Elméleti összefoglaló:

Perdülettétel álló referenciapontra:

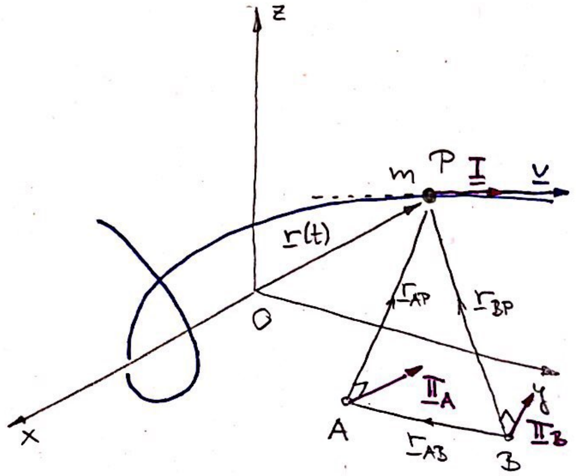
Ha vektoriálisan szorozzuk az $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$ egyenletet, egy kiválasztott pontból a vizsgált anyagi ponthoz húzott helyvektorral, bevezetendő a perdületvektor.

Def: A P geometriai pontban található, $\underline{I}$ impulzusú anyagi pont A pontra számított perdülete:

$$\underline{\Pi}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{I} .$$

Mivel a perdület az impulzus adott pontra számított nyomatéka, ezért impulzusnyomatéknak is nevezik.

A perdületet mindig valamilyen referenciapontra kell megadni, ugyanúgy, mint a nyomatékot.



Tétel: Anyagi pont impulzusa és perdülete vektorkettőst alkot: $[\underline{I}; \underline{\Pi}_B]_B$

$$\underline{\Pi}_B = \underline{\Pi}_A + \underline{r}_{BA} \times \underline{I}$$

Perdület idő szerinti deriváltja:

$$\dot{\underline{\Pi}}_A = \dot{\underline{r}}_{AP} \times \underline{I} + \underline{r}_{AP} \times \dot{\underline{I}}$$

ahol $\underline{r}_{AP} = \underline{r} - \underline{r}_A$ és $\underline{I} = m\underline{v}$.

Álló-nak tekintett inerciarendszerből nézve a P pontban levő anyagi pont sebessége $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$, az A pont sebessége pedig $\underline{v}_A = \dot{\underline{r}}_A$, ezért

$$\dot{\underline{r}}_{AP} \times \underline{I} = \frac{d}{dt}(\underline{r} - \underline{r}_A) \times m\underline{v} = (\underline{v} - \underline{v}_A) \times m\underline{v} = \underbrace{\underline{v} \times m\underline{v}}_{=\underline{0}} - \underline{v}_A \times m\underline{v} = -\underline{v}_A \times \underline{I}$$

Tehát a perdület deriváltja

$$\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{r}_{AP} \times \dot{\underline{I}} - \underline{v}_A \times \underline{I}$$

Ebből látszik, hogy álló pontra: $\underline{v}_A = \underline{0}$ mellett

$$\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{r}_{AP} \times \dot{\underline{I}}$$

A dinamika alaptétele alapján

$$\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{F}$$

Az $\underline{F}$ erő A pontra számított nyomatéka jelenik meg a jobb oldalon. Az anyagi pont A álló pontra számított perdületének deriváltja egyenlő az anyagi pontra ható erők A pontra számított nyomatékával:

$$\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{M}_A \quad , \text{ha } \underline{v}_A = \underline{0}$$

Def.: Anyagi pont centrális mozgása során az anyagi pontra ható erők hatásvonala mindig ugyanazon A álló ponton megy keresztül. Ha két anyagi pont között ható erők hatásvonala a testeket összekötő vektor hatásvonalába esik, akkor az ilyen erőket centrális erőknek nevezzük.

Megjegyzés: A perdület szó forgásra vagy keringésre utal, de forgásról csak kiterjedt testek esetében beszélhetünk, anyagi pontok forgását nem értelmezzük. Anyagi pont perdülete a helyvektor és az impulzus segítségével jellemzi a mozgást, a perdület nagysága független a pálya alakjától. Akkor is nullától különböző a perdület egy pályán kívül eső pontra számítva, ha az anyagi pont egyenes vonalú mozgást végez.

