Elméleti összefoglaló:

Anyagi pontok kinetikája:

Eddig nem foglalkoztunk a mozgás okaival, a mozgás okait a vizsgált test és a környezete közti kölcsönhatásoknak kell tulajdonítanunk. A kinetika célja a testek közötti kölcsönhatások és a kialakuló mozgás vizsgálata, azaz, hogy hogyan lehet megállapítani a testek tulajdonságaiból, kölcsönös helyzetükből stb., hogy milyen mozgást fognak végezni.

Isaac Newton ismerte fel, hogy nem a sebesség fenntartásához, hanem csak annak megváltoztatásához (gyorsulás előidézése) szükséges más testek hatása:

<u>Tétel</u>: Tehetetlenség „törvénye": Minden anyagi pont megmarad a nyugalom vagy az egyenes vonalú egyenletes mozgás állapotában, míg más testek hatásai mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszerítik.

A tehetetlenség a testeknek az a tulajdonsága, hogy maguktól képtelenek megváltoztatni a mozgásállapotukat; egy magára hagyott test gyorsulása nulla.

Például egy lejtőre helyezett test sebességcsökkenésének ütemét befolyásolhatja a lejtő érdessége, használt kenőanyag. Ha a sebességcsökkenést meg tudnánk szüntetni akkor a test megtartaná kezdeti sebességét.

A tehetetlenség törvénye nem minden esetben teljesül. Például egy teherautó raklapjára tett doboz fékezéskor előrecsúszik. A teherautóhoz rögzített gyorsuló vonatkoztatási rendszerből nézve ez ellentmond a tehetetlenség törvényének, hiszen nem tudunk rámutatni olyan „más testekre", melyek hirtelen előre húzzák a dobozt. Az út mellől szemlélve ugyanezt a szituációt, nem jutunk. (A teherautó viszont a lassulása miatt „lemarad" a dobozhoz képest.)

Az eddigiek alapján arra következtethetünk, hogy nem mindegy milyen vonatkoztatási rendszerben vizsgáljuk a mozgásokat, azok ugyanis kinetikai szempontból nem egyenértékűek. Kitüntetettek azok a vonatkoztatási rendszerek, melyekben teljesül a tehetetlenség törvénye, mert ezekben a mozgásállapot megváltozása mindig kapcsolatba hozható más testek hatásával.

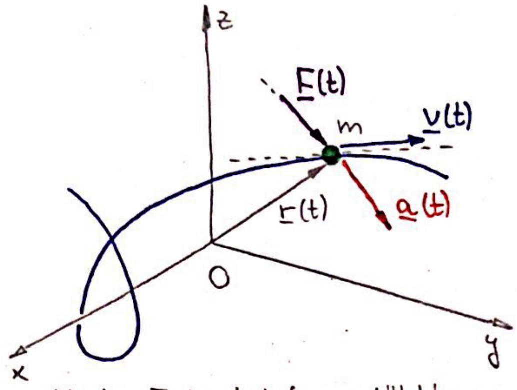
<u>Newton I. törvénye</u>: Léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, melyekben teljesül a tehetetlenség törvénye. Az ilyen rendszereket inerciarendszereknek nevezzük.

<u>Tétel</u>: Ha találunk egy inerciarendszert, akkor bármely, hozzá képest egyenes vonalú egyenletes haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer is inerciarendszer.

<u>Tétel</u>: Galilei-féle relativitási elv: Egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszerek a dinamika törvényei szempontjából teljesen egyenértékűek

A műszaki gyakorlatban a Földet jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthetjük. Azokat a vonatkoztatási rendszereket, melyek nem inerciarendszerek, gyorsuló rendszereknek nevezzük.

<u>Newton II. törvénye</u>: Egy anyagi pont gyorsulása egyenesen arányos a más testek által rá ható $\underline{F}$ erő nagyságával, fordítottan arányos az anyagi pont m tömegével, és az erővektor irányában következik be. $m\underline{a} = \underline{F}$



Newton II. törvényének szemléltetése

Az erő a más testekről átadódó hatást jellemzi, a tömeg pedig a vizsgált testet - de egyszerre két tulajdonságát: egyrészt az „anyag" mennyiségét, másrészt pedig azt, hogy a test hogyan viselkedik adott erővel jellemzett hatás során,

Def.: Egy anyagi pont lendülete a tömegének és sebességének a szorzata:

$$\underline{I} = m\underline{v}$$

A lendület is vektormennyiség. Mértékegysége: $\left[\frac{kg\,m}{s}\right]$

Tétel: Newton második törvénye:

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F}$$ (A továbbiakban feltesszük, hogy a vizsgált testek tömege állandó)

A több testből álló mechanikai rendszerekben fellépő kölcsönhatások jellegéről szól Newton harmadik törvénye.

Tétel: Newton III. törvénye: (hatás - ellenhatás, akció - reakció) két anyagi pont kölcsönhatása során a két testre egymásról átadódó erők azonos nagyságúak és ellentétes értelműek.

Az erők tehát nemcsak egy irányú hatást fejeznek ki, hanem kölcsönhatást jellemeznek - mindig párosával lépnek fel.

Nagyon fontos megjegyezni, hogy a Newton harmadik törvényében szereplő erők két különböző testre hatnak!

A mechanikai modellek felépítése során az adott feladat szempontjából fontos testek mozgásának vizsgálatára korlátozódunk. Ezek a testek alkotják a vizsgált mechanikai rendszert, aminek az elemeire alkalmazzuk a Newton törvényeket. A mechanikai rendszer egyes elemei között ható erőket belső erőknek nevezzük, ezek a belső nyomatékokkal együtt alkotják a belső erőrendszert.

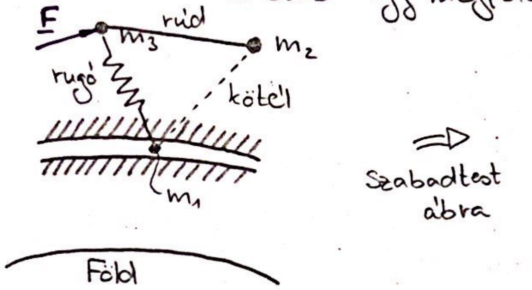
A környezetben található testekről a rendszer elemeire ható erők / nyomatékok alkotják a külső erőrendszert. A fentiek szerint tehát Newton harmadik törvénye elsősorban a belső erőkről szól.

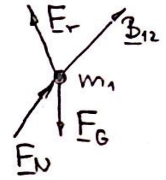
Tétel: Newton IV. törvénye (szuperpozíció elve). Egy anyagi pontra ható erők együttes hatása egyenértékű a külön - külön ható erők vektori eredőjének hatásával.

A szuperpozíció elv azt fejezi ki, hogy ha egymás után több test is kölcsönhatásba kerül a vizsgált anyagi ponttal, ezek a testek egymás hatását nem befolyásolják. Ezért a szuperpozíció elvet az erőhatások függetlenségének elveként is szokás emlegetni.

