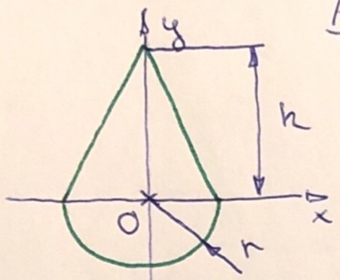
Súlypont számítása:

11.1



Adatok:

$r = 0{,}5\,m$

$h = 1\,m$

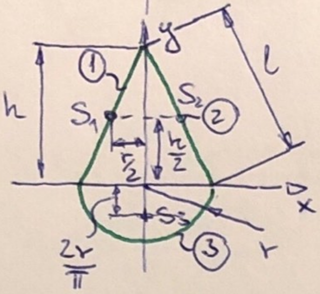
Határozzuk meg az ábrán látható test súlypontjának a helyét, ha a test

a, két egyenes és egy félkör alakú rúdból áll!

b, egy háromszög és egy félkör alakú lemezből áll!

c, azonos sűrűségű körkúpból és félgömbből áll!

a)



1-es rúd súlyponti koordinátái:

$x_{s1} = -\frac{r}{2}$

$y_{s1} = h/2$

2-es rúd súlyponti koordinátái:

$x_{s2} = r/2$

$y_{s2} = h/2$

3-as rúd súlyponti koordinátái:

$x_{s3} = 0$

$y_{s3} = -\frac{2r}{\pi}$

Rúdhosszak:

$l_1 = \sqrt{r^2 + h^2} \cong 1{,}118\,m \cong l_2$

$l_3 = r\pi \cong 1{,}571\,m$

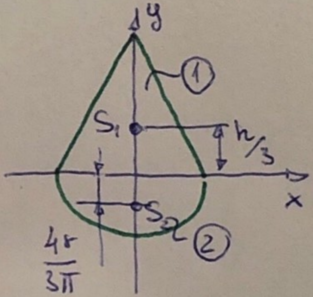
Súlyponti koordináták (azonos keresztmetszet esetén)

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{si} l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{si} l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i}$$

$$x_s = \frac{x_{s1} l_1 + x_{s2} l_2 + x_{s3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{-\frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} + \frac{r}{2}\sqrt{r^2+h^2} + 0 r\pi}{2\sqrt{r^2+h^2} + r\pi} = \underline{\underline{0\,m}}$$

$$y_s = \frac{y_{s1} l_1 + y_{s2} l_2 + y_{s3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{h/2\sqrt{r^2+h^2} + \frac{h}{2}\sqrt{r^2+h^2} + \left(-\frac{2r}{\pi}\right) r\pi}{2\sqrt{r^2+h^2} + r\pi} = \underline{\underline{0{,}162\,m}}$$

b)



1-es lemez súlypontja

$x_{s1} = 0\,m$

$y_{s1} = h/3$

2-es lemez súlypontja

$x_{s2} = 0\,m$

$y_{s2} = -\frac{4r}{3\pi}$

Lemezek területe:

$A_1 = \frac{2rh}{2} = rh = 0{,}5\,m^2$

$A_2 = \frac{r^2\pi}{2} = 0{,}393\,m^2$

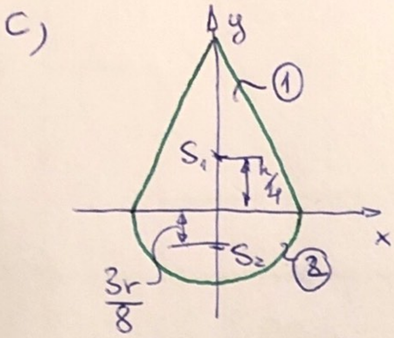
Állandó vastagságú homogén test súlyponti koordinátái:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_{si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i} \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$$x_s = \frac{x_{s1} A_1 + x_{s2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 rh + 0 \frac{r^2\pi}{2}}{rh + \frac{r^2\pi}{2}} = \underline{\underline{0\,m}}$$

$$y_s = \frac{y_{s1}A_1 + y_{s2}A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{h}{3} rh - \frac{4r}{3\pi}\frac{r^2\pi}{2}}{rh + \frac{r^2\pi}{2}} = \frac{2(h^2-2r^2)}{6h+3r\pi} = \underline{\underline{0{,}0933\ m}}$$

c)



