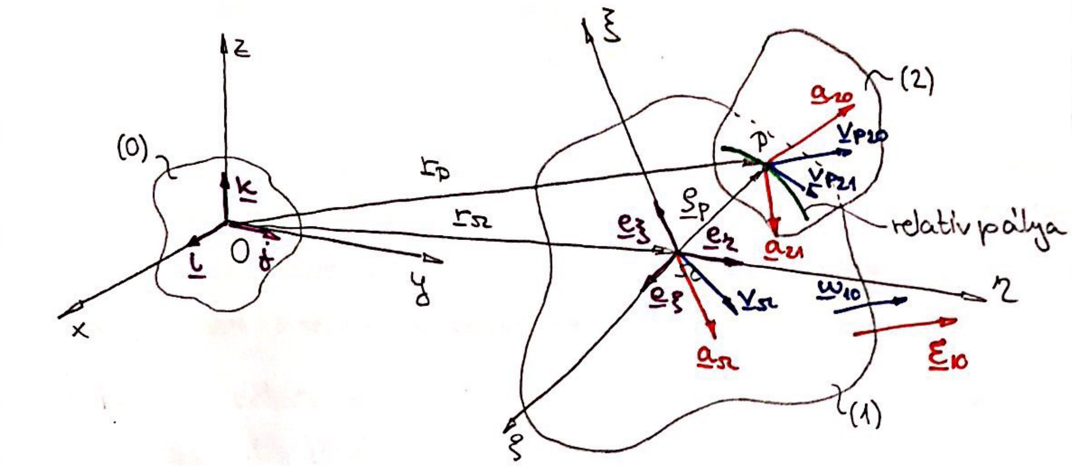
Elméleti összefoglaló:

Relatív kinematika: merev testek mozgásának leírása egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekben

Az eddigiekben a merev testek mozgását hallgatólagosan egy állónak tekintett vonatkoztatási rendszerben írtuk le. Bizonyos esetekben azonban könnyebb a vizsgált test mozgásának leírása egy alkalmasan választott mozgó vonatkoztatási rendszerhez képest. Ha továbbra is az álló rendszerhez szeretnénk viszonyítani a mozgást, akkor célszerű két lépésre bontani a sebesség és gyorsulásállapot kiszámítását. Ehhez azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen kapcsolat van a vizsgált test mozgó vonatkoztatási rendszerhez és álló vonatkoztatási rendszerhez viszonyított mozgása között.



(0) – álló vonatkoztatási rendszer

(1) – mozgó vonatkoztatási rendszer

(2) – vizsgált test

A relatív mozgások problémakörének vizsgálata először a csillagászati megfigyelésekhez kapcsolódóan merült fel, hiszen a csillagászoknak a mozgó földről kellett leírniuk a többi bolygó mozgását.

A gépészmérnöki gyakorlatban leggyakrabban olyankor használjuk, amikor van valamilyen ismert kényszerfeltétel az (1) és (2) testek mozgása között.

Az ábrán a két test kapcsolata úgy jelenik meg, hogy a (2) test P pontja az (1) testhez rögzített vezetékben mozog.

Hogy könnyebb legyen a kényszerkapcsolatok figyelembevétele, két lépésre bontjuk a vizsgált test mozgásának leírását: külön vizsgáljuk a (0) álló és (1) mozgó vonatkoztatási rendszerek mozgásának kapcsolatát és a (2) vizsgált testnek az (1) mozgó rendszerhez viszonyított mozgását. Ez utóbbi annak felel meg, hogy gondolatban megállítjuk a rendszert.

Tekintsünk két megfigyelőt egyet „O"-ban, egyet pedig „Ω"-ban. Ekkor a felírható helyvektorok A és B pontok között:

$$\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{és} \quad \underline{\rho}_{AB} = \begin{bmatrix} \xi_{AB} \\ \eta_{AB} \\ \zeta_{AB} \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)}$$

Bár magukat a helyvektorokat ugyanolyannak látja a két megfigyelő, a helyvektorok változását tehát a sebesség- és gyorsulásvektorokat irány és nagyság szempontjából is másképp észlelhetik. Vagyis az idő szerinti deriválás ad más eredményt, ha a másik vonatkoztatási rendszerből szemlélve hajtjuk végre.