Aktiv erők és kényszererők:

A különféle kölcsönhatások rendkívül bonyolult fizikai folyamatokon keresztül valósulhatnak meg. A mechanikában azonban nem foglalkozunk a kölcsönhatások természetével; megelégszünk azzal hogy jellemezhetők - modellezhetők - egy megfelelő erővektorral. Lehetnek aktiv erők vagy kényszererők.





$\underline{F}_G$ - külső aktiv erő

$\underline{F}_N$ - külső kényszererő

$\underline{B}_{12}$ - belső kényszererő

$\underline{F}_r$ - belső aktiv erő

$\underline{F}$ - külső aktiv erő

Aktiv erők: Az aktiv erőknek két alapvető típusát különböztetjük meg

① Ide tartoznak a vizsgált mechanikai rendszer környezetének hatását jellemző, a rendszer állapotától független - de az időtől akár adott módon függő - adott külső erők: $\underline{F}(t)$

② Azokat az erőket is az aktiv erők közé soroljuk, melyek nagyságát és irányát meg tudjuk adni a kölcsönhatásban részt vevő testek tulajdonságaitól és állapotától függő ún. erőtörvény segítségével. Az erőtörvények általában $\underline{F}(\underline{r},\underline{v})$ alakúak.

A fenti két eset kombinációja is előfordulhat. Ebben a legáltalánosabb esetben $\underline{F}(\underline{r},\underline{v},t)$ alakban adható meg a ható aktiv erő.

Kényszererők: A testekre ható erőknek általában csak egy részét lehet a gyakorlatban erőtörvényekből - tehát a testek kölcsönös helyzete és sebessége alapján - kiszámolni.

Def.: A kényszererők azok az erők, melyek a kényszerfeltételek teljesülését biztosítják. Ezek az erők függenek a testre ható aktiv erőktől és nem határozhatók meg csupán a vizsgált test állapota alapján.

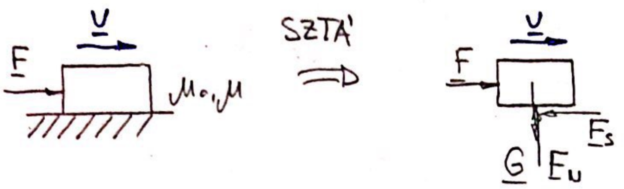
A kényszerek felvétele a modellalkotás része, hiszen a valóságban csak közelítőleg teljesülnek a kényszerfeltételek. Ez a közelítés eredményezi azt, hogy egy adott testre ható kényszererők függnek az aktiv erőktől, azaz nem teljesül rájuk az erőhatások függetlenségének elve. Aktiv erők nélkül ugyanis a kényszererők általában nem is lépnek fel, tehát nem értelmezhető a külön-külön ható kényszererők hatása.

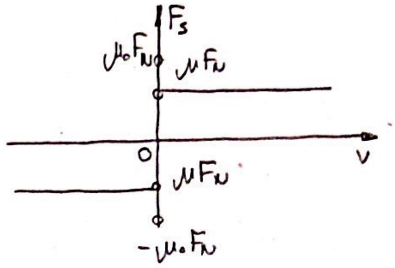
A kényszerek általában a vizsgált testnek egy másik testtel való érintkezésével kapcsolatosak. Ilyenkor úgy is tekinthetünk a kényszererőkre, hogy a vizsgált test mozgása szempontjából azok tökéletesen helyettesítik a kényszert biztosító testet.

A csúszási súrlódási erő: önmagában nem biztosít semmilyen kényszert és értéke megadható képlettel:

$$\underline{F}_S = -\mu |\underline{F}_N| \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

ahol μ a csúszási súrlódási tényező és $\underline{v} \neq 0$ a vizsgált test relatív sebessége a másik testhez képest.





A kényszererő normális komponense biztosítja azt a kényszerfeltételt, hogy a két test nem hatol egymásba. A súrlódásos kényszerek különlegesek abból a szempontból, hogy ezek esetében olyan kényszererő komponens – csúszási súrlódási erő – is fellép, ami nem szükséges a kényszerfeltétel fenntartásához. Ezért a csúszási súrlódással járó kényszereket nem ideális kényszerek nevezzük!

A tapadási súrlódási erővel kapcsolatban nem lépnek fel a fent vázolt problémák, hiszen abban az esetben a két erőkomponens külön-külön kényszererőként kezelhető, melyek közül az F_N normálerő az érintkezés síkjára merőleges, az F_s súrlódási erő pedig az azzal párhuzamos mozgást gátolja meg.

$|F_s| \leq \mu_0 |F_N|$, ahol μ_0 a tapadási súrlódási tényező.

<u>A dinamika alaptétele:</u>

Egy anyagi pont mozgásának törvényszerűségeit a dinamika alaptétele foglalja össze.

<u>Tétel</u>: A dinamika alaptétele anyagi pontra:
Inerciarendszerben (Newton I.)

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F} \quad \text{(Newton II.)}$$

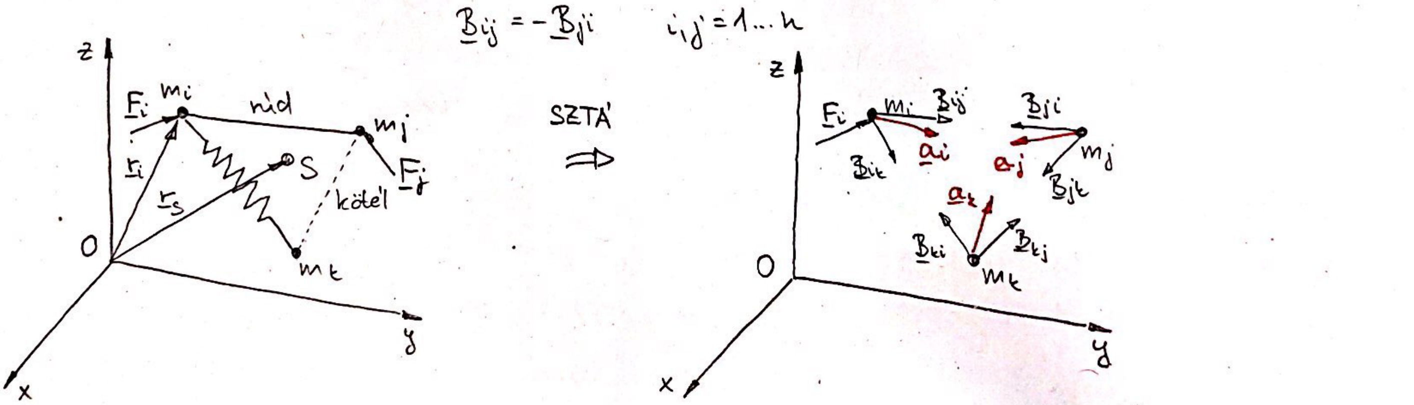
ahol $\underline{F} = \sum_{j=1}^{n} \underline{F}_j$ a vizsgált anyagi pontra ható erők vektori eredője, mely a környezetében lévő n darab másik testről adódik át.

