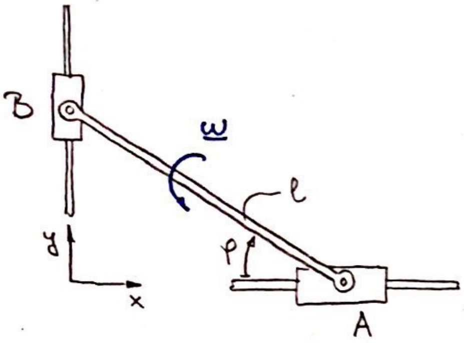
Mindkét végén egyenesbe vezetett rúd:



Adatok: $\varphi = 30°$

$\ell = 4\ m$

$\omega = 0{,}6\ \frac{rad}{s}$

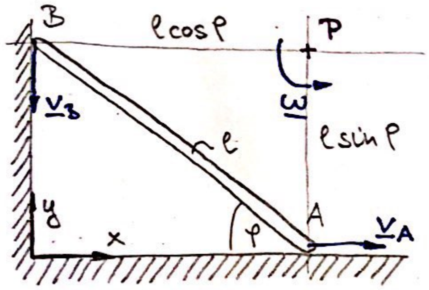
$\varepsilon = 0$

Feladatok:

1. Sebességpólus helye?
2. Gyorsuláspólus helye?
3. Az egyes pontok sebessége? ($\underline{v}_A, \underline{v}_B, \underline{v}_S, \underline{v}_G$)
4. Az egyes pontok gyorsulása? ($\underline{a}_A, \underline{a}_B, \underline{a}_S, \underline{a}_P$)
5. Az egyes pontok pályáinak görbületi sugara $\rho_A, \rho_B, \rho_S = ?$

① P pont helye?

Geometriailag: $\left.\begin{array}{l}\underline{r}_{AP} \perp \underline{v}_A \\ \underline{r}_{BP} \perp \underline{v}_B\end{array}\right\}$ metszéspont a P pont



$$\underline{r}_P = \begin{bmatrix} \ell\cos\varphi \\ \ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}464 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} m.$$

② G pont helye?

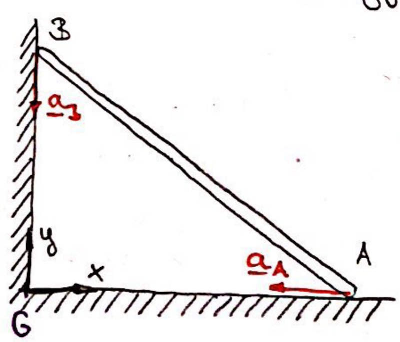
A rúd A és B pontjai egyenesbe vezető pontok

$\underline{a}_A \parallel \underline{i}$ és $\underline{a}_B \parallel \underline{j}$

valamint $\alpha = \arctan\frac{\varepsilon}{\omega^2}$, mivel $\varepsilon = 0$ ezért $\boxed{\alpha = 0}$

Általában a gyorsulásvektoroktól α szöget kell felmérni $\underline{\varepsilon}$ irányában és az egyenesek metszéspontja adja a gyorsuláspólust.

Jelen esetben $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$, így



3. Sebességek számítása: $\underline{v}_A,\ \underline{v}_B = ?$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega}\times\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A - \omega l\sin\varphi \\ -\omega l\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -v_B \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} v_A &= \omega l\sin\varphi = 1{,}2\ \tfrac{m}{s} \\ v_B &= \omega l\cos\varphi = 2{,}08\ \tfrac{m}{s} \end{aligned}$$

Szemlélet alapján:

P pont körüli körmozgás (sebességállapot szempontjából)

$v_B = \omega l\cos\varphi$ (sugár: $l\cos\varphi$)

$v_A = \omega l\sin\varphi$ (sugár: $l\sin\varphi$)

Így: $\underline{v}_A = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s}$; $\underline{v}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2{,}08 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s}$

Ezekkel számítsuk ki a P pont koordinátáit:

$$\underline{v}_A = \underbrace{\underline{v}_P}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}\times\underline{r}_{PA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} r_{PAx} \\ r_{PAy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega r_{PAy} \\ \omega r_{PAx} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} r_{PAy} &= -\frac{v_A}{\omega} = 2\ m \\ r_{PAx} &= 0\ m \end{aligned}$$