Kúp súlyponti koordinátái:

$x_{s1} = 0$ m

$y_{s1} = h/4$

Félgömb súlyponti koordinátái:

$x_{s2} = 0$ m

$y_{s2} = -\frac{3r}{8}$

Térfogatok:

$V_1 = \frac{r^2 h \pi}{3} = 0{,}262\ m^3$

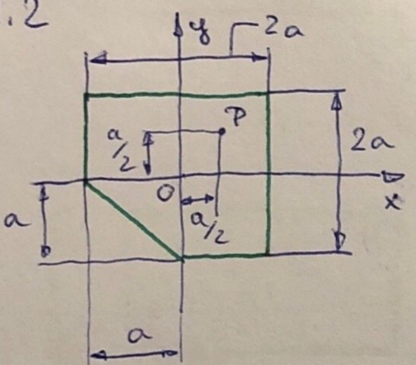
$V_2 = \frac{2r^3\pi}{3} = 0{,}524\ m^3$

A homogén sűrűségű test súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_{si}V_i}{\sum_{i=1}^{2} V_i} \qquad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{2} y_{si}V_i}{\sum_{i=1}^{2} V_i}$$

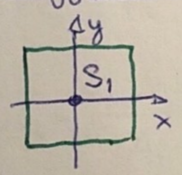
$$x_s = \frac{x_{s1}V_1 + x_{s2}V_2}{V_1+V_2} = \underline{\underline{0\,m}} \qquad y_s = \frac{y_{s1}V_1 + y_{s2}V_2}{V_1+V_2} = \underline{\underline{0{,}03125\ m}}$$

11.2



Mekkora furatot kell az állandó vastagságú lemez P pontjába fúrni, hogy a lemez súlypontja az O-ban legyen?

Négyzetes lemez súlyponti koordinátái és területe:

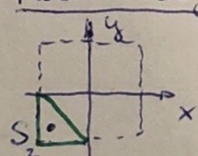


$x_{s1} = 0$

$y_{s1} = 0$

$A_1 = (2a)^2 = 4a^2$

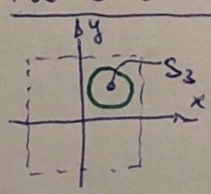
Háromszög lemez súlyponti koordinátái és területe:



$x_{s2} = -\frac{2}{3}a \qquad A_2 = \frac{a^2}{2}$

$y_{s2} = -\frac{2}{3}a$

Furat (kör kivágás) súlyponti koordinátái és területe:



$x_{s3} = a/2 \quad y_{s3} = \frac{a}{2}$

$A_3 = R^2\pi$

A kifúrt lemez súlypontja:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{x_{s1}A_1 - x_{s2}A_2 - x_{s3}A_3}{A_1 - A_2 - A_3} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{0\cdot 4a^2 - \left(-\frac{2}{3}a\right)\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}R^2\pi}{4a^2 - a^2/2 - R^2\pi} = 0 \end{aligned}\right\}$$

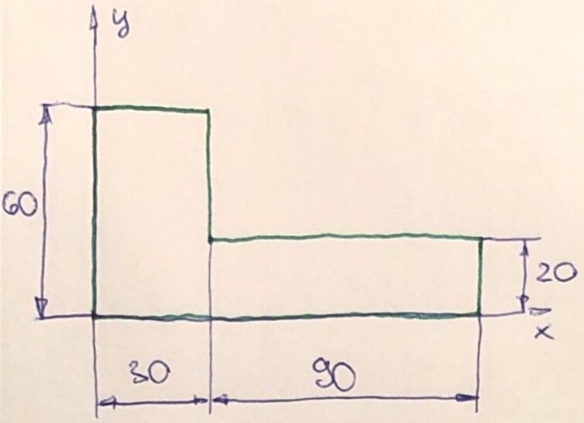
R-re megoldva:

$$R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,a \cong \underline{\underline{0{,}46\,a}}$$

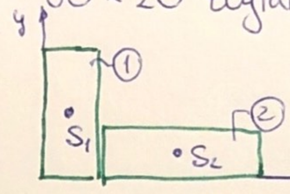
$y_s = 0$-t megoldva ugyanez adódik

11.3

Határozzuk meg az ábrán látható síkidom súlypontjának a helyét két különböző felosztással!



a) Az első felosztással egy 30 × 60 és egy 90 × 20 téglalapra bontjuk a síkidomot!