Ha kiegészítjük Newton III. törvényével is, akkor tetszőleges számú anyagi pont együttes viselkedése is vizsgálható:

$$m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \underline{B}_{ij} \qquad i = 1 \dots n$$

belső erő

$$\underline{B}_{ij} = -\underline{B}_{ji} \qquad i, j = 1 \dots n$$



<u>Szabadtest ábrák</u>: A feladatban szereplő összes, vizsgált testet a környezetéből kiragadva, külön ábrán ábrázoljuk. Berajzoljuk a külső aktív erőket és nyomatékokat. A kényszerkapcsolatok helyett a kényszererőket, a továbbá átadódó belső erőket is szemléltetjük. Kinematikai jellemzők berajzolása is szükséges: $\underline{a}_S$, $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\omega}$

A dinamika alaptétele gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben:

Newton I. törvénye szerint léteznek olyan vonatkoztatási rendszerek, melyekben teljesül a tehetetlenség törvénye - ezek az inerciarendszerek.

Az inerciarendszereket az különbözteti meg a gyorsuló vonatkoztatási rendszerektől, hogy azokban minden erő valódi erő, azaz létező testek hatásaként értelmezhető.

Hogyha a vonatkoztatási rendszer gyorsuló mozgást végez, akkor a benne lévő megfigyelők gyorsulónak látják egy esetleges test mozgását, akkor is ha a testre ható erők eredője zérus.

pl.: ház - vonat...

$$\underbrace{m\underline{a}_{20}}_{\text{abszolút gyorsulás}} = \overbrace{\underline{F}}^{\text{valódi erő}}$$

$$\underbrace{m\underline{a}_{P21}}_{\text{relatív gyorsulás}} = \overbrace{\underline{F}_{rel}}^{\text{relatív erő (amit a gyorsuló rendszerben lévő megfigyelők tapasztalnak)}}$$

$$\underbrace{m\underline{a}_{Cor}}_{\text{Coriolis gyorsulás}} = \overbrace{\underline{F}_{cor}}^{\text{Coriolis erő}} \qquad \underline{a}_{Cor} = 2\underbrace{\underline{\omega}_{10}}_{=\beta}\times\underline{v}_{21}$$

Ezzel

$$\underbrace{\underline{F}_{rel} = \underline{F}}_{\text{nincs összhangban}} \overbrace{-m\underline{a}_{P10} - m\underline{a}_{Cor}}^{\text{további erőhatások}}$$

Def: $\underline{F}_{sz} = -m\underline{a}_{P10}$ szállító erő

$\underline{F}_{Cor} = -m\underline{a}_{Cor} = -2m\underline{\omega}_{10}\times\underline{v}_{P21}$ Coriolis erő

} látszólagos/tehetetlenségi erők

Speciális esetek:

1) Állandó gyorsulású, haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer: $\underline{\varepsilon}_{10} = \underline{0}$, $\underline{\omega}_{10} = \underline{0}$ és $\underline{a}_{\Omega} =$ áll., ahol Ω az origó. Ekkor minden pont azonos gyorsulással mozog, azaz $\underline{a}_{P10} = \underline{a}_{\Omega}$

$\underline{F}_{sz} = -m\underline{a}_{\Omega}$ míg a Coriolis erő zérus $\underline{\omega}_{10} = \underline{0}$ miatt.

2) Állandó szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszer: $\underline{a}_{\Omega} = \underline{0}$, $\underline{\omega}_{10} =$ áll., tehát $\underline{\varepsilon}_{10} = \underline{0}$. Ekkor

$$\underline{a}_{P10} = \underline{a}_{\Omega} + \underline{\varepsilon}\times\underline{\rho}_P - \omega_{10}^2\underline{\rho}_P = -\omega_{10}^2\underline{\rho}_P$$

Ezzel a szállító erő (sugárirányban)

$$\underline{F}_{sz} = -m\underline{a}_{P10} = -m(-\omega_{10}^2\underline{\rho}_P) = m\omega_{10}^2\underline{\rho}_P \quad \text{(Centrifugális erő)}$$

- A centrifugális erő erőteret alkot, hiszen a von. rsz. minden pontjához hozzárendelhető

Forgó von. rsz.-ben a forgástengellyel nem párhuzamosan mozgó testre Coriolis erő is hat:

$$\underline{F}_{Cor} = -2m\underline{\omega}_{10}\times\underline{v}_{P21} \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Ciklonok, anticiklonok (nagy idő és távolság skálákon)

!

Folyamatok időbeli leírása:

A dinamika alaptétele alapján a tömegpontra ható erők meghatározzák a test gyorsulását – pozícióját és sebességét azonban csak közvetve, a gyorsuláson keresztül befolyásolják.

Ha egy állandó tömegű anyagi pont mozgásának folyamatát akarjuk leírni, akkor a dinamika differenciálegyenlet alakjában írható fel:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underset{\substack{\downarrow\\ \text{helyvektor (anyagi pont)}}}{\underline{r}}, \dot{\underline{r}}, t)$$

Ezt ki kell egészíteni kezdeti és peremfeltételekkel.

Megmaradási tételek:

Impulzustétel:

Számos gyakorlati feladatban lényegtelenek a mozgás folyamatának részletei és elegendő azok kitüntetett időpontbeli értékeket kiszámolni.

<u>Tétel</u>: Impulzustétel. Az impulzus t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása:

$$\underline{I}(t_2) - \underline{I}(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt}_{\text{erőlökés (erőimpulzus)}}$$

Ez könnyen általánosítható több anyagi pont, tehát anyagi pontrendszer esetére is.

<u>Def</u>: Anyagi pontrendszer lendülete az egyes anyagi pontok lendületvektorainak vektori eredője, azaz n tömegpont esetén $\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} m_i \underline{v}_i$.

<u>Tétel</u>: Anyagi pontrendszer lendülete a pontrendszer teljes $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ tömegének és a súlyponti sebességének a szorzata

$$\underline{I} = m\underline{v}_s$$

<u>Következmény</u>: Anyagi pontrendszer impulzusderiváltja a pontrendszer teljes tömegének és a súlypont gyorsulásának szorzata:

$$\dot{\underline{I}} = m\underline{a}_s$$

<u>Impulzustétel anyagi pontrendszerre</u>:

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F}_k \qquad \underline{I}(t_2) - \underline{I}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}_k\, dt$$

↳ külső erők eredője

<u>Tétel</u>: Súlypont tétel: Anyagi pontrendszer pontjai úgy mozognak a rájuk ható erők hatása alatt, hogy a közös súlypont $\underline{a}_s$ gyorsulásának és a rendszer teljes tömegének szorzata a külső erők $\underline{F}_k$ eredőjével egyenlő:

$$m\underline{a}_s = \underline{F}_k \qquad \text{(belső erők nem befolyásolják a súlypont mozgását)}$$

<u>Impulzusmegmaradás</u>: Ha a t_1 és t_2 időpontok között az anyagi pontrendszerre ható külső erők eredője nulla, akkor a pontrendszer impulzusa állandó marad.