Sebességállapot:

A (2) vizsgált test P pontjának helyvektorát a (0) álló vonatkoztatási rendszerben az $\underline{r}_P(t)$ vektor adja meg.

Ugyanakkor az (1) mozgó rendszerhez rögzített $\Omega(\xi,\eta,\zeta)$ koordináta-rendszerben a P pont helyvektora

$$\underline{\varrho}_P(t) = \xi_P(t)\underbrace{\underline{e}_\xi(t) + \eta_P(t)\underline{e}_\eta(t) + \zeta_P(t)\underline{e}_\zeta}_{\text{bázisvektorok}}(t)$$

A ϱ_P vektor skalár komponenseinek a változását (relatív sebességet) figyelheti meg a mozgó rendszerben tartózkodó megfigyelő.

Def: Relatív sebesség: a (2) test P pontjának sebessége az (1) mozgó vonatkoztatási rendszerhez képest

$$\underline{v}_{P21} = \overset{\circ}{\underline{\varrho}} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_P(t) \\ \dot{\eta}_P(t) \\ \dot{\zeta}_P(t) \end{bmatrix}$$

A relatív sebesség vektorának felírása során figyelembe tudjuk venni az (1) és (2) testek közti esetleges kényszerkapcsolatot. Célunk az, hogy az így nyert információ felhasználásával kifejezzük a (2) test P pontjának a (0) vonatkoztatási rendszerhez képest mérhető sebességét az úgynevezett abszolút sebességet.

Def: Abszolút sebesség: a (2) test P pontjának sebessége a (0) álló vonatkoztatási rendszerhez képest, tehát a (0) rendszerben felírt $\underline{r}_P$ vektor idő szerinti deriváltja

$$\underline{v}_{P20} = \dot{\underline{r}}_P$$

$$\underline{v}_{P20} = \underline{v}_{P21} + \underbrace{\underline{v}_\Omega + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\varrho}_P}_{=\underline{v}_{P10}}$$

Def: $\underline{v}_{P10} = \underline{v}_\Omega + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\varrho}_P$ a mozgó vonatkoztatási rendszer P-vel egybeeső pontjának sebessége az ún. szállító sebesség.

Tétel: A (2) merev test álló rendszerből észlelt $\underline{\omega}_{20}$ abszolút szögsebessége, az (1) mozgó rendszerből észlelt $\underline{\omega}_{21}$ relatív szögsebessége, valamint az (1) mozgó vonatkoztatási rendszer forgásának szögsebessége $\underline{\omega}_{10}$ (szállító szögsebesség):

$$\underline{\omega}_{20} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21}$$ tehát a szögsebességek vektorként adhatók össze.

Gyorsulásállapot:

Relatív és abszolút gyorsulások

Def: Relatív gyorsulás: a (2) test P pontjának gyorsulása az (1) mozgó vonatkoztatási rendszerhez képest

$$\underline{a}_{P21} = \overset{\circ\circ}{\underline{\varrho}}_P = \overset{\circ}{\underline{v}}_{P21} = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_P(t) \\ \ddot{\eta}_P(t) \\ \ddot{\zeta}_P(t) \end{bmatrix}$$

∘ - koordináták idő szerinti deriváltja (a bázisvektoroké nem!)

Def: Abszolút gyorsulás: a (2) test P pontjának gyorsulása a (0) álló vonatkoztatási rendszerhez képest

$$\underline{a}_{P20} = \ddot{\underline{r}}_P = \dot{\underline{v}}_{P20}$$

Def: Az $\underline{a}_{P10} = \underline{a}_{\Omega} + \underline{\varepsilon}_{10} \times \underline{\rho}_P + \underline{\omega}_{10} \times (\underline{\omega}_{10} \times \underline{\rho}_P)$ szállító gyorsulás az (1) vonatkoztatási rendszer P-vel fedésben lévő pontjának gyorsulása $\underline{a}_{PCor} = 2\underline{\omega}_1 \times \underline{v}_{P21}$ pedig az ún. Coriolis gyorsulás.