Tétel: Perdülettétel: Az A álló pontra számított perdület t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása egyenlő az ún. nyomatékimpulzussal:

$$\underline{\Pi}_A(t_2) - \underline{\Pi}_A(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}_A \, dt}_{\text{Nyomatékimpulzus}}$$

Megjegyzés: A $\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{M}_A$ összefüggést is perdülettételnek nevezzük (differenciális alak)

Következmény: A Perdületmegmaradás tétele: Ha a t_1 és t_2 időpontok között az anyagi pontra ható erők álló pontra számított nyomatéka nulla, akkor a perdület állandó marad:

$$\underline{M}_A = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Pi}_A(t_2) = \underline{\Pi}_A(t_1)$$

A Perdülettétel általánosítása tetszőlegesen mozgó referenciapont esetére:

Az $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$ egyenlet mindkét oldalát vektoriálisan szorozva egy $\underline{r}_{BP}$ vektorral – mely a tetszőleges, tehát nem feltétlenül álló B pontból mutat a tömegponthoz:

$$\underbrace{\underline{r}_{BP} \times \dot{\underline{I}}}_{\text{kinetikai nyomaték}} = \underline{M}_B$$

Def.: Anyagi pont B pontra számított kinetikai nyomatéka:

$$\underline{D}_B = \underline{r}_{BP} \times \dot{\underline{I}}$$

Tétel: Általánosított perdülettétel anyagi pontra:

$$\underline{D}_B = \underline{M}_B$$

tehát tetszőlegesen mozgó B pontra számított kinetikai nyomaték egyenlő az anyagi pontra ható erőrendszer B pontra számított nyomatékával.

Tétel: Anyagi pont impulzus deriváltja és kinetikai nyomatéka vektorkettőst alkot, az ún. kinetikai vektorkettőst: $[\dot{\underline{I}}\,;\underline{D}_B]_B$

Tétel: Kapcsolat a kinetikai nyomaték és a perdület deriváltja között

$$\dot{\underline{\Pi}}_B = \underline{r}_{BP} \times \dot{\underline{I}} + \dot{\underline{r}}_{BP} \times \underline{I}$$

azaz

$$\underline{D}_B = \dot{\underline{\Pi}}_B + \underline{v}_B \times \underline{I} \qquad \Rightarrow \text{Általánosított perdülettétel} \Rightarrow \dot{\underline{\Pi}}_B + \underline{v}_B \times \underline{I} = \underline{M}_B$$

Álló pontra ($\underline{v}_B = \underline{0}$) vagy a vizsgált pont sebességével párhuzamos sebességű pontra $\underline{v}_B \parallel \underline{v}_P$ azokban e két vektor megegyezik.

A merev testek kinetikája:

A dinamika alaptétele merev testre:

Mivel egy merev test szabadsági foka hat, a mozgás vizsgálatához elegendő az impulzus tétel és a perdülettétel hat skalár egyenlete.

Tétel: A dinamika alaptétele merev testre:

$$[\dot{\underline{I}}\,;\dot{\underline{D}}_B]_B = [\underline{F}\,;\underline{M}_B]_B$$

Az impulzustétel merev testre:

Def.: Egy m tömegű merev test súlypontjának helyvektora

$$\underline{r}_s = \frac{\int_{(m)} \underline{r}\,dm}{m}$$

ahol az $\underline{r}$ vektor egy adott térbeli referenciapontból mutat a test többi pontjába.

A koordináta-rendszer origóját a súlypontba tolva azonnal látszik, hogy ezzel egyenértékű az alábbi állítás:

Tétel: A súlypontra számított statikai nyomaték zérus, azaz

$$\int_{(m)} \underline{\rho}\,dm = \underline{0}$$

ahol a $\underline{\rho}$ vektor a test súlypontjából mutat a test többi pontjába.

Tétel: Merev test impulzusa

$$\underline{I} = \int_{(m)} \underline{v}\,dm = \int_{(m)} (\overbrace{\underline{v}_s}^{\text{súlyponti seb.}} + \underline{\omega}\times\underline{\rho})\,dm = \int_{(m)} \underline{v}_s dm + \underline{\omega}\times \underbrace{\int_{(m)} \underline{\rho}\,dm}_{=\underline{0}\ \text{(statikai nyomaték)}} = m\underline{v}_s$$

Tétel: Merev test impulzus deriváltja

$$\dot{\underline{I}} = \int_{(m)} \underline{a}\,dm = m\underline{a}_s$$

Tehát az impulzustétel merev testekre:

$$m\underline{a}_s = \underline{F}$$

ahol $\underline{F}$ a testre ható külső erők eredője, $\underline{a}_s$ pedig a test súlypontjának gyorsulása.

