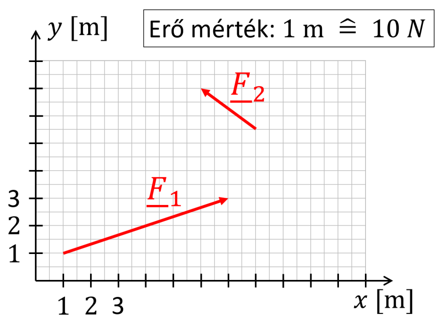
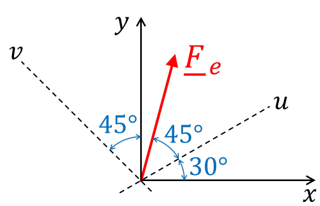
1. Gyakorlat

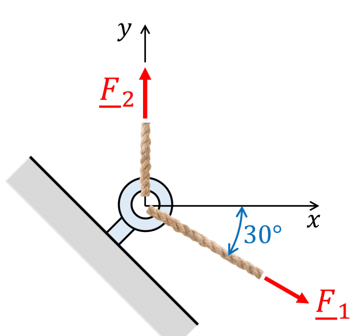
1.1. Példa. Egy merev testet az ábrán megadott $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ erők terhelik. Helyettesítsük a két erőt az eredőjével, és adjuk meg az eredő erő hatásvonalának egy pontját! Milyen szöget zár be az eredő hatásvonala az x-tengellyel? A megoldást állítsuk elő szerkesztéssel és számítással is!
Megoldás: $\boldsymbol{F}_e = 40\boldsymbol{i} + 35\boldsymbol{j}$ N; $P\,(10,4)$; $\alpha = 41,19°$.



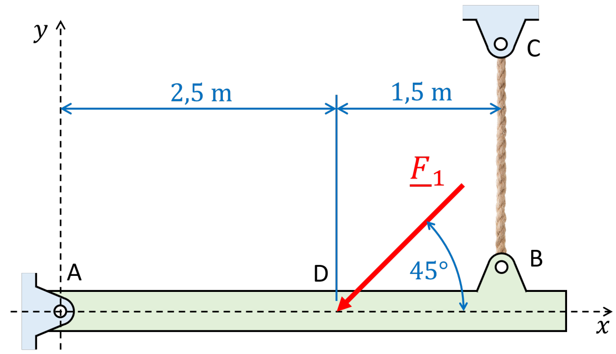
1.2. Példa. Egy merev testre ható erő iránya és értelme az ábra szerinti, nagysága $F_e = |\boldsymbol{F}_e| = 1000$ N. Bontsuk fel az erőt a megadott u és v hatásvonalakba eső komponensekre! Írjuk fel ezen komponensek nagyságát. A megoldást állítsuk elő szerkesztéssel és számítással is!
Megoldás: $F_u = 897$ N; $F_v = 732$ N.



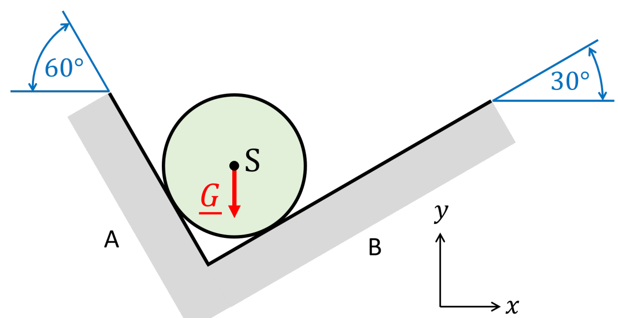
1.3. Példa. Mekkora legyen az $\boldsymbol{F}_1$ erő nagysága ha azt szeretnénk, hogy a kötelekről átadódó erők eredőjének ne legyen függőleges komponense? Mekkora ekkor a kötelekről átadódó eredő erő x-irányú összetevője? Az $\boldsymbol{F}_2$ erő nagysága 2 kN.
Megoldás: $F_1 = 4$ kN; $F_{ex} = 3,464$ kN.