Tétel: A P pont abszolút gyorsulása a relatív gyorsulás, a szállító gyorsulás és a Coriolis gyorsulás összege:

$$\underline{a}_{P20} = \underline{a}_{P21} + \underline{a}_{P10} + \underline{a}_{PCor}$$

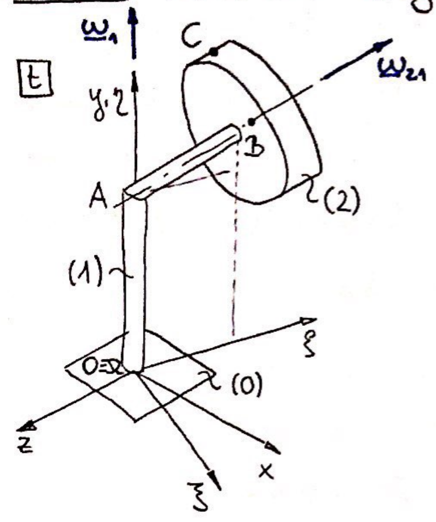
↳ szemlélettel nehezen magyarázható

- Azért alkalmazzuk a relatív kinematika összefüggéseit, hogy az (1) és (2) testek mozgása közti kapcsolatot könnyen figyelembe tudjuk venni. A két test közötti kényszerfeltétel kihasználása szempontjából matematikailag mindegy, hogy melyik testet tekintjük mozgó vonatkoztatási rendszernek és melyiket vizsgált testnek, azaz a két test szerepe felcserélhető
- Az a_{P10} szállító gyorsulás csak az (1) mozgó vonatkoztatási rendszer gyorsulásállapotától függ
- Az $\underline{a}_{PCor}$ Coriolis gyorsulás meghatározásához csak a sebességállapotot kell ismerni

Tétel: A (2) merev test álló rendszerből észlelt $\underline{\varepsilon}_{20}$ abszolút szöggyorsulása, az (1) mozgó rendszerből észlelt $\underline{\varepsilon}_{21}$ relatív szöggyorsulása, valamint az (1) mozgó vonatkoztatási rendszer forgásának $\underline{\varepsilon}_{10}$ szöggyorsulása (szállító szöggyorsulás)

$$\underline{\varepsilon}_{20} = \underline{\varepsilon}_{21} + \underline{\varepsilon}_{10} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21}$$

1. Példa: Robotkar mozgásának vizsgálata:



Adatok: $\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$ = áll.

$|\underline{\omega}_{21}| = 2 \frac{rad}{s}$ = áll. (2-es test 1-hez viszonyított szögsebessége)

$\underline{r}_{AB}(t_0=0) = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} m$; $\underline{r}_{BC}(t_0=0) = \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} m$

Meghatározandó: a $t_0 = 0$ időpillanatban a (2) test mozgásállapota a (0)-hoz viszonyítva a C ponthoz rendelt mennyiségekkel.

I. Sebességállapot $[\underline{\omega}_2, \underline{v}_C] = ?$

II. Gyorsulásállapot $(\underline{\omega}_2; \underline{\varepsilon}_2; \underline{a}_C = ?)$

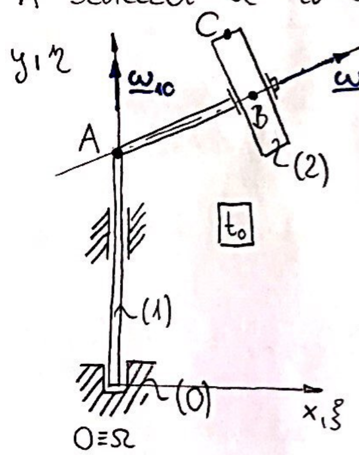
A (2) test mozgását egyszerűbb az (1) testhez viszonyítva vizsgálni, hiszen így álló tengely körüli forgó mozgást végez.

Vonatkoztatási rendszerek: a (0) jelű test
az (1) jelű test

Koordináta rendszerek:

- a (0) testhez kötött $(x, y, z, 0)$
- az (1) testhez kötött $(\xi, \eta, \zeta, \Omega)$

A szerkezet a $t_0 = 0$ időpillanatban:



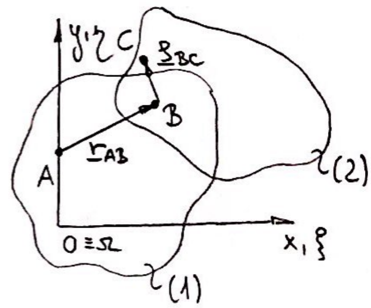
(x-y) és (ξ-η) síkok fedésben vannak!

