\sin^2\alpha)\, dA$$

$$\Rightarrow I_\xi = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2\underbrace{I_{xy}}_{=0}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$I_\xi = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha$$

négyzet miatt $I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$

$$I_\xi = \frac{a^4}{12} \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{=1}$$

$$\underline{I_\xi} = \frac{a^4}{12} \Rightarrow$$ minden irány főtengely (akár körnél)!