Teljesítménytétel

Def.: Az $\underline{F}$ erő teljesítménye az $\underline{F}$ erőnek és az erő támadáspontjában levő anyagi pont $\underline{v}$ sebességének a skaláris szorzata:

$$P = \underline{F}\,\underline{v} \quad , \text{ mértékegysége: } W,\ Nm/s$$

Fontos! A teljesítmény előjeles skalár mennyiség! Ha az erő sebesség irányú vetülete a sebességgel egyező irányú, akkor a teljesítmény pozitív, ellenkező esetben negatív

$P>0$ $\qquad$ $P<0$

Def.: Anyagi pont kinetikus energiája:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \text{ mért. egysége: } J,\ Nm$$

Tétel: Teljesítménytétel: Egy anyagi pontra ható erők összegzett teljesítménye egyenlő az anyagi pont mozgási energiájának idő szerinti deriváltjával:

$$\dot{T} = P$$

Tétel: n darab egymással kölcsönható anyagi pontból álló pontrendszer esetében

$$\dot{T} = P$$

ahol

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \quad \text{a pontrendszer mozgási energiája és}$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underline{B}_{ij} \underline{v}_i \quad \text{a pontrendszerre ható külső és belső erők teljesítménye.}$$

Def.: Ideális kényszer: olyan kényszer, amit biztosító kényszererők együttes teljesítménye nulla

Munkatétel:

A teljesítménytétel idő szerinti integrálása a munkatételre vezet.

Def.: Egy P teljesítményű erőrendszer által a t_1 és t_2 időpontok között végzett mechanikai munka:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt \quad , \text{ mért. egysége: } J$$

Tétel: Az anyagi pont vagy pontrendszer mozgási energiájának t_1 és t_2 időpontok közti megváltozása egyenlő a rá ható erőrendszer által végzett munkával:

$$T(t_2) - T(t_1) = W_{12}$$

A munkatétel jelentőségét az adja, hogy egyes esetekben az erőrendszer által végzett munka és így a mozgási energia megváltozása könnyen meghatározható.

Munka kiszámítása vonalintegrállal:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\underline{F}\,\underline{v}}_{=P}\, dt \quad \text{mivel} \quad d\underline{r} = \underline{v}\,dt \text{, így} \quad W_{12} = \int_{r(t)} \underline{F}\, d\underline{r}$$

dt alatt $d\underline{r}$-el elmozduló anyagi pontra ható erőnek a munkája dW (integrálva W_{12})

Def: Erőtérnek nevezzük a tér azt a tartományát, amelyben egy anyagi pont bármely P pontba helyezve, arra meghatározott, a P pont helyétől és az időtől függő erő hat, vagyis $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r}, t)$.
Időtől függetlenül $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$

A műszaki mechanikában a teljesítményen alapuló definíciót tekintjük elsődlegesnek. Elsősorban merevtestekre ható erők munkájának számításakor - a ható erő nem értelmezhető erőtérként és/vagy nem értelmezhető a $d\underline{r}$ elmozdulás.

Potenciális energia:

Bizonyos erőterekben a végzett munka kifejezhető ún. potenciálfüggvénynek a pálya végpontjaiban felvett értékeivel, tehát független a pályagörbétől.

Def: Az $\underline{F}$ erőt potenciálosnak nevezzük, ha kifejezhető egy $U(\underline{r}, t)$ skaláris függvény negatív gradienseként:

$$\underline{F} = -\operatorname{grad}_{\underline{r}} U(\underline{r}, t)$$

ahol

$$\operatorname{grad}_{\underline{r}} U(\underline{r}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}$$

tehát csak a koordináták szerinti parciális deriválásokat kell elvégezni, az idő szerinti deriválást nem. A potenciális energia mértékegysége J.

Potenciálos erőterek:

pl.: • nehézségi erőtér $\underline{F} = -mg\underline{k} \Rightarrow U(\underline{r}) = mgz$

$$-\operatorname{grad} U = -\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

• rugóerő $\underline{F} = -kx\underline{i} \Rightarrow U(\underline{r}) = \frac{1}{2}kx^2$

$$-\operatorname{grad} U = \begin{bmatrix} -kx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A potenciálfüggvény nem egyértelmű, hiszen ha U_1 egy adott erő potenciálfüggvénye, akkor az U_1 és $U_2 \equiv U_1 + c$ függvény gradiense megegyezik, bármely c konstans esetén. Így a nullpontot bárhová felvehetjük, még akkor is ha az a pont időfüggő $c = c(t)$

Def: Az állandó potenciális energiájú pontokat összekötő, $U(\underline{r}) = \text{áll.}$ egyenlettel megadható felületeket szintfelületeknek nevezzük.

A potenciálos erők abban az irányban hatnak, amerre a leggyorsabban csökken a potenciálfüggvény.

Konzervatív erőterek:

Def.: Konzervatívnak nevezzük azt az $\underline{F}(\underline{r})$ erőteret, melynek egyértékű, időtől független a potenciálfüggvénye.

Tétel: • Az $\underline{F}(\underline{r})$ erőtér konzervatív

: Az $\underline{F}(\underline{r})$ potenciálos erőtér által t_1 és t_2 időpontok között végzett munka csak a potenciálfüggvény végpontokban felvett, tehát $\underline{r}_1 = \underline{r}(t_1)$ és $\underline{r}_2 = \underline{r}(t_2)$-beli értékétől függ, az anyagi pont pályájától nem

$$W_{12} = U(\underline{r}_1) - U(\underline{r}_2) \equiv U_1 - U_2$$

• Az $\underline{F}(\underline{r})$ erőtér által tetszőleges zárt görbén végzett munka nulla

• Az $\underline{F}(\underline{r})$ erőtér örvénymentes, azaz rotációja zérus:

$$\mathrm{rot}\,\underline{F}(\underline{r}) = \underline{0}$$

Def: Egy mechanikai rendszer E mechanikai energiája a rendszer mozgási energiájának és a rendszerre ható aktív erők potenciális energiájának összege:

$$E = T + U$$

Def: Konzervatívnak nevezünk egy mechanikai rendszert, ha csak időtől független ideális kényszerek korlátozzák a mozgását és a rendszer elemeire ható aktív erők konzervatívak.