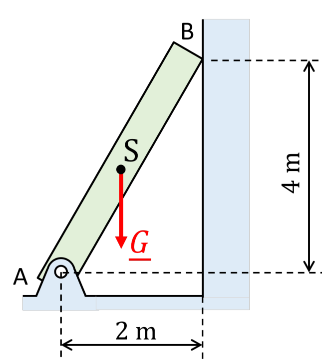
1.4. Példa. A vízszintes rúd az A helyen csuklósan van megfogva, B helyen pedig kötéllel van felfüggesztve. A rudat a D pontjában a berajzolt $F_1 = 3$ kN nagyságú erő terheli úgy, hogy a rúd, a fonál és az erő közös síkban fekszik. A rúd és fonál súlyától eltekinthetünk. Mekkora erő adódik át a rúdra az A csuklónál egyensúly esetén? Mekkora a kötélben ébredő erő?
Megoldás: $\boldsymbol{F}_A = 2121,32\boldsymbol{i} + 795,495\boldsymbol{j}$ N; $F_B = 1325,83$ N.



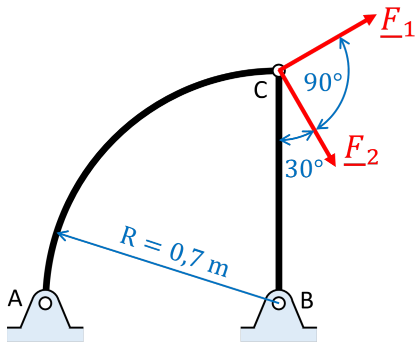
1.5. Példa. Két teljesen sima és a rajz síkjára merőleges síklap által alkotott vályuba $G = 10$ N súlyú korongot helyezünk. Határozzuk meg az A és B falakról átadódó erőket! Mekkora minimális F nagyságú vízszintes erőt kell működtetnünk a korong S súlypontjában ahhoz, hogy az A falban a reakcióerőt zérusra csökkentsük? Mekkora ekkor a B falban ébredő reakcióerő?
Megoldás: $F_A = 5$ N; $F_B = 8,66$ N; $F = 5,77$ N; F alkalmazásakor $F_B = 11,55$ N.



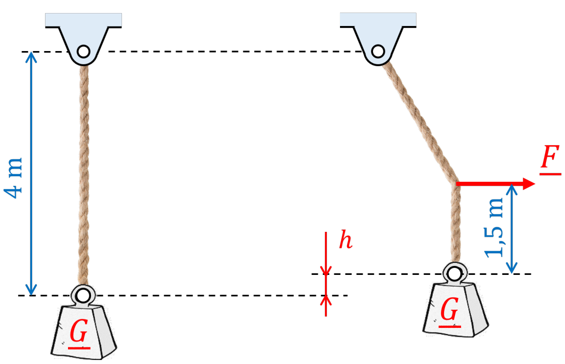
1.6. Példa. A $G = 500$ N súlyú rúd A vége csuklósan rögzített, B vége a teljesen sima falnak támaszkodik. Határozzuk meg a reakcióerőket szerkesztéssel és számítással!
Megoldás: $\boldsymbol{F}_A = 125\boldsymbol{i} + 500\boldsymbol{j}$ N; $F_A = 515,388$ N, $F_B = 125$ N.



1.7. Példa. A negyedkörív alakú AC és a függőleges egyenes BC merev rudak csuklósan kapcsolódnak egymáshoz, valamint csuklósan vannak rögzítve az A és B helyeken. A szerkezetet a C csuklóban működő $F_1 = 700$ N és $F_2 = 1200$ N nagyságú erők terhelik. Határozza meg az $\boldsymbol{F}_A$ és $\boldsymbol{F}_B$ reakcióerőket!
Megoldás: $\boldsymbol{F}_A = -1206,22\boldsymbol{i} - 1206,22\boldsymbol{j}$ N; $\boldsymbol{F}_B = 1895,45\boldsymbol{j}$ N.



1.8. Példa. A $G = 1500$ N súlyú terhet a súlytalannak tekinthető kötél tartja, aminek a teher hatására bekövetkező hosszváltozását elhanyagolhatjuk. Mekkora F nagyságú vízszintes erőt kell a megadott helyen működtetni ahhoz, hogy a terhet 10 cm-rel megemeljük? Írjuk fel paraméteresen a F/G arány változását a h függvényében és elemezzük a megoldást!
Megoldás: $F = 437,5$ N; $F/G = \sqrt{5h - h^2}/(2,5 - h)$.