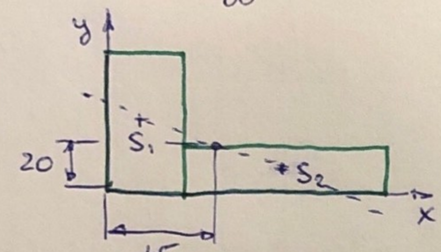
$x_{S1} = 15 \quad y_{S1} = 30 \quad A_1 = 1800$

$x_{S2} = 75 \quad y_{S2} = 10 \quad A_2 = 1800$

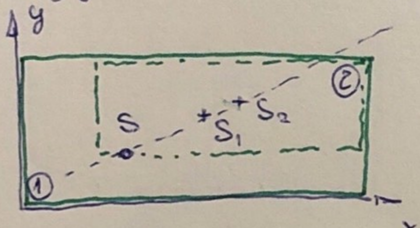
$$x_S = \frac{x_{S1} A_1 + x_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = 45$$

$$y_S = \frac{y_{S1} A_1 + y_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = 20$$

A súlypont helye az S_1 és S_2 pontokat összekötő egyenesen helyezkedik el:



b) Egy 120×60-as téglalapból kivonjuk a 90×40-es téglalapot

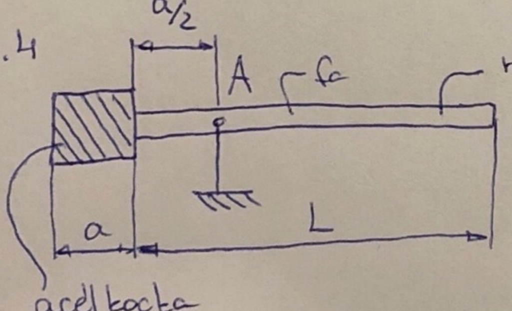


$x_{S1} = 60 \quad y_{S1} = 30 \quad A_1 = 7200$

$x_{S2} = 75 \quad y_{S1} = 40 \quad A_2 = 3600$

$$x_S = \frac{x_{S1} A_1 - x_{S2} A_2}{A_1 - A_2} = 45 \qquad y_S = \frac{y_{S1} A_1 - y_{S2} A_2}{A_1 - A_2} = 20$$

11.4



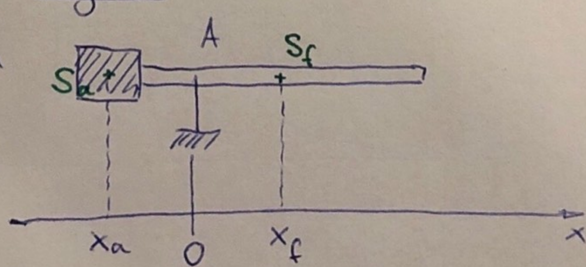
négyzet keresztmetszet (b mérettel)

Mekkora legyen L, ha azt akarjuk, hogy A-ban egyensúlyban legyen?

Adatok: $a = 12\,cm \quad \rho_{acél} = 7800\,kg/m^3$

$b = 40\,mm \quad \rho_{fa} = 600\,kg/m^3$

Megoldás:



Egyensúly esetén az A pontban van a szerkezet súlypontja, tehát ide számított „statikai nyomaték" zérus:

$$\frac{x_a m_a + x_f m_f}{m_a + m_f} = 0$$

$\Rightarrow x_a = -a = -0{,}12\,m \qquad m_a = V_a \rho_{acél} = a^3 \rho_{acél}$

$= 13{,}4784\,kg$

$x_f = L/2 - \frac{a}{2} = (L - 0{,}12)/2\,m$

$m_f = V_f \rho_{fa} = 0{,}96 L\,kg$

$$-0{,}12 \cdot 13{,}4784 + \frac{1}{2}(L - 0{,}12) \cdot 0{,}96L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0{,}48L^2 - 0{,}0576L - 1{,}61741 = 0 \quad \rightarrow \quad L = \underline{\underline{1{,}89}}\ m$$