(le is olvasható)

$$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_P}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}\times\underline{r}_{PB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} r_{PBx} \\ r_{PBy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega r_{PBy} \\ \omega r_{PBx} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} r_{PBy} &= 0\ m \\ r_{PBx} &= -\frac{v_B}{\omega} = -3{,}464\ m \end{aligned}$$

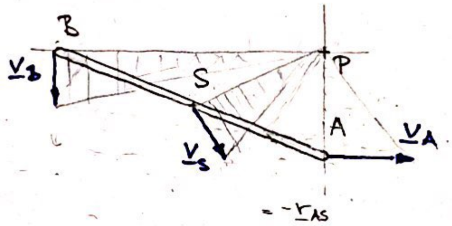
(le is olvasható)

v_S számítása:

$$\underline{v}_S = \frac{\underline{v}_A + \underline{v}_B}{2} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -2{,}08 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}04 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s}$$

lineáris eloszlás a sebességeknél a póluspont felől (persze redukciós képlet segítségével is számolható)

(Gyakran hasznos)



$$\underline{v}_S = \underbrace{\underline{v}_P}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}\times\underline{r}_{PS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x_{PS} \\ y_{PS} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega y_{PS} \\ \omega x_{PS} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{PS} &= -\frac{l}{2}\sin\varphi \\ x_{PS} &= -\frac{l}{2}\cos\varphi \end{aligned}\right\}\ \underline{v}_S = \begin{bmatrix} \omega\frac{l}{2}\sin\varphi \\ -\omega\frac{l}{2}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}04 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s}.$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}_S &= \underline{v}_B + \underline{\omega}\times\overbrace{\underline{r}_{BS}}^{=-\underline{r}_{AS}} \\ \underline{v}_S &= \underline{v}_A + \underline{\omega}\times\underline{r}_{AS} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{v}_S = \frac{\underline{v}_A + \underline{v}_B}{2}$$

v_G számítása:

$$\underline{v}_G = \underline{v}_B + \underline{\omega}\times\underline{r}_{BG} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 \\ -l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega l\sin\varphi \\ v_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -2{,}08 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s}$$

4. Gyorsulások számítása: $\underline{a}_A,\ \underline{a}_B = ?$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{=\underline{0}}\times\underline{r}_{AB} - \omega^2\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} a_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2\begin{bmatrix} -l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 l\cos\varphi + a_A \\ -\omega^2 l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_A &= -\omega^2 l\cos\varphi = -1{,}247\ \tfrac{m}{s^2} \\ a_B &= -\omega^2 l\sin\varphi = -0{,}72\ \tfrac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Ezzel: $\underline{a}_A = \begin{bmatrix} -1{,}247 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$; $\underline{a}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$

(Gyorsuláspólus helye analitikusan: $\underline{r}_{BG} = \dfrac{\underline{\varepsilon}\times\underline{a}_B + \omega^2\underline{a}_B}{\varepsilon^2 + \omega^4} = \dfrac{\underline{a}_B}{\omega^2}$)

$\underline{a}_S, \underline{a}_P = ?$

$$\underline{a}_S = \underline{a}_B + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{=\underline{0}} \times \underline{r}_{BS} - \omega^2 \underline{r}_{BS} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_B \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2}\cos\varphi \\ -\ell/2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \frac{\ell}{2}\cos\varphi \\ a_B - \ell/2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}624 \\ -0{,}36 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_B + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{=\underline{0}} \times \underline{r}_{BP} - \omega^2 \underline{r}_{BP} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_B \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \ell\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \ell\cos\varphi \\ a_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}247 \\ -0{,}72 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

5)

Pályagörbék sugarai:

Az A és B pontok egyenesbe vezetése miatt

$\underline{a}_A = \underline{a}_{At} \qquad \underline{a}_{An} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \varrho_A = \infty$

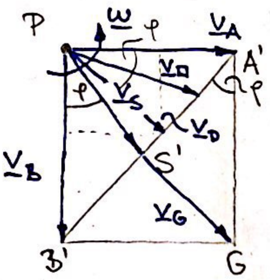
$\underline{a}_B = \underline{a}_{Bt} \qquad \underline{a}_{Bn} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \varrho_B = \infty$

$\varrho_S = ?$

$\underline{a}_S \perp \underline{v}_S \qquad \underline{a}_S = \underline{a}_{Sn} = \frac{v_S^2}{\varrho_S}\underline{e}_n \quad \Rightarrow \varrho_S = \frac{v_S^2}{a_{Sn}} = \frac{1{,}2^2}{0{,}72} = 2\ m \qquad$ ahol $a_{Sn} = \sqrt{(-0{,}624)^2 + (-0{,}36)^2} = 0{,}72 \frac{m}{s^2}$