Tétel: A mechanikai energia megmaradásának tétele. Konzervatív mechanikai rendszerekben a mozgási és potenciális energia összege állandó, tehát ha egy anyagi pont az $\underline{r}_1 = \underline{r}(t_1)$ pontból az $\underline{r}_2 = \underline{r}(t_2)$ pontba kerül, akkor

$$T(t_1) + U(\underline{r}_1) = T(t_2) + U(\underline{r}_2)$$

szokásos jelöléssel:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

Teljesítménytétel és munkatétel gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben:

Def: Anyagi pont relatív kinetikus energiája:

$$T_{rel} = \frac{1}{2} m \underline{v}_{P21}^2$$

↳ relatív sebesség

Def: Relatív erő relatív teljesítménye:

$$P_{rel} = \underline{F}_{rel} \underline{v}_{P21}$$

Tétel: Relatív teljesítménytétel:

$$\dot{T}_{rel} = P_{rel}$$

Tétel: Relatív munkatétel. Az anyagi pontrendszer relatív mozgási energiájának t_1 és t_2 időpontok közötti megváltozása egyenlő a rá ható erők által végzett relatív munkával:

$$T_{rel}(t_2) - T_{rel}(t_1) = W_{rel\,12}$$

Tétel: Relatív mechanikai energia megmaradásának tétele. Ha egy mechanikai rendszerben az aktív relatív erő felírható egy időtől közvetlenül nem függő egyértékű relatív potenciálfüggvény negatív gradienseként, továbbá a kényszerek ideálisak és időtől függetlenek, akkor a relatív mozgási és relatív potenciális energia összege állandó.

$$T_{rel}(t_1) + U_{rel}(\underline{r}(t_1)) = T_{rel}(t_2) + U_{rel}(\underline{r}(t_2))$$

Speciális esetek:

1, Állandó $\underline{a}_{sz}$ gyorsulással haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer. Coriolis erő nem lép fel. $\underline{F}_{sz} = -m\underline{a}_{sz}$, az erő potenciálos

$$F_{sz} = -m\underline{a}_{sz} \Rightarrow U^{sz} = m a_{sz} \xi$$

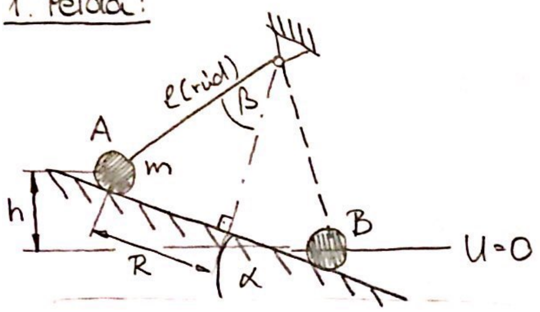
2, Álló tengely körül $\underline{\omega}_{10}$ szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszer.

$$\underline{F}_{sz} = \underline{F}_{cf} = m\omega_{10}^2 \underline{\varrho}$$

$\underline{\varrho}$ a forgástengelyre merőleges, sugárirányban kifelé mutató vektor

$$U^{cf} = -\frac{1}{2} m\omega_{10}^2 \varrho^2$$

1. Példa:



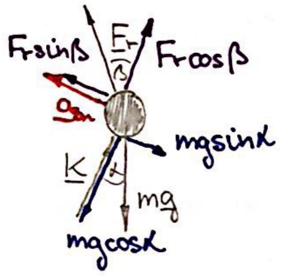
Adott: m, ℓ, α, β

Feladatok:

1, $\underline{v}_A = ?$, hogy az „m" tömegű test ne váljon el a kényszertől a B pontban!

2, Kényszererő az A pontban!

1. Szta: (B pontban)



$\underline{K} = \underline{0}$ az elválás határhelyzetében

$\underline{a}_t = \underline{0}$, mert B-ben a sebesség maximális — nulla a derivált

A dinamika alaptétele alapján:

$t: \; m a_{Bt} = 0$ — ebből is kijön

$n: \; m a_{Bn} = F_r \sin\beta - mg\sin\alpha \qquad (1)$

$b: \quad 0 = F_r\cos\beta - mg\cos\alpha + \underbrace{K}_{=0} \qquad (2)$

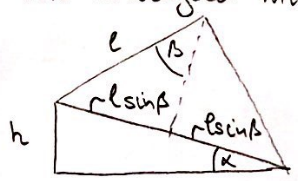
Kinematika:

$a_{Bn} = \dfrac{v_B^2}{R}$ $\longrightarrow$ v_A munkatétellel számítható (A: t_1 és B: t_2 időpillanat)

Munkatétel: ($\dot{T} = P$ integrálásával)

$T_2 - T_1 = W_{12} = W_{12}^G = U_1 - U_2$ ideális kényszer miatt $\underline{K} \cdot \underline{v} = \underline{0}$, F_r is ideális

$\frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 = \cancel{m} g h$



$h = 2\ell\sin\beta\sin\alpha$

$$v_A^2 = v_B^2 - 4\ell\sin\beta\sin\alpha \cdot g \quad (3)$$

(1) és (2) alapján:

$$F_r = mg\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad \text{és} \quad \cancel{m}\frac{v_B^2}{R} = \cancel{m}g\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - \cancel{m}g\sin\alpha \qquad \text{ahol } R = \ell\sin\beta$$

Behelyettesítés

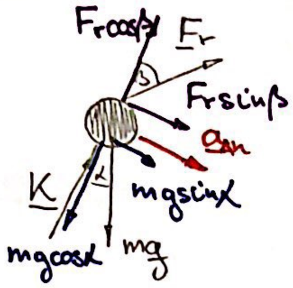
Tehát

$$v_B^2 = g\ell\sin\beta(\tan\beta\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$(3) \quad v_A^2 = \left[g\ell\sin\beta(\tan\beta\cos\alpha - \sin\alpha)\right] - 4\ell\sin\beta\sin\alpha \cdot g$$

$$v_A = \sqrt{g\ell\sin\beta(\tan\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha)}$$

2. Sztá (A pontban)



Dinamika alaptétele alapján:

$t: \; m a_{At} = 0$, mert $\underline{v}_A$ minimális

$n: \; m a_{An} = F_r \sin\beta + mg\sin\alpha$ (1)

$b: \; 0 = K + F_r\cos\beta - mg\cos\alpha$ (2)

+ kinematikai egyenlet: $a_{An} = \frac{v_A^2}{R}$ (v_A már ismert) (3)

(2) $F_r = \frac{mg\cos\alpha - K}{\cos\beta}$

(1) és (3)

$$\underbrace{m\frac{v_A^2}{R}}_{} = \frac{mg\cos\alpha - K}{\cos\beta}\sin\beta + mg\sin\alpha \quad \Big\} / \cdot\cos\beta$$

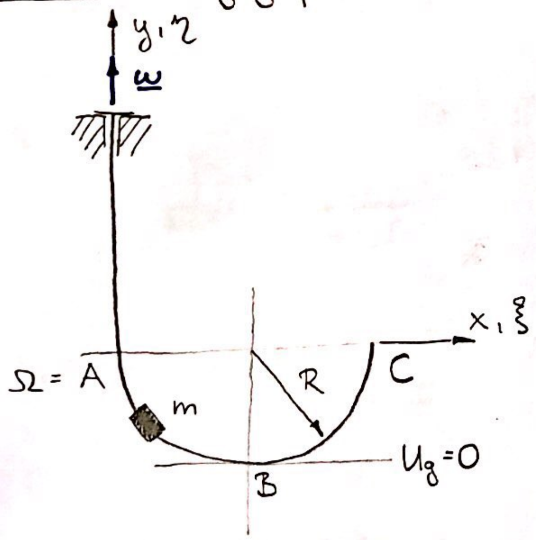
$$\frac{mg\,\ell\sin\beta(\tan\beta\cos\alpha - 5\sin\alpha)}{R}, \quad R = \cancel{\ell\sin\beta}$$

$$\Rightarrow mg(\cancel{\sin\beta}\cos\alpha - 5\sin\alpha\cos\beta) = (mg\cos\alpha - K)\sin\beta + mg\sin\alpha\cos\beta$$

$$-6mg\sin\alpha\cos\beta = -K\sin\beta$$

$$\boxed{K = \frac{6mg\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta}}, \quad \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{\tan\beta}$$

2. Példa: Anyagi pont relatív dinamikája:



Adatok:

$m = 0{,}2$ kg

$R = 0{,}1$ m

$\omega = 6{,}14 \frac{rad}{s}$ (ω_{10}) ω = áll.