Merev test perdülete és tehetetlenségi nyomatéka:

$$\underline{\Pi}_s = \int_{(m)} \underline{\rho}\times d\underline{I} = \int_{(m)} \underline{\rho}\times\underline{v}\,dm = \int_{(m)} \underline{\rho}\times(\underline{v}_s + \underline{\omega}\times\underline{\rho})\,dm = \underbrace{\int_{(m)} \underline{\rho}\,dm}_{=\underline{0}\ \text{(statikai nyomaték)}}\times\underline{v}_s + \int_{(m)} \underline{\rho}\times(\underline{\omega}\times\underline{\rho})\,dm$$

$$\underline{\Pi}_s = \int_{(m)} \underline{\rho}\times(\underline{\omega}\times\underline{\rho})\,dm$$

Átalakítva:

$$\underline{\Pi}_s = \underbrace{\int_{(m)} (\underline{\rho}^2 \overbrace{\underline{\underline{E}}}^{\text{egységmátrix}} - (\overbrace{\underline{\rho}\circ\underline{\rho}}^{\text{diadikus szorzat}}))\,dm}_{} \cdot \underline{\omega}$$

mátrix, ami a vizsgált merev testet jellemzi, csak annak geometriájától ?

Def.: A merev test S súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixa

$$\underline{\underline{\Theta}}_s = \int_{(m)} \left(\varrho^2 \underline{\underline{E}} - (\underline{\varrho} \circ \underline{\varrho}) \right) dm$$

A tehetetlenségi nyomaték tenzora hozzárendeli $\underline{\omega}$ szögsebességvektorhoz a $\underline{I}_s = \underline{\underline{\Theta}}_s \underline{\omega}$ perdület-vektort. Ha a tér minden irányában ugyanakkora szögsebességvektorokat veszünk fel, akkor ezek végpontjai egy gömbön helyezkednek el. Az ezekhez hozzárendelt perdületvektorok végpontjai azonban már ellipszoidot jelölnek ki a térben.

Tétel: Merev test súlypontra számított perdülete a súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix és a szögsebességvektor szorzata:

$$\underline{\Pi}_s = \underline{\underline{\Theta}}_s \underline{\omega}$$

Def.: A tehetetlenségi nyomatéki mátrix főátlójában található elemeket tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékoknak, a főátlón kívüli tagokat deviációs nyomatékoknak nevezzük.

$$\Theta_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$ x tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték.

$$D_{xy} = \int_{(m)} xy dm$$ x-y tengelypárra számított deviációs nyomaték.

Def.: Ha egy tengelyhez tartozó deviációs nyomatékok nullák, akkor a szóban forgó tengely tehetetlenségi főtengely, a megfelelő tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékokat pedig főtehetetlenségi nyomatékoknak nevezzük.

A perdületvektor iránya állandó szögsebességű forgás mellett is változik, azaz deriváltja nem nulla. Azaz $\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{M}_s$ perdülettétel szerint az ilyen mozgás fenntartásához – a tengely irányának megtartásához – nyomatékra van szükség:

$$\underline{\Pi}_s = \begin{bmatrix} -D_{xz}\,\omega_z \\ -D_{yz}\,\omega_z \\ \Theta_z\,\omega_z \end{bmatrix}$$ ezek miatt

Nyomaték hiányában a tengely elterül. A tehetetlenségi főtengelyek az ún. szabad tengelyek mert a test külső nyomaték nélkül is foroghat bármelyik főtengelye körül – hiszen főtengely irányú szögsebesség esetén a perdület párhuzamos marad a szögsebességgel.

Tétel: Tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatban:

1, Az integrálás tulajdonságaiból következik, hogy azonos pontra számított tehetetlenségi nyomatékok összegezhetők, ezért egy merev test tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a test részeinek ugyanarra a pontra számított tehetetlenségi nyomatékainak összegével.

2, Ha egy homogén testnek van szimmetriasíkja, akkor a súlypontja is a szimmetria síkba esik. Ebben az esetben célszerű lehet a koordináta-rendszer egyik tengelyét erre merőlegesen felvenni, mert a szimmetriasíkra merőleges tengelyhez tartozó súlyponti deviációs nyomatékok nullák: $D_{nm} = 0$, ha az $\underline{e}_n$ vagy az $\underline{e}_m$ bázisvektor merőleges a szimmetriasíkra.

3, Ha egy homogén testnek van szimmetriatengelye, akkor az ahhoz a tengelyhez tartozó súlyponti deviációs nyomatékok nullák, ezért a szimmetriatengely egyúttal tehetetlenségi főtengely is

4, A $\underline{\underline{\Theta}}_s$ tehetetlenségi nyomatéki mátrix pozitív definit és szimmetrikus, ezért a sajátértékei mind valósak és pozitívak, sajátvektorai pedig merőlegesek egymásra.

<u>Def</u>: A merev test A pontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixa:

$$\underline{\underline{\Theta}}_A = \int_{(m)} \left(r^2 \underline{\underline{E}} - (\underline{r} \circ \underline{r}) \right) dm$$

ahol az $\underline{r}$ vektor az A-ból mutat a test egyes pontjaiba.

