Elméleti összefoglaló:

A merev test síkmozgásának kinematikája:

Az eddig bevezetett összefüggések merev testek tetszőleges térbeli mozgására vonatkoznak. Fontos speciális eset az, amikor a merev test síkmozgást végez, ekkor ugyanis egyszerűbb alakra hozható mind a sebességredukciós mind a gyorsulásredukciós képlet.

A test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak és minden pont sebesség és gyorsulásvektora is párhuzamos ezekkel a síkokkal. Ekkor a szögsebességvektornak merőlegesnek kell lennie a mozgás síkjára.

Míg az általános esetben a sebesség- és gyorsulásállapot együttes megadásához 12 skalár komponenst kell megadni, síkmozgás esetén mindössze hat nem zérus komponens marad.

$$\underline{v}_A = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix};\ \underline{a}_A = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix};\ \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix};\ \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: ε előjelét a tangenciális gyorsulás előjelének megfelelően kell értelmezni: akkor pozitív, ha a szögsebesség abszolút értéke nő. Ha $\underline{\varepsilon} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\omega} =$ áll.

Def: Álló tengely körüli forgás esetén az α gyorsulásszög a gyorsulásvektortól a normális gyorsulásvektor irányáig felmért előjeles szög:

$$\tan\alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}$$

Síkmozgást végző merev test sebességállapota:

A síkmozgást végző testek csak haladó vagy forgó mozgást végezhetnek, csavarmozgást nem.

Általános síkbeli forgó mozgást végző merev test esetén akkor egyszerűsödnek le a sebességállapotra vonatkozó egyenletek, ha a pillanatnyi forgástengely xy síkba eső P pontját választjuk referenciapontnak. A nulla sebességű pontot sebességpólusnak nevezzük.

Def: Síkmozgást végző merev test nulla sebességű P pontját póluspontnak vagy sebességpólusnak nevezzük.

A P sebességpólusnak ismeretében egy tetszőleges B pont sebessége felírható:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PB} = \underline{\omega} \times \underline{r}_{PB}$$

kihasználva a síkmozgás sajátosságait

$$v_B = \omega|\underline{r}_{PB}| \quad \text{és} \quad \underline{v}_B \perp \underline{r}_{PB}.$$

A sebesség nagysága arányos a sebességpólustól mert távolsággal, iránya pedig merőleges a sebességpólusból húzott helyvektorra. A síkmozgást végző test a sebességállapota szempontjából úgy viselkedik, mintha a P sebességpólus körül forogna.

A sebességpólus meghatározása:

- sebességredukciós képletből
- szerkesztéssel
- $\underline{r}_{AP} = \dfrac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}$ (A pontból, centrális egyenes...)

Scanned with CamScanner

következik, hogy $\underline{v}_A \perp \underline{r}_{AP}$. Ez lehetőséget ad a sebességpólus helyének gyors geometriai meghatározására: két pont sebességvektorára merőlegeseket állítva a kapott egyenesek kimetszik a sebességpólus helyét.

Az ismertetett eljárás síkbeli haladó mozgásra is általánosítható. Egy haladó mozgást végző test sebességpólusa a sebességvektorra merőleges irányban egy végtelen távoli pontban képzelhető el.

<u>Síkmozgást végző merev test gyorsulásállapota:</u>

<u>Tétel</u>: Síkmozgás esetén a gyorsulásredukciós képlet egyszerűsödik

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} - \omega^2 \underline{r}_{AB}$$

Az általános síkmozgást végző merev test visszavezethető álló tengely körüli forgásra, ha a testnek van egy kiválasztott nulla gyorsulású pontja. Ez a pont általában nem esik egybe a sebességpólussal, mivel a P sebességpólus helye független a gyorsulásállapottól, annak gyorsulása általában nem nulla.

<u>Def</u>: Síkmozgást végző merev test nulla gyorsulású pontját gyorsuláspólusnak nevezzük és G-vel jelöljük.

<u>Tétel</u>: A gyorsuláspólus helye

$$\underline{r}_{AG} = \frac{\omega^2 \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$ képlettel adható meg.

Ha egyszerre $\varepsilon = 0$, $\omega = 0$ és $\underline{a}_A = 0$, akkor nem értelmezhető a képlet, mert a test minden pontja nulla gyorsulású. Ha $\varepsilon = 0$, $\omega = 0$ és $\underline{a}_A \neq \underline{0}$, akkor haladó mozgást végez a test, ezért gyorsuláspólusa a végtelenbe kerül.