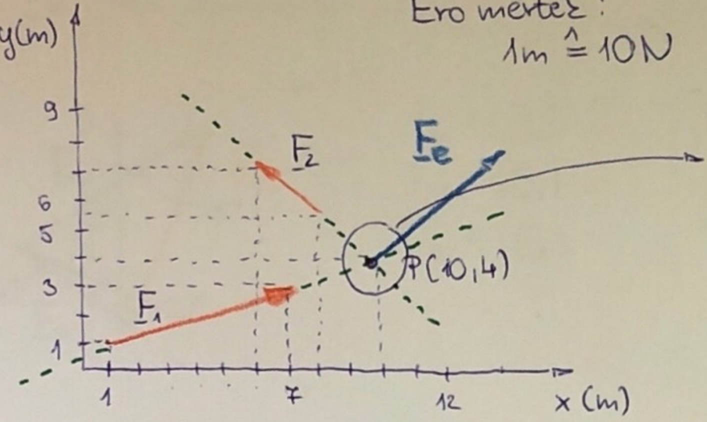
Bemutatkozás:

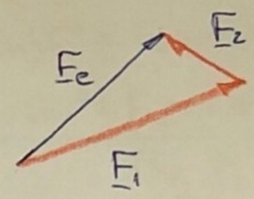
beri@mm.bme.hu

Három erő egyensúlya:

1.1

Erő mérték: $1m \hat{=} 10N$





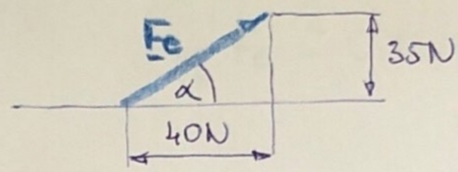
Lemérve:

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix} N$$

$$F_e = |\underline{F}_e| \cong 53N$$

$$\left(= \sqrt{40^2 + 35^2}\right)$$

x tengellyel bezárt szög:



$$\tan\alpha = \frac{35}{40}$$

$$\alpha = \arctan\frac{35}{40}$$

$$\alpha = \underline{\underline{41{,}19°}}$$

Számítás:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -20 \\ 15 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 40 \\ 35 \end{bmatrix}}} N$$

Hatásvonalak metszéspontja:

$\underline{F}_1$ támadáspontjába mutató $\underline{r}_1$ helyvektor: $\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} m$

$\underline{F}_2$ —— " —— $\underline{r}_2$ — " — : $\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5{,}5 \end{bmatrix} m$

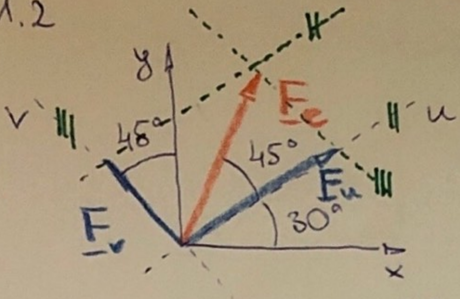
$$\underline{r}_1 + \lambda_1 \underline{F}_1 = \underline{r}_2 + \lambda_2 \underline{F}_2 = \underline{r}_p$$

$$\begin{bmatrix} 1 + 60\lambda_1 \\ 1 + 20\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 20\lambda_2 \\ 5{,}5 + 15\lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -7 + 60\lambda_1 + 20\lambda_2 &= 0 \\ -4{,}5 + 20\lambda_1 - 15\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 0{,}15 \\ \lambda_2 &= -0{,}1 \end{aligned}$$

Tehát

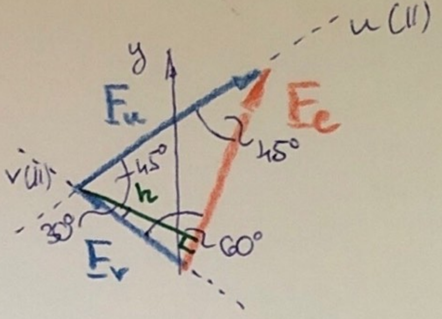
$$\underline{r}_p = \underline{r}_1 + \lambda_1 \underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} m$$