Feladat:

Az m tömegű csúszka az A pontból indul mozgásnak

1, Mekkora a csúszkára ható kényszererő a B pontban, $\underline{K}_B$ = ?

2, Meghatározandó a csúszka sebessége a C pontban, $\underline{v}_C$ = ?

1, Álló koordináta-rendszer $\{x, y, z, A\}$

Mozgó koordináta-rendszer $\{\xi, \eta, \zeta, \Omega\}$ $\Omega = A$

Dinamika alaptétele a B pontban: ($\dot{\underline{I}} = \underline{F}$, $m\underline{a} = \underline{F}$) $\underline{a} = \underline{\kappa} + \underline{a}_{száll} + \underline{a}_{cor}$ valódi erő

Szállító gyorsulás:

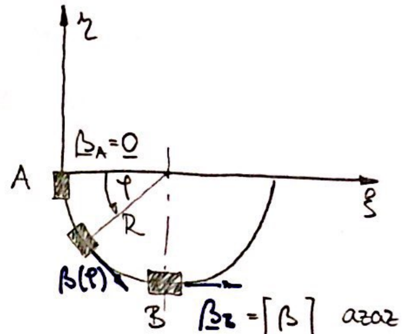
$$\underline{a}_{száll} = \underbrace{\underline{a}_{sz}}_{=\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}\times\underline{\rho}_{sz3}}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{\rho}_{sz3}) = \begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\omega R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\omega^2 R\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega}\times\underline{\rho}_{sz3} = \begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}R\\ -R\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\omega R\end{bmatrix}$$

Coriolis gyorsulás:

$\underline{a}_{cor} = 2\underline{\omega}\times\underline{\beta}$ és $\underline{v} = \underline{v}_{száll} + \underline{\beta}$

$\underline{v}_{száll} = \underline{v}_{sz} + \underline{\omega}\times\underline{\rho}_{sz3} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -R\omega\end{bmatrix}$ (körbenforgás sebessége)



$\underline{\beta}_B = \begin{bmatrix}\beta\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ azaz $\underline{v} = \begin{bmatrix}\beta\\ -R\omega\\ 0\end{bmatrix}$

B pontbeli sebes-
ge a csúszkához

β munkatétel segítségével számítható ki:

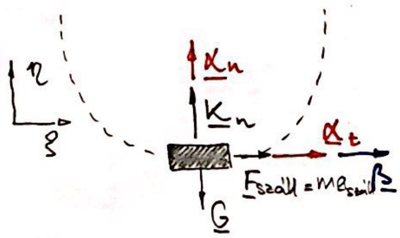
Megjegyzés:

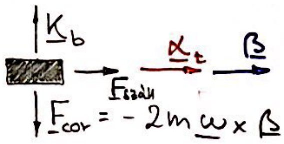
$$W = \int_{t_0}^{t_1} P\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\,\underline{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\frac{d\underline{r}}{dt}dt = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underline{F}\,d\underline{r}$$

Ha az erő potenciálos, akkor:

$$\underline{F} = -\text{grad}\,U = -\frac{dU}{d\underline{r}} \rightarrow W = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} \underbrace{\text{grad}\,U}_{\frac{dU}{d\underline{r}}}\,d\underline{r} = -\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}_1} dU = -(U(\underline{r}_1) + U(\underline{r}_0))$$

Szabadtest ábra a B pontban



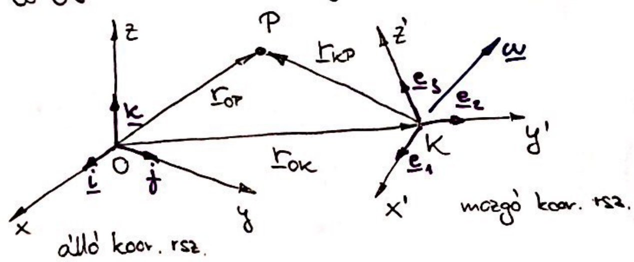


$$\underline{F}_{cor} = -2m\underline{\omega}\times\underline{\beta} = -2m\begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\beta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = 2m\omega\beta\underline{k}$$

$$\underline{K} = \underline{K}_n + \underline{K}_b + \underbrace{\underline{K}_t}_{=\underline{0}},\ \mu = 0$$

$\underline{\beta}\perp\underline{K}$ (ideális kényszer)

Megjegyzés: Relatív mozgások:



sebességek:

$\underline{r}_{OP} = \underline{r}_{OK} + \underline{r}_{KP}$

$\underline{v}_P = \underline{v}_K + \dot{\underline{r}}_{KP}$

$$\dot{\underline{r}}_{KP} = \frac{d}{dt}(x'\underline{e}_1 + y'\underline{e}_2 + z'\underline{e}_3) = \underbrace{\dot{x}'\underline{e}_1 + \dot{y}'\underline{e}_2 + \dot{z}'\underline{e}_3}_{=\underline{\beta}_P} + \underbrace{x'\dot{\underline{e}}_1 + y'\dot{\underline{e}}_2 + z'\dot{\underline{e}}_3}_{=\underline{\omega}\times\underline{r}_{KP},}$$

mert

$\dot{\underline{e}}_k = \underline{\omega}\times\underline{e}_k$

Ezzel:

$$\underline{v}_P = \underline{\beta}_P + \underbrace{\underline{v}_K + \underline{\omega}\times\underline{r}_{KP}}_{=\underline{v}_{száll}}$$

gyorsulásot:

$$\underline{v}_P = \underline{\beta}_P + \underline{v}_K + \underline{\omega}\times\underline{r}_{KP} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\underline{a}_P = \frac{d}{dt}(\underline{\beta}_P) + \underline{a}_K + \underline{\varepsilon}\times\underline{r}_{KP} + \underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}_{KP}$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{\beta}_P) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}'\underline{e}_1 + \dot{y}'\underline{e}_2 + \dot{z}'\underline{e}_3\right) = \underbrace{\ddot{x}'\underline{e}_1 + \ddot{y}'\underline{e}_2 + \ddot{z}'\underline{e}_3}_{=\underline{\alpha}_P} + \underbrace{\dot{x}'\dot{\underline{e}}_1 + \dot{y}'\dot{\underline{e}}_2 + \dot{z}'\dot{\underline{e}}_3}_{\underline{\omega}\times\underline{\beta}_P}$$

$$\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}_{KP} = \underline{\omega}\times\underline{\beta}_P + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_{KP})$$

$$\underline{a}_P = \underline{\alpha}_P + \underbrace{\underline{a}_K + \underline{\varepsilon}\times\underline{r}_{KP} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}_{KP})}_{\underline{a}_{P\,száll}} + \underbrace{2\underline{\omega}\times\underline{\beta}_P}_{\underline{a}_{P\,cor}}$$