<u>Tétel</u>: Steiner-tétel: (Párhuzamos tengelyek tétele)

Egy merev test S súlypontjára és egy tetszőleges másik, A pontra számított tehetetlenségi nyomatékai között az alábbi összefüggés teljesül:

$$\underline{\underline{\Theta}}_A = \underline{\underline{\Theta}}_S + \underline{\underline{\Theta}}_{AS}$$

Az $\underline{r}_{AS} = [x_{AS}\ y_{AS}\ z_{AS}]^T$ vektor komponenseivel kifejezhető $\underline{\underline{\Theta}}_{AS}$ az alábbi alakban:

$$\underline{\underline{\Theta}}_{AS} = \begin{bmatrix} y_{AS}^2 + z_{AS}^2 & -x_{AS}y_{AS} & -x_{AS}z_{AS} \\ -x_{AS}y_{AS} & x_{AS}^2 + z_{AS}^2 & -y_{AS}z_{AS} \\ -x_{AS}z_{AS} & -y_{AS}z_{AS} & x_{AS}^2 + y_{AS}^2 \end{bmatrix} m$$

<u>következmény</u>: Ha egy súlyponti főtengely mentén történik az eltolás - tehát az $\underline{r}_{AS}$ vektornak csak egyetlen komponense nullától különböző - akkor a tehetetlenségi nyomatéki mátrixnak csak a főátlójában lévő elemek változhatnak, így a tehetetlenségi főirányok párhuzamosak maradnak a súlypontiakkal.

<u>A tehetetlenségi nyomatéki mátrix elforgatott tengelyű koordináta-rendszerben</u>:

Számos feladatban előfordul, hogy a vizsgált test több szabályos alakú részből tehető össze, azonban ezeknek a részeknek eltérő irányúak a tehetetlenségi főtengelyeik. Mivel kézikönyvekben általában a főtehetetlenségi nyomatékokat adják meg, ezekben az esetekben át kell transzformálni az ismert tehetetlenségi nyomatéki mátrixokat egy közös koordináta rendszerbe. Ezután alkalmazható a Steiner-tétel és a tehetetlenségi nyomatékok összeadására vonatkozó tétel.

Ismert, hogy egy (ξ, η, ζ) koordináta-rendszerben kifejezett mátrix forgatási transzformáció segítségével adható meg az (x, y, z) koordináta-rendszerben

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\Theta}}_s} = \underline{\underline{T}}^T \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\underline{\Theta}}_s} \underline{\underline{T}}$$ ortogonális transzformációs mátrix

A $\underline{\underline{T}}$ transzformáció ortogonalitása miatt a $\underline{\underline{T}}^T$ mátrix a fordított transzformációt hajtja végre, azaz visszatranszformálja az eredményt (x,y,z)-be

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\Pi}_S} = \underline{\underline{T}}^T \underset{(\xi,\zeta,\delta)}{\underline{\underline{\Theta}}_S} \underline{\underline{T}} \underset{(x,y,z)}{\underline{\omega}}$$

<u>Az impulzus és perdület vektorkettőse:</u>

Az A pontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix segítségével kifejezhető a merev test A pontra számított perdülete is, mely definíció szerint

$$\underline{\Pi}_A = \int_{(m)} \underline{r} \times \underline{v} \, dm$$, ahol $\underline{r}$ az A pontból a test pontjaiba mutat

<u>Tétel</u>: Merev test impulzusa és perdülete vektorkettőst alkot, azaz

$$\underline{\Pi}_A = \underline{\Pi}_S + \underline{r}_{AS} \times \underline{I}$$

Az A pontba redukált vektorkettős $[\underline{I}; \underline{\Pi}_A]_A$

<u>Tétel</u>: Egy merev test A pontjára számított perdülete:

$$\underline{\Pi}_A = \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} + \underline{r}_{AS} \times m \underline{v}_A$$

<u>A perdület derivált és a kinetikai nyomaték kifejezése</u>

Súlypontra számított perdület derivált

$\underline{D}_S = \dot{\underline{\Pi}}_S$ miatt a dinamika alaptétele segítségével

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{M}_S ,$$

a súlypontra felírt perdületvektor $\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\omega}$, ezzel

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \dot{\underline{\omega}} + \dot{\underline{\underline{\Theta}}}_S \underline{\omega}$$

<u>Tétel</u>: A Perdület deriváltját megadó Euler-formula

$$\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S$$

<u>Tétel</u>: Egy merev test tetszőleges A pontjára számított perdület deriváltja:

$$\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{\Theta}}_A - \underline{v}_A \times m \underline{v}_S + \underline{r}_{AS} \times m \underline{a}_A$$