1.2



$F_e = |\underline{F}_e| = 1000\,N$ Lemérve: $F_u = |\underline{F}_u| \approx 896\,N$

$F_v = |\underline{F}_v| \approx 732\,N$



$F_u = |\underline{F}_u|$

$F_v = |\underline{F}_v|$

$F_e = |\underline{F}_e|$

$$F_u \sin 45° = F_v \sin 60°$$

$$F_v \cos 60° + F_u \cos 45° = F_e$$

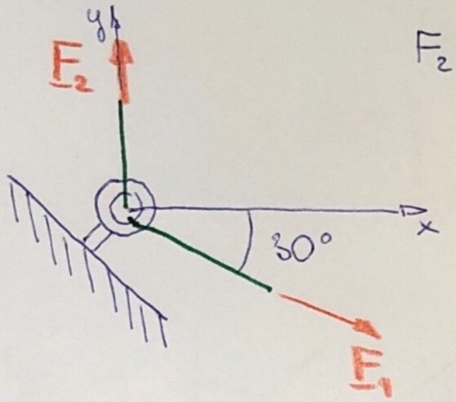
$$\frac{1}{\sqrt{2}} F_u = \frac{\sqrt{3}}{2} F_v$$

$$\frac{1}{2} F_v + \frac{1}{\sqrt{2}} F_u = F_e$$

$$F_u = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} F_e \cong 0{,}897 F_e = 897\,N$$

$$F_v = \frac{2}{1+\sqrt{3}} F_e \cong 0{,}732 F_e = 732\,N$$

1.3



$F_2 = 2\,kN$

$$\underline{F}_1 = F_1 \begin{bmatrix} \cos(-30°) \\ \sin(-30°) \end{bmatrix} \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2000 \end{bmatrix} N$$

Feltétel: $F_{ey} = 0$

$$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_1 \cos(-30°) \\ F_1 \sin(-30°) + 2000 \end{bmatrix} (=0)$$

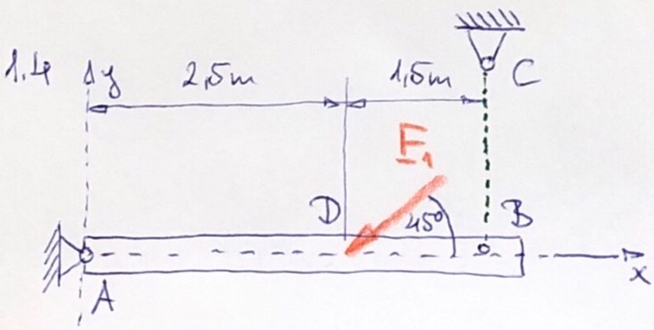
Tehát:

$$F_{ey} = F_1 \sin(-30°) + 2000 \; (=0)$$

$$F_1 = -\frac{2000}{\sin(-30°)} = \underline{\underline{4000\,N}}$$

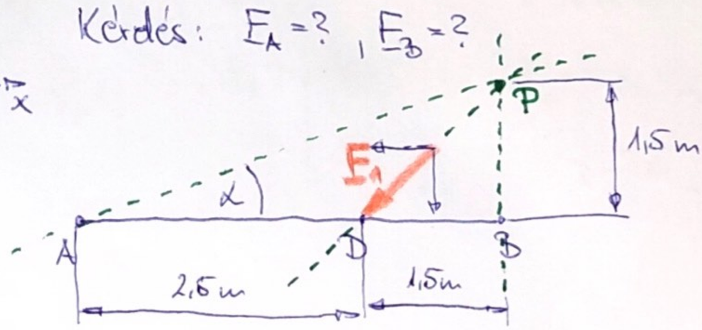
$$F_{ex} = F_1 \cos(-30°) = \underline{\underline{3464{,}1\,N}}$$