Megjegyzés: Munkatétel relatív rendszerekben (anyagi pontra)

$$\underline{a} = \underline{\alpha} + \underline{a}_{száll} + \underline{a}_{cor}$$

$$\underbrace{m\underline{a}}_{=\underline{F}} = \underbrace{m\underline{\alpha}}_{=\underline{F}_{rel}} + \underbrace{m\underline{a}_{száll}}_{=\underline{F}_{száll}} + \underbrace{m\underline{a}_{cor}}_{=-\underline{F}_{cor}}$$

$$m\underline{\alpha} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor} \quad /\cdot\underline{\beta}$$

$$\underline{\alpha}\,\underline{\beta} = \left(\ddot{x}'\underline{e}_1 + \ddot{y}'\underline{e}_2 + \ddot{z}'\underline{e}_3\right)\left(\dot{x}'\underline{e}_1 + \dot{y}'\underline{e}_2 + \dot{z}'\underline{e}_3\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}'^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{y}'^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{z}'^2\right) = \dot{\overline{\left(\frac{1}{2}\beta^2\right)}}$$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1}\dot{\overline{\left(\frac{1}{2}m\beta^2\right)}}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}\right)\underline{\beta}\,dt} \qquad \int_{t_0}^{t_1}\dot{T}_{rel}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\underline{F}_{rel}\underline{\beta}\,dt$$

Munkatétel felírása:

$$\frac{1}{2}m\beta_B^2 - \frac{1}{2}m\beta_A^2 = \int_{t_0}^{t_1}\left(\underline{F}\underline{\beta} + \underline{F}_{száll}\underline{\beta} + \underline{F}_{cor}\underline{\beta}\right)dt$$

Valódi erők munkája:

$$\underline{F} = \underline{K} + \underline{G} \Rightarrow \underline{F}\underline{\beta} = \underbrace{\underline{K}\cdot\underline{\beta}}_{=\underline{0},\ \underline{K}\perp\underline{\beta}} + \underline{G}\cdot\underline{\beta} = -\frac{dU_g}{dz}\frac{dz}{dt}$$

ideális kényszer

potenciálos

$$\left(\begin{bmatrix} -\frac{\partial U_g}{\partial \xi} \ (=0) \\ -\frac{\partial U_g}{\partial z} \\ -\frac{\partial U_g}{\partial \zeta} \ (=0)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\frac{d\xi}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt}\end{bmatrix}\right)$$

Ezzel

$$\int_{t_0}^{t_1}\underline{F}\underline{\beta}\,dt = \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_B} -dU_g = U_g(\underline{r}_A) - U_g(\underline{r}_B) = mgR - 0$$

A szállító erő munkája:

változó koordináta

$$|\underline{F}_{száll}| = |-m\underline{a}_{száll}| = mR\omega^2 \quad \rightarrow \quad \underline{F}_{száll} = -\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{1}{2}m\xi^2\omega^2\right) \quad \text{innen} \quad U_{száll} = -\frac{1}{2}m\omega^2\xi^2$$

(potenciálos)

$$\int_{t_0}^{t_1}\underline{F}_{száll}\underline{\beta} = \int_{t_0}^{t_1} -\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{1}{2}m\xi^2\omega^2\right)\frac{d\xi}{dt}\,dt = \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_B} d\left(\frac{1}{2}m\omega^2\xi^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2R^2$$

Coriolis erő munkája:

$\underline{F}_{cor}\underline{\beta} = \underline{0}$, mert $\underline{F}_{cor} = 2m\underline{\omega}\times\underline{\beta} \perp \underline{\beta}$-ra

Mivel $\beta_A = \underline{0}$:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\beta_B^2 = \cancel{m}gR + \frac{1}{2}\cancel{m}\omega^2R^2$$

$$\beta_B = \sqrt{2gR+\omega^2R^2} = \underline{\underline{1{,}529\ \frac{m}{s}}}$$

Így most már minden ismert a dinamika alaptételének alkalmazásához:

$$m\underline{\alpha} = \underline{F} + \underline{F}_{sz} + \underline{F}_{cor} = \underline{K} + \underline{G} + m\begin{bmatrix} R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2m\omega\beta_B\underline{k}$$

ξ vagy t: $m\alpha_t = mR\omega^2 \longrightarrow \alpha_t = R\omega^2 = \underline{\underline{3{,}77\frac{m}{s^2}}}$

η vagy n: $m\alpha_n = -mg + K_n \quad \left(\alpha_n = \frac{\beta_B^2}{R}\right)$

ζ vagy b: $0 = -K_b + 2m\omega\beta_B \rightarrow K_b = 2m\omega\beta_B = \underline{\underline{3{,}76\ N}}$

$K_n = m(\alpha_n + g) = m\left(\frac{\beta^2}{R} + g\right) = \underline{\underline{6{,}64\ N}} \qquad |\underline{K}_B| = \sqrt{K_n^2 + K_b^2} = \underline{\underline{7{,}63\ N}}$

2) Munkatétel a relatív rendszerben A és C pontbeli helyzetek között:

$$\frac{1}{2}m\beta_C^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{\beta_A^2}_{=0} = \int_{t_0}^{t_2}(\underline{F}\underline{\beta} + \underline{F}_{sz}\underline{\beta} + \underline{F}_{cor}\underline{\beta})\,dt$$

- Valódi erők munkája:

$$\underline{F} = \underline{K} + \underline{G} \Rightarrow \underline{F}\underline{\beta} = \underbrace{\underline{K}\underline{\beta}}_{=\underline{0}\ \text{(ideális kényszer)}} + \underline{G}\underline{\beta} = -\frac{\partial U_g}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t_2}\underline{F}\underline{\beta}\,dt = \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_C} -dU_g = U_g(\underline{r}_A) - U_g(\underline{r}_C) = 0$$ az A és C pontok azonos potenciálszinten helyezkednek el

- Szállító erők munkája:

$$\underline{F}_{száll}\underline{\beta} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}m\omega^2\xi^2\right)\frac{d\xi}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_2}\underline{F}_{sz}\underline{\beta}\,dt = \int_{\underline{r}_A}^{\underline{r}_C} d\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\omega^2\xi^2\right)}_{=U_{száll}} = \underbrace{U_{száll}(\underline{r}_A)}_{=0} - U_{száll}(\underline{r}_C) = \frac{1}{2}m\omega^2(\ldots) = \underline{2m\omega^2R^2}$$