A vizsgált pont a C pont:

- a (2) test C_2 és
- az (1) test C_1 (fiktív pont)

pillanatnyilag fedésben lévő pontjai elmozdulnak egymáshoz képest

$\underline{v}_{C1} \neq \underline{v}_{C2}$ és $\underline{a}_{C1} \neq \underline{a}_{C2}$



A sebességeik és gyorsulásaik között felírhatók a relatív kinematikai összefüggések:

$$\underline{v}_{C2} = \underbrace{\underline{\beta}_{C2}}_{\text{relatív}} + \underbrace{\underline{v}_{C2\,száll}}_{=\underline{v}_{C1}} \qquad \underline{a}_{C2} = \underline{\alpha}_{C2} + \underbrace{\underline{a}_{C2\,száll}}_{=\underline{a}_{C1}} + \underbrace{\underline{a}_{C2\,cor}}_{=2\underline{\omega}_1 \times \underline{\beta}_{C2}}$$

szögsebességek és szöggyorsulások:

$$\underline{\omega}_{20} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21}$$

$$\underline{\varepsilon}_{20} = \underline{\varepsilon}_{10} + \underline{\varepsilon}_{21} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{\omega}_{21}$$

Lépések (I) (2)-es test mozgásának vizsgálata (1)-hez képest

(álló tengely körüli forgó mozgás, az egyes pontok relatív pályája kör, a C ponté is)

A mozgás leírása az (1)-hez rögzített (ξ, η, ζ) koordinátarendszerben történik, tehát tehát a sebességek $\underline{\beta}$ a gyorsulások $\underline{\alpha}$ jelölésűek. A szögsebességek és szöggyorsulások $\underline{\omega}_{21}$ és $\underline{\varepsilon}_{21}$ indexelésűek.

(II) Az (1) test mozgásának vizsgálata (0) hoz képest (álló tengely körüli forgómozgás az egyes pontok pályája kör).

A mozgás leírása a (0)-hoz rögzített (x, y, z) koordinátarendszeben történik, a sebességek $\underline{v}$, és gyorsulások $\underline{a}$ jelölésűek. A szögsebességek $\underline{\omega}_{10}$, a szöggyorsulások $\underline{\varepsilon}_{10}$ indexelésűek.

(III) Az (I) és (II) összerendelése a relatív kinematika összefüggéseivel.

$(x, y, z) \Leftrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ transzformáció!

Sebességállapot:

1, (2) test mozgása (1)-hez képest

Leírás (1)-hez rögzített (ξ, η, ζ) koordinátarendszerben

Figyelembe véve, hogy

$|\underline{\omega}_{21}| = 2 \frac{rad}{s}$ és $\underline{\omega}_{21} \parallel \underline{r}_{AB}$, így $\underline{\omega}_{21} = \omega_{21} \underline{e}_{AB} = 2 \underline{e}_{AB} \frac{rad}{s}$

Mivel $x \parallel \xi$ és $y \parallel \eta$ így $\underline{e}_{AB} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \Rightarrow \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$

Mintha állna a szerkezet (1)

$$\underline{\beta}_C = \underbrace{\underline{\beta}_B}_{=\underline{0}\ (\text{áll.})} + \underline{\omega}_{21} \times \underline{\rho}_{BC} = \underline{\omega}_{21} \times \underline{\rho}_{BC} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,96 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

2) (1) test mozgásának vizsgálata (0)-hoz képest (álló tengely körüli forgó mozgás, az egyes pontok pályája kör)

Leírás az (x, y, z) koordinátarendszerben

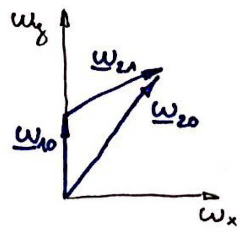
$$\underline{v}_{C1} = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}_{10} \times \underline{r}_{AC} = \underbrace{\underline{\omega}_{10}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \times \underbrace{(\underline{r}_{AB} + \underline{r}_{BC})}_{\begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,9 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,4 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