<u>Tétel</u>: Merev test tetszőleges A pontjára számított kinetikai nyomaték:

$$\underline{D}_A = \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} + \underline{r}_{AS} \times m \underline{a}_A$$

<u>Dinamika alaptételeinek felírási módjai:</u>

- súlypontra: $\underline{r}_{SS} = \underline{0}$, $\underline{\Pi}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\omega}$ miatt

$$m \underline{a}_S = \underline{F}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S = \underline{M}_S$$

- A test nulla gyorsulású A pontjára $\underline{a}_A = \underline{0}$ következtében:

$$m\underline{a}_S = \underline{F}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} = \underline{M}_A$$

- Ha az A pont sebessége is nulla vagy párhuzamos a súlypont sebességével, akkor $\underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} = \underline{\Pi}_A$ is igaz, ezért tartósan álló pontra ($\underline{v}_A = \underline{0}$, $\underline{a}_A = \underline{0}$)

$$m\underline{a}_S = \underline{F}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_A = \underline{M}_A$$

Kinetikus energia:

Merev test kinetikus energiája:

Egy merev test kinetikus energiája a pontrendszerre vonatkozó definíció általánosításával a

$$T = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm$$

alakban adható meg.

Tétel: Egy merev test kinetikus energiája:

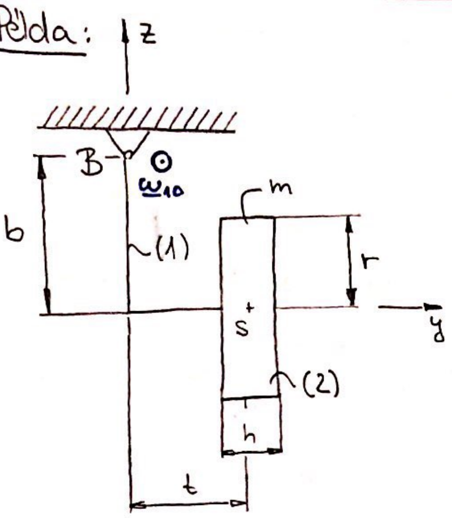
$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\omega}$$, ahol S a test súlypontja, illetve

$$T = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\Pi}_A$$, ahol A a test álló pontja.

Általános esetben, a test tetszőlegesen mozgó B pontját használva referencia pontnak

$$T = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underline{\underline{\Theta}}_B \underline{\omega} + m \underline{v}_B (\underline{\omega} \times \underline{r}_{BS})$$

1. Példa:



A repülő v sebesség elérésének pillanatában elemelkedik a talajról, az első futóművet elkezdi behúzni. A kerék azzal a sebességgel forog, amivel gördült.

Adatok: $v, \underline{\omega}_{10}, m, r, h, t, b$

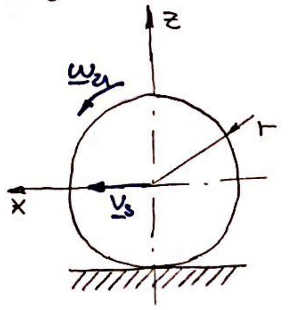
Feladatok:

1, $\underline{\underline{\Theta}}_s = ?$, $\underline{\Pi}_s = ?$

2, $\underline{\underline{\Theta}}_B = ?$, $\underline{\Pi}_B = ?$

3, $T = ?$

Vázoljuk fel a feladatot az x-z síkban:



$\omega_{21} = \frac{v_s}{r} = \frac{v}{r}$ (megállítottuk a relatív rendszert, de a teljes rendszer mozog...) relatív seb. nulla

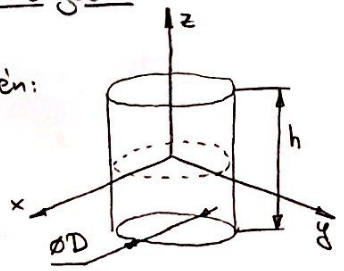
$$\underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ v/r \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\omega}_{10} = \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Ezzel} \quad \underline{\omega}_{20} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ v/r \\ 0 \end{bmatrix}$$

1, Súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\Theta}}_s = \int_{(m)} (\rho^2 \underline{\underline{E}} - (\underline{\rho} \circ \underline{\rho}))dm$

↳ tulajdonságok:
- poz. definit ⇒ + sajátértékek
- szimmetrikus ⊥ sajátvektorok

Képletgyűjteményben:

Henger esetén:



$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2$

$\Theta_z = \frac{1}{2} mR^2$

$R = D/2$

⇓

$$\underline{\underline{\Theta}}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 \end{bmatrix}$$

(tengelyek azonosítása fontos!!)