Plusz feladat:

Sebességábra:



$\underline{v}_D$ a lekisebb sebességű pont sebessége

$$\underline{v}_D = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ -0{,}52 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\underline{r}_{BA} = \begin{bmatrix} +\ell\cos\varphi \\ -\ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_{BA} = \frac{1}{\ell}\begin{bmatrix} +\ell\cos\varphi \\ -\ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$v_D = v_A \cos\varphi = 1{,}04 \frac{m}{s}$

$$\underline{v}_D = v_D \underline{e}_{BA} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ -0{,}52 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

D pont gyorsulása:

$$\underline{a}_D = \underbrace{\underline{a}_G}_{=\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{=\underline{0}} \times \underline{r}_{GD} - \omega^2 \underline{r}_{GD} = -\omega^2 \underline{r}_{GD}$$

$$\underline{v}_D = \underline{v}_G + \underline{\omega} \times \underline{r}_{GD} = \begin{bmatrix} v_{Gx} \\ v_{Gy} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{GD} \\ y_{GD} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Gx} - \omega y_{GD} \\ v_{Gy} + \omega x_{GD} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_D = \begin{bmatrix} -0{,}935 \\ -0{,}18 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$\Rightarrow x_{GD} = 3\sqrt{3}/2$

$y_{GD} = 1/2$

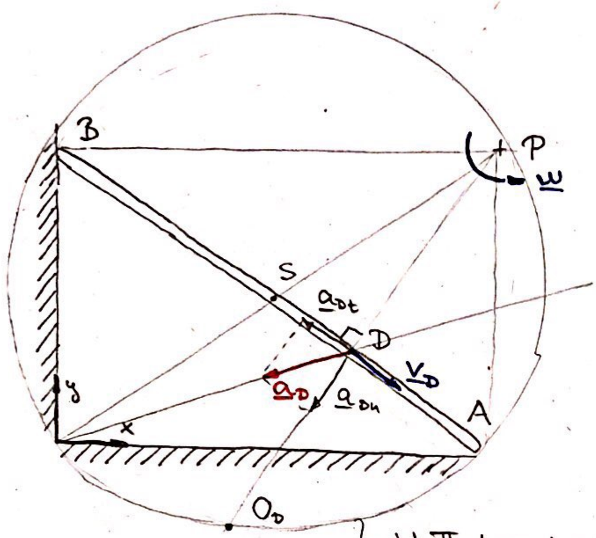
$\rho_D = ?$

$$\underline{e}_t = \frac{\underline{v}_D}{|\underline{v}_D|} = \begin{bmatrix} 0{,}866 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}866 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}_{Dn}| = \underline{a}_D \underline{e}_n = 0{,}624 \frac{m}{s^2}$$

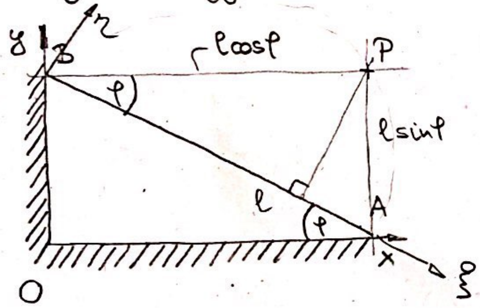
$$\rho_D = \frac{v_D^2}{a_{Dn}} = 1{,}732\ m$$

Általánosan:



rúd Thalesz köre (O_D rajta van)

Pólusgörbék egyenlete:



Az álló koordináta rendszerben:

$$\left.\begin{aligned} x_P &= l\cos\varphi \\ y_P &= l\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad x_P^2 + y_P^2 = l^2 \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Origó középpontú l sugarú negyedkör.