3, 1, és 2, összerendelése, mivel (x, y, z) transzformációval kapható (ξ, η, ζ)-ból célszerű választás az $x \parallel \xi$, $y \parallel \eta$, $z \parallel \zeta$

$$\underline{v}_{C2} = \underbrace{\underline{\beta}_{C2}}_{=\underline{\beta}_C} + \underbrace{\underline{v}_{C2száll}}_{=\underline{v}_{C1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,56 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

és

$$\underline{\omega}_{20} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 2,2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$



Gyorsulásállapot:

1, ② test mozgásának vizsgálata ①-hez képest

(Az ①-hez rögzített (ξ,η,ζ) koordináta-rendszerben)

~ tegyük fel, hogy az ① áll! (relatív mozgás)

$$\underline{\alpha}_C = \underbrace{\underline{\alpha}_B}_{\substack{=0\\(\text{áll.})}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{21}}_{=0} \times \underline{\rho}_{BC} + \underbrace{\underline{\omega}_{21}\times(\underline{\omega}_{21}\times\underline{\rho}_{BC})}_{\underline{\omega}_{21}\underbrace{(\underline{\omega}_{21}\cdot\underline{\rho}_{BC})}_{\perp}-\omega_{21}^2\underline{\rho}_{BC}} = -\omega_{21}^2\underline{\rho}_{BC} = -4\begin{bmatrix}-0{,}4\\0{,}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1{,}6\\1{,}2\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

(kifejtési tétel)

2, ① test mozgásának vizsgálata ⓪-hoz képest

(⓪-hoz rögzített (x,y,z) koordináta-rendszer)

$$\underline{a}_{C1} = \underbrace{\underline{a}_A}_{=0} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_1}_{=0} \times \underline{r}_{AC} + \underline{\omega}_1\times(\underline{\omega}_1\times\underline{r}_{AC}) = \underline{\omega}_1(\underline{\omega}_1\cdot\underline{r}_{AC}) - \omega_1^2\underline{r}_{AC} = \underline{\omega}_1(\underline{\omega}_1\cdot\overbrace{(\underline{r}_{AB}+\underline{r}_{BC})}^{\begin{bmatrix}0{,}4\\0{,}9\\0\end{bmatrix}}) - \omega_1^2(\underline{r}_{AB}+\underline{r}_{BC}) =$$

$\underline{\omega}_1 =$ áll.

$$=1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0{,}4\\0{,}9\\0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}0{,}4\\0{,}9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0{,}9\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0{,}4\\0{,}9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}4\\0\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

3, Az ① és ② összerendelése a relatív kinematika összefüggéseivel

$$\underline{a}_{C2} = \underbrace{\underline{\alpha}_{C2}}_{=\begin{bmatrix}-1{,}6\\1{,}2\\0\end{bmatrix}} + \underbrace{\underline{a}_{C2száll}}_{=\begin{bmatrix}-0{,}4\\0\\0\end{bmatrix}} + \underline{a}_{C2Cor}$$

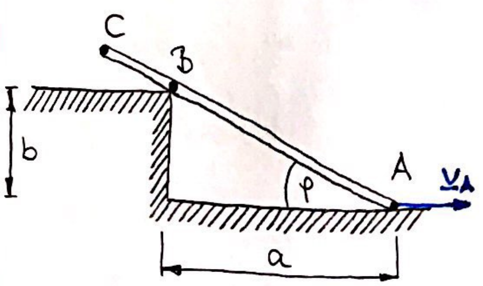
$$\underline{a}_{C2Cor} \rightarrow 2(\underline{\omega}_1\times\underline{\beta}_c) = 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\0{,}96\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}92\\0\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$$

Ezzel: $\underline{a}_{C2} = \begin{bmatrix}-0{,}08\\1{,}2\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$