A gyorsulás nagysága:

$$a_A = |\underline{r}_{GA}| \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

azaz arányos a gyorsuláspólustól mért távolsággal, ugyanúgy, mint álló tengely körüli forgásnál. Tehát a síkmozgást végző merev testnek az a pontja mozog legnagyobb gyorsulással, amelyik legmesszebb van a gyorsuláspólustól.

<u>Def.</u>: Általános síkmozgás esetén a gyorsulásredukciós képletben szereplő $(-\omega^2 \underline{r}_{GA})$ vektor az A ponttól a G gyorsuláspólus felé mutat és definíció szerint α gyorsulási szöget zár az A pont gyorsulásvektorával. A gyorsulásszög független az A pont választásától. Előjelét a szöggyorsulás iránya határozza meg:

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2}$$

<u>Megjegyzés</u>: ε irányában α szöggel elforgatott egyeneseket mérünk fel, ezek kimetszik a gyorsuláspólust.

<u>Sebességpólus, gyorsuláspólus és a pálya görbületi középpontja:</u>

Úgy tekinthetjük mintha a sebességek szempontjából a P sebességpólus körül, a gyorsulások szempontjából pedig a G gyorsuláspólus körül forogna a test. Ugyanakkor a merev test pontjainak pályái különbözőek és a pályák egyes pontjaihoz is más és más görbületi középpont tartozik, a merev testnek egy adott időpillanatban csak egyetlen P sebességpólusa és egyetlen G gyorsuláspólusa van.

Scanned with CamScanner

A görbületi középpont helye csak a kiválasztott pont pályájától függ. Ezzel szemben a sebességpólus helyét csak a sebességállapot, a gyorsuláspólus helyét pedig csak a gyorsulásállapot határozza meg. Ezért ezek a pontok általában nem esnek egybe, csak álló tengely körüli forgás esetén.

A gördülés kinematikája:

Síkmozgás során általában változik a sebességpólus helye a mozgás során. Például ha egy kerék átmegy egy víztócsán, a testen és a talajon a nedves pontok jelölik ki azokat a görbéket, melyek pontjai valamikor póluspontok voltak.

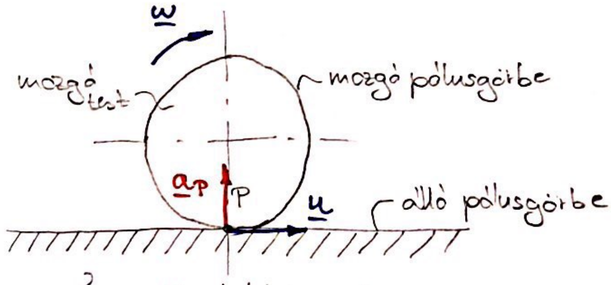
A merev test pontjainak sem a sebessége, sem a szögsebessége nem változhat ugrásszerűen, ezért a pillanatnyi forgástengely és a sebességpólus helye folytonosan változik. Mivel a gördülő test és a talaj pontjai az érintkezés után eltávolodnak egymástól, két görbét is definiálhatunk, melynek pontjai póluspontok voltak, illetve lesznek: egy gördülő kerék esetében a kerék által a talajon hagyott nyom jelöli ki az álló pólusgörbét, a kerék azon pontjai pedig, melyek póluspontok voltak, a mozgó pólusgörbén helyezkednek el.

Def.: Az álló pólusgörbe a P sebességpólus, mint geometriai pont pályája a vonatkoztatási rendszerben.

Def.: A mozgó pólusgörbe a P sebességpólus mint geometriai pont pályája a merev testhez képest.

Gördülés során a nulla sebességű sebességpólus változtatja helyét a síkon, ezt a folyamatot pólusvándorlásnak nevezzük.

Def.: A pólusvándorlás sebessége a P sebességpólus, mint geometriai pont sebessége, ahogy halad az álló pólusgörbén, jele: $\underline{u}$.



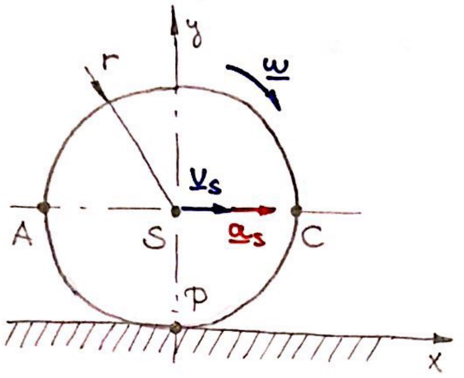
Az $\underline{u}$ pólusvándorlási sebességnek gyakran ismert az iránya, hiszen ha egy test egy másikon gördül, akkor a közös érintővel párhuzamosnak kell lennie.