Mozgó: $\{B, \xi, \eta, \zeta\}$ rúdhoz kötött koordináta rendszerben

$$\xi_P = l\cos\varphi\cos\varphi = l\cos^2\varphi = l\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

$$\eta_P = l\cos\varphi\sin\varphi = l\,\frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_P - \frac{l}{2} &= \frac{l}{2}\cos 2\varphi \\ \eta_P &= \frac{l}{2}\sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left(\xi_P - \frac{l}{2}\right)^2 + \eta_P^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

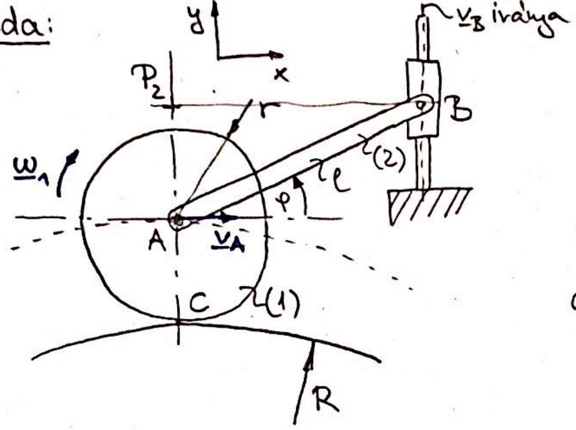
S középpontú $\frac{l}{2}$ sugarú félkör

Pólusvándorlási sebesség:

$$\underline{u} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{a}_P}{\omega^2}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{\omega^2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega^2}\begin{bmatrix} -\omega a_{Py} \\ \omega a_{Px} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ -2{,}078 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

Példa:



$R = 2{,}1\ m$

$r = 0{,}3\ m$

$\ell = 1{,}2\ m$

$\varphi = 30°$

$\omega_1 = 4\ \frac{rad}{s} \equiv áll.$

Feladatok:

1. Sebességpólus helye szerkesztéssel! ((2) test)
2. (2) rúd sebességállapota!
3. (2) rúd szöggyorsulása és B pontjának gyorsulása!
4. (2) test gyorsuláspólus helye!

1) Berajzolva

2) $$\underline{v}_A = \underbrace{\underline{v}_C}_{=0} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{CA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell\cos\varphi \\ \ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A - \omega_2 \ell \sin\varphi \\ \omega_2 \ell \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_A = \omega_2 \ell \sin\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{v_A}{\ell \sin\varphi}} = \underline{\underline{2}}\ \frac{rad}{s}$$

$$\boxed{v_B = \omega_2 \ell \cos\varphi}$$

Sebességállapot: $\underline{v}_A = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$; $\underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$

3) „A" pont sebességének nagysága állandó mivel $\omega_1 = áll.$ és körpályán mozog

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_A^2}{(R+r)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{AB} - \omega_2^2 \underline{r}_{AB} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ a_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{r^2\omega_1^2}{r+R} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ell\cos\varphi \\ \ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} \ell\cos\varphi \\ \ell\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x&: \quad 0 = -\varepsilon_2 \ell \sin\varphi - \omega_2^2 \ell \cos\varphi \\ y&: \quad \underline{a_B = -\frac{r^2\omega_1^2}{r+R} + \varepsilon_2 \ell \cos\varphi - \omega_2^2 \ell \sin\varphi} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \varepsilon_2 = -\frac{\omega_2^2 \ell \cos\varphi}{\ell \sin\varphi} = -6{,}93\ \frac{rad}{s^2} \\ &\Rightarrow a_B = -10{,}2\ \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Ezzel:

$$\underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6{,}93 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2} \qquad \underline{a}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -10{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

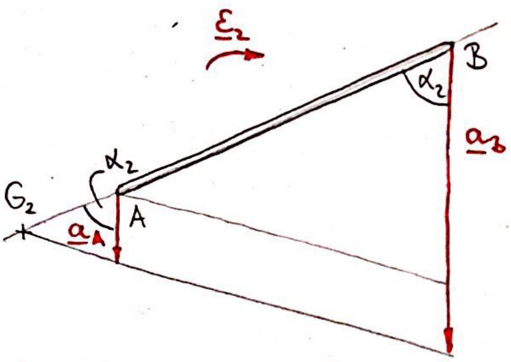
4) Gyorsuláspólus:

$$\tan \alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} \Rightarrow \alpha_2 = 60^\circ$$

Megjegyzés: $a_B = |\underline{r}_{GB}| \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

↓

lineáris kapcsolat



$$\frac{G_2A}{G_2B} = \frac{a_A}{a_B} \Rightarrow G_2A = 0{,}075 \text{ m}$$

vagy

$$\frac{G_2A}{AB} = \frac{a_A}{a_B - a_A}$$

$$\underline{r}_{AG} = \begin{bmatrix} -G_2A\cos\varphi \\ -G_2A\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0650 \\ -0{,}0375 \\ 0 \end{bmatrix} m$$