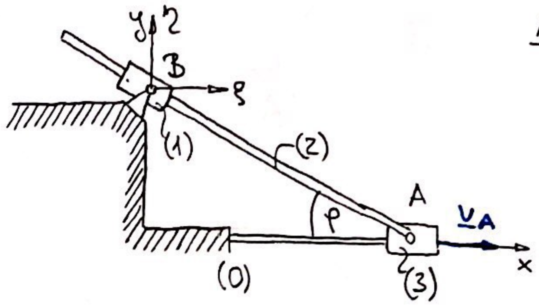
$$\underline{\varepsilon}_2 = \underbrace{\underline{\varepsilon}_1}_{=0} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{21}}_{=0} + \underline{\omega}_1\times\underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1{,}6\\1{,}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\-1{,}6\end{bmatrix}\frac{rad}{s^2}$$

2. Példa:

Lecsúszó rúd:



⇒



Adatok: $v_A = 2{,}5\frac{m}{s} =$ áll

$a = 4\,m$

$b = 3\,m$

Feladat: a vázolt helyzetben a rúd mozgásállapota – (0)-hoz viszonyítva – a B ponthoz rendelt mennyiségekkel

I. Sebességállapot $[\underline{\omega}; \underline{v}_B] = ?$

Sebességábra!

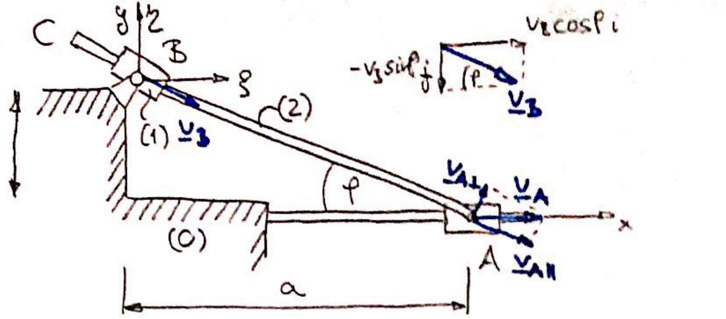
II. Gyorsulásállapot $(\underline{\omega}, \underline{\varepsilon}, \underline{a}_B) = ?$

Gyorsulásábra!

I. Sebességállapot:

A vizsgált B pont: • (2) test B_2

• (1) test B_1



A koordináta-rendszerek célszerűen vannak megválasztva:

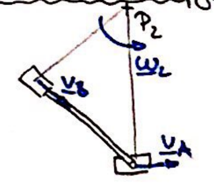
$x \parallel \xi$, $y \parallel \eta$, $z \parallel \zeta$

A B pontnak csak rúdirányú sebességösszetevője van: $\underline{v}_B = \underline{v}_{B\parallel}$

A pillanatnyilag fedésben lévő pontok elmozdulnak egymáshoz képest.

$\underline{v}_{B1} \neq \underline{v}_{B2}$ és $\underline{a}_{B1} \neq \underline{a}_{B2}$

Szemlélet alapján $\underline{v}_{B\parallel} = \underline{v}_{A\parallel} \equiv \underline{v}_B$



$$v_B = v_A \cos\varphi = v_A \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\ \frac{m}{s} \qquad \underline{v}_B = \begin{bmatrix} v_B\cos\varphi \\ -v_B\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4/5 \\ -2\cdot 3/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{\underbrace{\varrho_{AP_2}}_{\text{póluspont helye}}} = \frac{v_A}{\varrho_{AB}/\sin\varphi} = \frac{v_A}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\varphi = 0{,}3\ \frac{rad}{s} \qquad \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}3 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

Analitikusan:

$$\underbrace{\underline{v}_B}_{\text{abszolút seb.}} = \underline{v}_{B2} = \overbrace{\underline{\beta}_{B2}}^{\text{relatív sebesség}} = \underline{\beta}_B \qquad \text{(szállító sebesség zérus)}$$

(1) fedésben lévő pontjának a sebessége

$$\underline{v}_{B2} = \underline{v}_{A2} + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{A2B2} = \overbrace{\begin{bmatrix} v_{A2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\text{abszolút sebesség}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{A2} - \omega_2 b \\ -a\omega_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x&: v_{B2x} = v_{A2} - \omega_2 b \equiv v_B\cos\varphi \\ y&: v_{B2y} = -a\omega_2 \equiv -v_B\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\omega_2 = \frac{v_B \sin\varphi}{a}} = 0{,}3\ \frac{rad}{s}$$