1.4

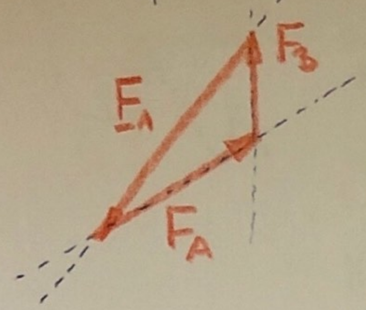


$F_1 = 3\,kN$

Kérdés: $\underline{F}_A = ?$, $\underline{F}_B = ?$



$\alpha = \arctan \frac{1,5}{4} = 20,56°$



Számítással:

$$\underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{F}_1 = \underline{0}$$

$$\begin{array}{l} x: \\ y: \end{array} \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha \\ F_A \sin\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_1 \cos 45° \\ -F_1 \sin 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x: \quad F_A \cos\alpha - F_1 \cos 45° = 0$$

$$F_A = \frac{F_1 \cos 45°}{\cos\alpha} = \underline{\underline{2265,57 N}}$$

$$y: \quad F_A \sin\alpha + F_B - F_1 \sin 45° = 0$$

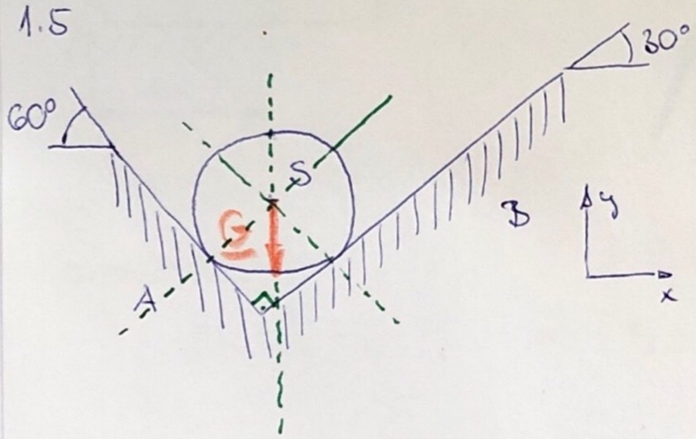
$$F_B = F_1 \sin 45° - F_A \sin\alpha = \underline{\underline{1325,83 N}}$$

Keresett erők:

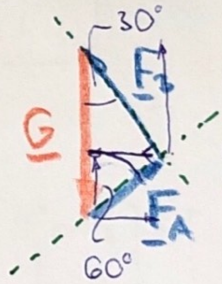
$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha \\ F_A \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2121,32 \\ 795,495 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1325,83 \end{bmatrix} N$$

1.5



$G = 10N$



Számítással:

$$x: \quad F_A \sin 60° = F_B \sin 30°$$

$$y: \quad F_A \cos 60° + F_B \cos 30° = G$$

$$\Downarrow$$

$$F_A = G/2 = 5N$$

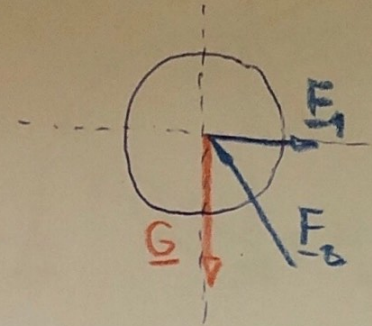
$$F_B = \sqrt{3}/2\, G = 8,66N$$

Megj.: $\underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{G} = \underline{0}$ (2 egy.)

$$\begin{bmatrix} F_A \sin 60° \\ F_A \cos 60° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_B \cos 120° \\ F_B \sin 120° \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} 4,33 \\ 2,5 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} -4,33 \\ 7,5 \end{bmatrix} N$$