Súlypontra számított perdületvektor:

$$\underline{\Pi}_s = \underline{\underline{\Theta}}_s \cdot \underline{\omega}_{20} = \begin{bmatrix} \Theta_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{sz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ v/r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{sx}\omega_{10} \\ \Theta_{sy} v/r \\ 0 \end{bmatrix}$$

2, B pontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix

Steiner-tétel: $\underline{\underline{\Theta}}_B = \underline{\underline{\Theta}}_s + \underline{\underline{\Theta}}_{Bs}$, ahol
$$\underline{\underline{\Theta}}_{Bs} = \begin{bmatrix} y_{Bs}^2 + z_{Bs}^2 & -x_{Bs}y_{Bs} & -x_{Bs}z_{Bs} \\ -x_{Bs}y_{Bs} & x_{Bs}^2 + z_{Bs}^2 & -y_{Bs}z_{Bs} \\ -z_{Bs}x_{Bs} & -z_{Bs}y_{Bs} & y_{Bs}^2 + x_{Bs}^2 \end{bmatrix} \cdot m$$

Ehhez szükségünk van $\underline{r}_{BS}$-re:

$$\underline{r}_{BS} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -b \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_{BS} \\ y_{BS} \\ z_{BS} \end{bmatrix} \text{, ezzel} \quad \underline{\underline{\Theta}}_{BS} = m \begin{bmatrix} t^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & tb \\ 0 & tb & t^2 \end{bmatrix}$$

A Steiner-tétel segítségével; B pontra redukált tehetetlenségi nyomatéki mátrix:

$$\underline{\underline{\Theta}}_B = \underline{\underline{\Theta}}_S + \underline{\underline{\Theta}}_{BS} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2 + m(t^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} mR^2 + b^2 & tb \\ 0 & tb & \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mh^2 + mt^2 \end{bmatrix}$$

<u>B pontra felírt perdületvektor:</u>

$$\underline{\Pi}_B = \underline{\Pi}_S + \underline{r}_{BS} \times \underbrace{\underline{I}}_{= m\underline{v}_S} \qquad \underline{v}_S = \underline{v}_B + \underline{\omega}_{10} \times \underline{r}_{BS} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ b\omega_{10} \\ t\omega_{10} \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{BS} \times \underline{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} mv \\ mb\omega_{10} \\ mt\omega_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mt^2\omega_{10} + mb^2\omega_{10} \\ -mvb \\ -mvt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\omega_{10}(t^2+b^2) \\ -mvb \\ -mvt \end{bmatrix}$$

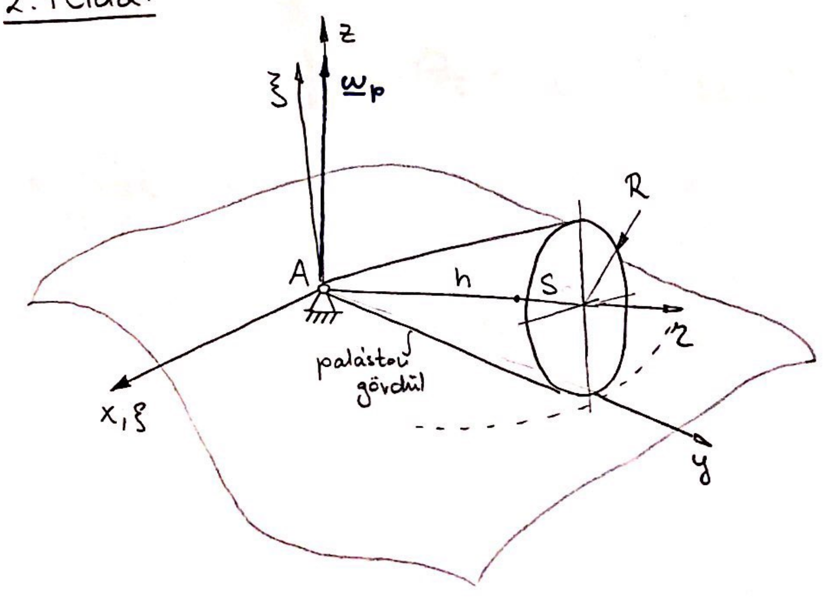
Ezek segítségével:

$$\underline{\Pi}_B = \begin{bmatrix} \Theta_{Sx}\omega_{10} + m\omega_{10}(t^2+b^2) \\ \Theta_{Sy} v/r - mvb \\ -mvt \end{bmatrix}$$

3) <u>Kinetikus energia:</u>

$$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \underbrace{\underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\omega}}_{= \underline{\Pi}_S} = \frac{1}{2} m \left[(t^2+b^2)\omega_{10}^2 + v^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\Theta_{Sx} \cdot \omega_{10}^2 + \Theta_{Sy} \cdot \frac{v^2}{r^2} \right)$$