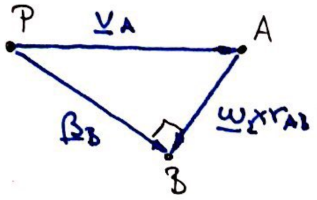
$$v_{A2} - \frac{v_B \sin\varphi}{a} b = v_B\cos\varphi$$

$$v_{A2} = v_B\left(\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{a} b\right) \Rightarrow \boxed{v_B = \frac{v_{A2}}{\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{a} b} = \underline{\underline{2\ \frac{m}{s}}}}$$

$$\Rightarrow \underline{v}_B = \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

Sebességábra:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_B &= \underline{v}_{B2} = \underline{\beta}_{B2} = \underline{\beta}_B \\ \underline{v}_{B2} &= \underline{v}_{A2} + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{AB} \end{aligned}\right\} \quad \underset{\parallel \underline{r}_{AB}}{\underline{\beta}_B} = \underline{v}_A + \underset{\perp \underline{r}_{AB}}{\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{AB}}$$



II Gyorsulásállapot:

$$\underline{a}_{B2} = \underline{\alpha}_{B2} + \underline{a}_{B2\,száll} + \underline{a}_{B2\,cor}$$

A (2) test A és B pontjára $\quad \underline{a}_{B2} = \underbrace{\underline{a}_{A2}}_{=\underline{0}\ (v_{A2}=\text{áll.})} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{AB} - \omega_2^2 \underline{r}_{AB}$

$$\Rightarrow \underline{\alpha}_{B2} + \underbrace{\underline{a}_{B2\,száll}}_{=\underline{0}} + \underline{a}_{B2\,cor} = \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{AB} - \omega_2^2 \underline{r}_{AB}$$

$$\underline{\alpha}_{B2} = \begin{bmatrix} \alpha_B\cos\varphi \\ -\alpha_B\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{a}_{B2\,cor} = 2(\underline{\omega}_1 \times \underline{\beta}_{B2}) = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_B\cos\varphi \\ -\beta_B\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_1\beta_B\sin\varphi \\ 2\omega_1\beta_B\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\omega}_1 = \underline{\omega}_2$ (együtt fordul a rúddal)

Vagyis:

$$\begin{bmatrix} \alpha_B \cos\beta \\ -\alpha_B \sin\beta \\ 0 \end{bmatrix} + 2\omega_1 \begin{bmatrix} \beta_B \sin\beta \\ \beta_B \cos\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 b \\ -\varepsilon_2 a \\ 0 \end{bmatrix}} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Behelyettesítve a numerikus adatokat:

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad 0{,}8\alpha_B + 3\varepsilon_2 = -0{,}36 \\ y:&\quad -0{,}6\alpha_B + 4\varepsilon_2 = -1{,}23 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_B &= 0{,}45 \ \tfrac{m}{s^2} \\ \varepsilon_2 &= -0{,}24 \ \tfrac{rad}{s^2} \end{aligned} \qquad \underline{\alpha}_B = \begin{bmatrix} 0{,}36 \\ -0{,}27 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \qquad \underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}24 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

$$\underline{a}_B = \underline{\alpha}_{B2} + \underline{a}_{B2cor} = \begin{bmatrix} 1{,}08 \\ 0{,}96 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

Gyorsulásábra:

$$\left.\begin{aligned} \underline{a}_{B2} &= \underline{\alpha}_{B2} + \underline{a}_{B2\,száll} + \underline{a}_{B2cor} \\ \underline{a}_{B2} &= \underbrace{\underline{a}_{A2}}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{AB} - \omega_2^2 \underline{r}_{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\underset{\parallel \underline{r}_{AB}}{\underline{\alpha}_{B2}}}_{a_{Bt}} + \underbrace{\underline{a}_{B2\,száll}}_{=\underline{0}} + \underbrace{\underset{\perp \underline{r}_{AB}}{\underline{a}_{B2cor}}}_{a_{Bn}} = \underset{\perp \underline{r}_{AB}}{\underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{AB}} - \underset{\parallel \underline{r}_{AB}}{\omega_2^2 \underline{r}_{AB}}$$