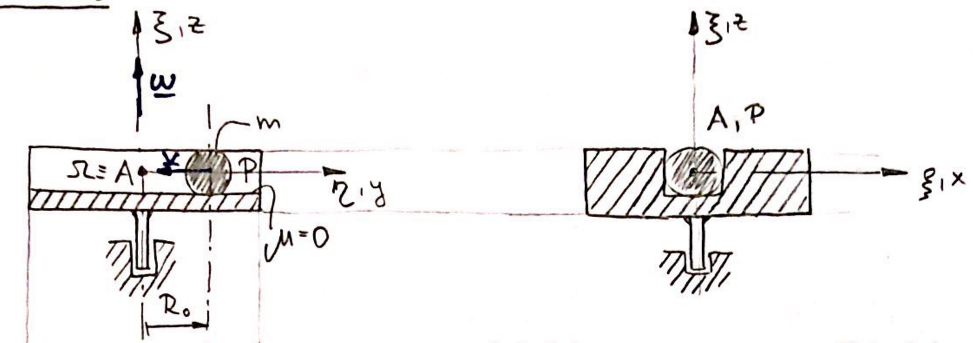
- Coriolis erő munkája:

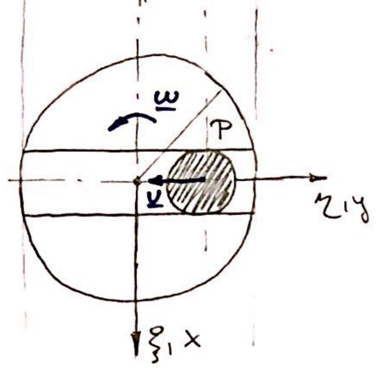
$\underline{F}_{cor}\underline{\beta} = 0$, mert $\underline{F}_{cor} \perp \underline{\beta}$

Ezzel $\frac{1}{2}\cancel{m}\beta_C^2 = 2\cancel{m}\omega^2R^2 \Rightarrow \beta_C = 2R\omega = 1{,}228\frac{m}{s}$

$$\underline{v}_C = \underline{\beta}_C + \underline{v}_{C,száll} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2r\omega \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\underline{v}_{\Omega}}_{=\underline{0}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2R\omega \\ -2R\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}228 \\ -1{,}228 \end{bmatrix}\frac{m}{s} \quad |\underline{v}_C| = \underbrace{2\sqrt{2}R\omega}_{=\sqrt{2\cdot 4R^2\omega^2}} = \underline{\underline{1{,}737\frac{m}{s}}}$$

3. Példa:





Adatok:

$\omega = 0{,}3 \ \frac{rad}{s}$ = áll.

$v = 2 \ \frac{m}{s}$ = áll

$m = 50 \ kg$

$R_0 = 5 \ m$

$R_1 = 2 \ m$

Feladat: Az m tömegű anyagi pontot a tárcsa középpontján át vezetett kötéllel v állandó sebességgel húzzuk a középpont felé.

1, a, Mekkora a kötélerő az R_0 helyzetben

b, Mekkora kényszererő ébred a vezetősínben az R_0 helyzetben?

2, Mekkora munkát végez a kötélerő az R_0 és R_1 helyzetek között megtett út során!

1, Álló koord.-rendszer $\{x, y, z, A\}$ (környezethez rögzített)

Mozgó koord.-rendszer $\{\xi, \zeta, \xi, \Omega\}$, ahol $\Omega \equiv A$

Dinamika alaptétele (R_0 helyzetben):

$m\underline{a} = \underline{F}$; $\underline{a} = \underline{\alpha} + \underline{a}_{sz} + \underline{a}_{cor}$

$\underline{\alpha} = ?$ $\quad \underline{v} = \underline{\beta} = \text{áll} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$.

$\underline{a}_{száll} = ?$ $\quad \underline{a}_{száll} = \underbrace{\underline{a}_A}_{=\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AP}}_{=\underline{0}\text{, mert } \omega = \text{áll.}} - \omega^2 \underline{r}_{AP} = -\omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{a}_{cor} = 2\underline{\omega} \times \underline{\beta} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

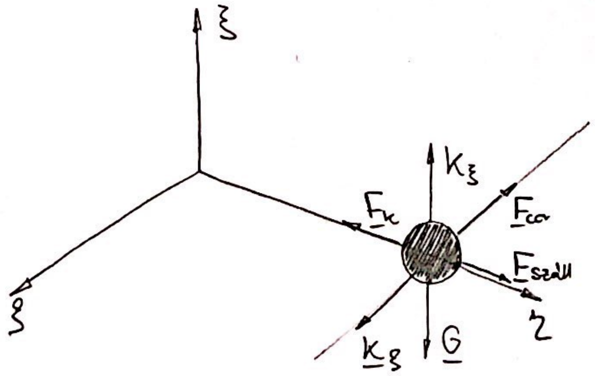
kötélerő

$m\underline{a} = \underbrace{m\underline{\alpha}}_{=\underline{0}} + \underbrace{m\underline{a}_{száll}}_{=-\underline{F}_{száll}} + \underbrace{m\underline{a}_{cor}}_{=-\underline{F}_{cor}} = \underline{F} = \underline{G} + \underline{F}_k + \underline{K}$

Innen:

$\underbrace{\underline{G} + \underline{F}_k + \underline{K}}_{\text{Valódi erők}} + \underbrace{\underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}}_{\text{tehetetlenségi erők}} = \underline{0}$

Szabadtest ábra:



$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -F_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\xi \\ 0 \\ K_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m\omega^2 R_0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m2\omega v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vetületi egyenletek

ξ: $K_\xi = 2m\omega v = \underline{\underline{60 N}}$

ζ: $F_k = m\omega^2 R_0 = \underline{\underline{22{,}5 N}}$

ξ: $K_\xi = mg = \underline{\underline{490{,}5 N}}$

2) A kötélerő munkája:

$$W_{01} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_k \underline{v} = \int_{R_0}^{R_1} \underline{F}_k \frac{d\underline{r}}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = -\int_{R_0}^{R_1} m\omega^2 r\, dr = -m\omega^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_0}^{R_1} = -\frac{m\omega^2}{2}\left(R_1^2 - R_0^2\right) = \underline{\underline{47{,}25\ J}}$$

$\underline{F}_k$ és $d\underline{r}$ ellentétes irányúak

Megjegyzés: $\underline{F}_k = -\underline{F}_{száll}$; $\underline{F}_{száll} = -\operatorname{grad} U_{száll}$

$$W_{01} = \int_{R_0}^{R_1} \frac{dU_{száll}}{dr}\left(-\frac{dr}{dt}\right) = -\left[\frac{1}{2} m\omega^2 r^2\right]_{R_0}^{R_1} = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(R_0^2 - R_1^2\right)$$