<u>2. Példa:</u>



<u>Adatok:</u> $m = 6\,kg$

$R = 0{,}2\,m$

$h = 0{,}5\,m$

$\omega_p = 2\,\frac{rad}{s}$

<u>Feladatok:</u> $T = ?$ és $\underline{\Pi}_S, \underline{\Pi}_A = ?$

Kinetikus energia:

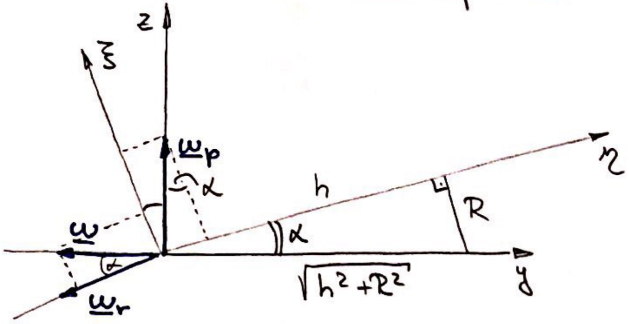
$$T=\frac{1}{2}mv_s^2+\frac{1}{2}\underline{\omega}^T\underline{\underline{\Theta}}_s\underline{\omega}=\frac{1}{2}\underline{\omega}^T\underline{\underline{\Theta}}_A\underline{\omega}\quad \text{(álló pontra)}$$

$$\underline{\underline{\Theta}}_A=\begin{bmatrix}\Theta_\xi & 0 & 0\\ 0 & \Theta_\eta & 0\\ 0 & 0 & \Theta_\zeta\end{bmatrix}\qquad \Theta_\xi=\Theta_\zeta=\frac{3}{80}m\left(4R^2+h^2\right)+\underbrace{m\left(\frac{3}{4}h\right)^2}_{\text{steiner-tag}}\qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{r}_{AS}}=\begin{bmatrix}0\\ \frac{3h}{4}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Theta_\eta=\frac{3}{10}mR^2$$

súlypontra

Koordináta-rendszerek közti kapcsolat:



$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}_p}=\begin{bmatrix}0\\ \omega_p\sin\alpha\\ \omega_p\cos\alpha\end{bmatrix}\qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}_r}=\begin{bmatrix}0\\ -\omega_r\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}}=\underline{\omega}_p+\underline{\omega}_r=\begin{bmatrix}0\\ \omega_p\sin\alpha-\omega_r\\ \omega_p\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$\underline{\omega}$ másképp is felírható:

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}}=\begin{bmatrix}0\\ -\omega\cos\alpha\\ \omega\sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$-\omega\cos\alpha=\omega_p\sin\alpha-\omega_r$$

$$\omega\sin\alpha=\omega_p\cos\alpha$$

$$\omega=\omega_p\underbrace{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}_{1/\tan\alpha}=\omega_p\underbrace{\frac{h}{R}}_{\text{ábrából}}$$

$$\omega_r=\omega_p\sin\alpha+\omega\cos\alpha$$

$$=\omega_p\frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}+\omega_p\frac{h}{R}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}$$

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}}=\begin{bmatrix}0\\ -\omega_p\frac{h}{R}\frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\\ \omega_p\frac{h}{\cancel{R}}\frac{\cancel{R}}{\sqrt{h^2+R^2}}\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ =-\omega_\eta\\ =\omega_\zeta\end{matrix}$$

Ezzel:

$$T=\frac{1}{2}\underline{\omega}^T\underline{\underline{\Theta}}_A\underline{\omega}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_\eta & \omega_\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_\xi & 0 & 0\\ 0 & \Theta_\eta & 0\\ 0 & 0 & \Theta_\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_\eta\\ \omega_\zeta\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -\omega_\eta & \omega_\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\omega_\eta\Theta_\eta & \omega_\zeta\Theta_\zeta\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\omega_\eta^2\Theta_\eta+\omega_\zeta^2\Theta_\zeta\right)=\underline{\underline{2{,}39\ J}}$$