$\underline{F}_1$ erő alkalmazásakor $\underline{F}_A = \underline{0}$



$$\underline{F}_1 + \underline{F}_B + \underline{G} = \underline{0}$$

$$\begin{array}{c} x: \\ y: \end{array} \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_B \cos 120^\circ \\ F_B \sin 120^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y: \quad F_B \sin 120^\circ - G = 0$$

$$F_B = \frac{G}{\sin 120^\circ} \cong \underline{\underline{11{,}55\ N}}$$

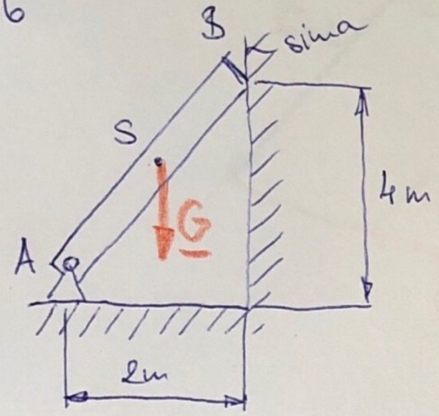
$$x: \quad F_1 + F_B \cos 120^\circ = 0$$

$$F_1 = -F_B \cos 120^\circ = \underline{\underline{5{,}77\ N}}$$

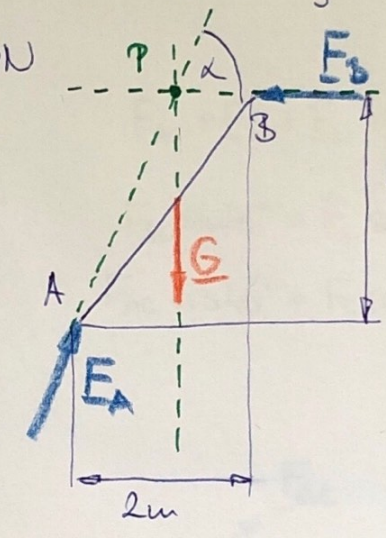
Tehát:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 5{,}77 \\ 0 \end{bmatrix} N \ ; \quad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} -5{,}77 \\ 10 \end{bmatrix} N$$

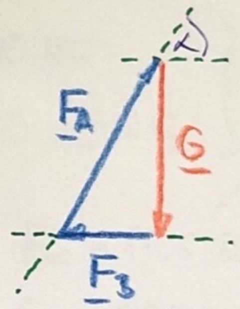
1.6



$G = 500N$



$$\alpha = \arctan \frac{4}{1} = \cancel{75{,}96^\circ}$$



Lemérve: $F_A \cong 515{,}4N$

$F_B \cong 125\ N$

<u>Számítással:</u>

$$\underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{G} = \underline{0} \quad \Rightarrow \begin{array}{c} x: \\ y: \end{array} \begin{bmatrix} F_A \cos\alpha \\ F_A \sin\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F_B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

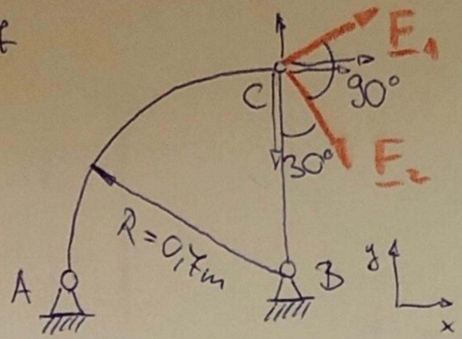
$$y: \quad F_A = \frac{G}{\sin\alpha} = 515{,}388\ N$$

$$x: \quad F_B = F_A \cos\alpha = 125\ N$$

Tehát:

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} 125 \\ 500 \end{bmatrix} N \quad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} -125 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

1.7



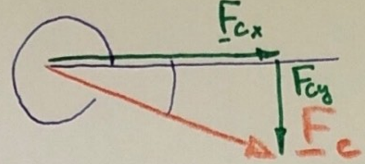
$F_1 = 700N$

$F_2 = 1200N$

$\underline{F}_A = ?$

$\underline{F}_B = ?$

$$\underline{F}_c = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = F_1 \begin{bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{bmatrix} + F_2 \begin{bmatrix} \cos 300° \\ \sin 300° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1206{,}22 \\ -689{,}23 \end{bmatrix} N$$

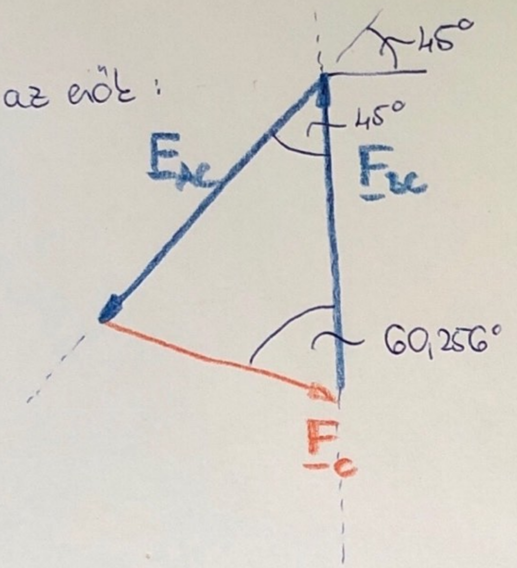


$$\alpha = 360° - \arctan \frac{689{,}23}{1206{,}22} = \underline{\underline{330{,}256°}}$$

Nagysága:

$$F_c = |\underline{F}_c| = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = \underline{\underline{1389{,}24N}}$$

C-ben az erők:

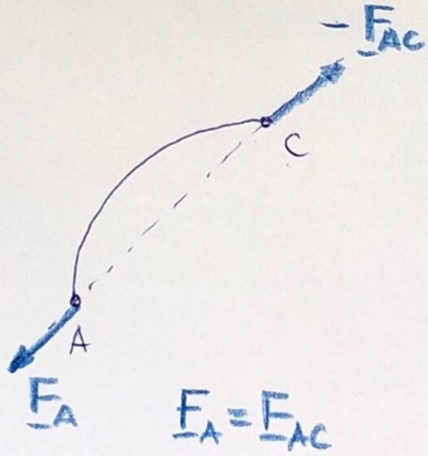


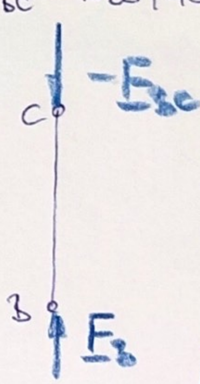
$$\underline{F}_{AC} + \underline{F}_{BC} + \underline{F}_c = \underline{0}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{AC} \sin 45° &= F_c \sin 60{,}256° \\ F_{AC} \cos 45° + F_c \cos 60{,}256° &= F_{BC} \end{aligned}\right\}$$

$F_{AC} = 1705{,}85N$

$F_{BC} = 1895{,}45N$



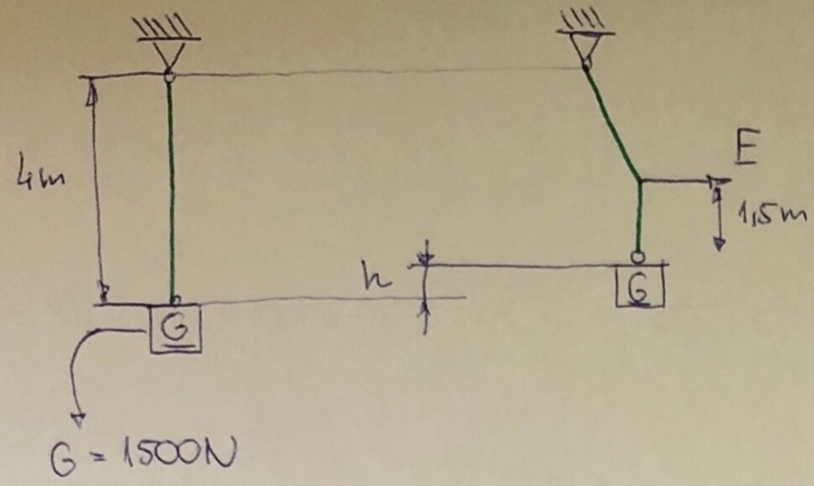


$\underline{F}_A = \underline{F}_{AC}$

$\underline{F}_B = \underline{F}_{BC}$

Tehát: $\underline{F}_A = \begin{bmatrix} -1206{,}22 \\ -1206{,}22 \end{bmatrix} N$ $\quad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1895{,}45 \end{bmatrix} N$

1.8



$h = 10\,cm \Rightarrow F = ?$

F/G arány paraméteresen h függvényében?