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\Pi}_s}=\underline{\underline{\Theta}}_s\underline{\omega}\ \text{, ahol}\quad \underline{\underline{\Theta}}_s=\begin{bmatrix}\Theta_{\xi s} & 0 & 0\\ 0 & \Theta_{\eta s} & 0\\ 0 & 0 & \Theta_{\zeta s}\end{bmatrix}$$

$$\text{így: }\ \underline{\Pi}_s=\begin{bmatrix}\Theta_{\xi s} & 0 & 0\\ 0 & \Theta_{\eta s} & 0\\ 0 & 0 & \Theta_{\zeta s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\omega_\eta\\ +\omega_\zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -\omega_\eta\Theta_{\eta s}\\ \omega_\zeta\Theta_{\zeta s}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\Pi}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \frac{h}{R} \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \left(\frac{3}{10} m R^2 \right) \\ \omega_p \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \left(\frac{3}{80} m (4R^2+h^2) \right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Pi}_A = \underline{\Pi}_S + \underline{r}_{AS} \times \underbrace{\underline{I}}_{(m\underline{v}_S)} \quad \Rightarrow \quad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{r}_{AS}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3h}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{I} = m\underline{v}_S \text{, ahol}$$

$$\underline{v}_S^{sz} = \underbrace{\underline{v}_A}_{=0} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{r}_{AS} = \underline{\omega}_{10} \times \underline{r}_{AS}$$

$$\underline{v}_S^{rel} = 0$$

vagy

$$\underline{\Pi}_A = \underline{\underline{\Theta}}_A \underline{\omega} + \underline{r}_{AS} \times m \underbrace{\underline{v}_A}_{=0}$$ (jelen esetben álló pont)

$$\underline{v}_S = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}_{10} \times \underline{r}_{AS}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \sin\alpha \\ \omega_p \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3h/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_S = \begin{bmatrix} -\frac{3h}{4}\omega_p \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ezek alapján:

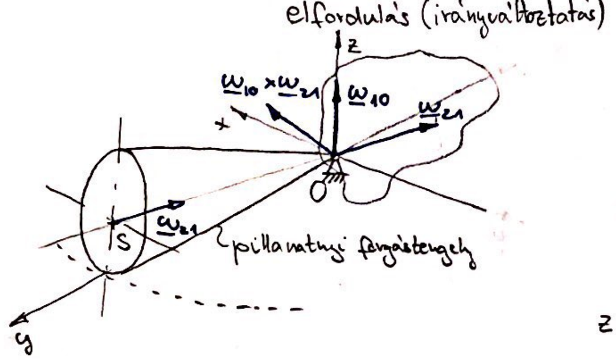
$$\underline{r}_{AS} \times m\underline{v}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3h}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{3h}{4}\omega_p \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9h^2}{16} \omega_p \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \end{bmatrix} \cdot m$$

$$\underline{\Pi}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_p \frac{h^2}{R} \frac{1}{\sqrt{h^2+R^2}} \left(\frac{3}{10} m R^2 \right) \\ \omega_p \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \left(\frac{3}{80} m (4R^2+h^2) \right) + \frac{9h^2}{16} \omega_p \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}} \end{bmatrix}$$

Szögsebesség kiszámítása:

Relatív kapcsolat:

$$\underline{\varepsilon}_{20} = \underline{\varepsilon}_{10} + \underline{\varepsilon}_{21} + \underbrace{\underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21}}_{\text{elfordulás (irányváltoztatás)}}$$

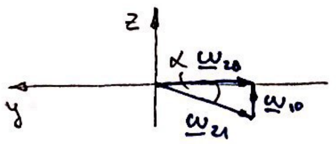


$\underline{\varepsilon}_{10}$ csak ω_{10} nagyságától függ ($\underline{\omega}_{10}$ iránya nem változik)

$\underline{\varepsilon}_{21}$ csak ω_{21} nagyságától függ ($\underline{\omega}_{21}$ iránya nem változik a mozgó von. rendszeben)

Azt tudjuk:

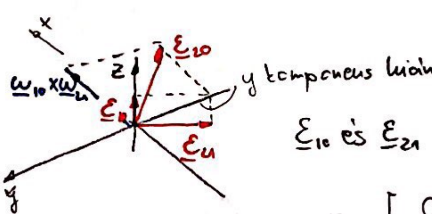
$$\underline{\omega}_{20} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21}$$



fennáll, hogy $|\underline{\omega}_{10}| = |\underline{\omega}_{21}| \sin\alpha$

$$\Downarrow$$

$$|\underline{\varepsilon}_{10}| = |\underline{\varepsilon}_{21}| \sin\alpha$$



y komponens hiányzik

$\underline{\varepsilon}_{10}$ és $\underline{\varepsilon}_{21}$ definiálja $\underline{\varepsilon}_{20}$ síkját

$$\underline{a}_S = \underbrace{\underline{a}_O}_{=0} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{20} \times \underline{r}_{OS} + \underline{\omega}_{20} \times (\underline{\omega}_{20} \times \underline{r}_{OS})}_{\text{csak x és y komponens}}$$

→ ebből $\underline{\varepsilon}_{20}$ ismeretlen komponense kifejezhető

$$\underline{r}_{OS} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{OSy} \\ r_{OSz} \end{bmatrix}$$