Megjegyzés: Minden, nem nulla szögsebességű síkmozgást végző merev test mozgása értelmezhető a mozgó pólusgörbének az álló pólusgörbén történő gördüléseként, ahol az aktuális érintkezési pont a P póluspont.

Tétel: A pólusvándorlás $\underline{u}$ sebessége $\underline{u} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{a}_P}{\omega^2}$, ahol $\underline{a}_P$ a sebességpólus gyorsulása. Valamint $\underline{u} \perp \underline{\omega}$ és $\underline{u} \perp \underline{a}_P$.

Scanned with CamScanner

1. Példa: Egyenes kényszerpályán gördülő korong



Adatok: $v_S = 1\,\frac{m}{s}$

$a_S = 2\,\frac{m}{s^2}$

$r = 0{,}5\,m$

Feladat: Síkban gyorsulva gördülő korongról melyik pontban válnak le legkönnyebben a sárcseppek

azaz $a_{max} = a_Q$, $\underline{r}_{SQ} = ?$

Részfeladatok:

$\underline{\omega} = ?$, sebességpólus helye $\underline{r}_{SP} = ?$

$\underline{\varepsilon} = ?$, gyorsuláspólus helye $\underline{r}_{SG} = ?$

sebességpólus gyorsulása, $\underline{a}_P = ?$

gyorsuláspólus sebessége, $\underline{v}_G = ?$

1) $\underline{\omega} = ?$

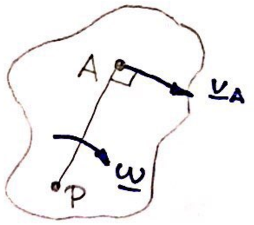
A gördülés miatt P pont a sebességpólus, $\underline{r}_{SP} = -r\underline{j}$ és $\underline{v}_P = \underline{0}$

Ezzel

$$\underline{v}_S = \underbrace{\underline{v}_P}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_S = -r\omega_z$$

$$\omega_z = -\frac{v_S}{r} = -\frac{1}{0{,}5} = -2\,\frac{rad}{s}$$

szemlélet alapján



$v_A = \omega |\underline{r}_{PA}|$ azaz $v_S = \omega r$

$$\omega = \frac{v_S}{r}\ (\curvearrowright) \Rightarrow \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

2) $\underline{\varepsilon} = ?$

$$\underline{a}_S = \underline{a}_{St} = a_{St}\underline{i} = \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{St} = \dot{v}_S = \dot{(r\omega)} = r\dot{\omega} = r\varepsilon$$

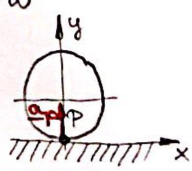
$$\varepsilon = \frac{a_S}{r} = \frac{2}{0{,}5} = 4\,\frac{rad}{s^2} \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

$\underline{a}_P = ?$

$$\underline{a}_S = \underline{a}_P + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{PS} - \omega^2 \underline{r}_{PS} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Px} \\ a_{Py} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} a_{Px} + r\varepsilon \\ a_{Py} - r\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{Px} &= 0 \\ a_{Py} &= r\omega^2 \end{aligned}$$

$$\underline{a}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Scanned with CamScanner

$\underline{r}_{SG} = ?$ $\quad \underbrace{}_{=0}$

a) $\underline{a}_S = \underline{a}_G + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GS} - \omega^2 \underline{r}_{GS}$

$$\begin{bmatrix} a_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{GS} \\ y_{GS} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} x_{GS} \\ y_{GS} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon y_{GS} - \omega^2 x_{GS} \\ -\varepsilon x_{GS} - \omega^2 y_{GS} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = 4 y_{GS} - 4 x_{GS} \\ 0 = -4 x_{GS} - 4 y_{GS} \\ \hline y_{GS} = -x_{GS} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

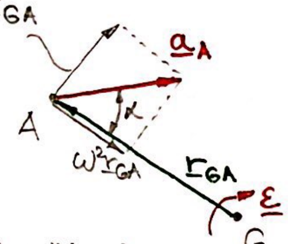
$$\underline{r}_{GS} = [-0{,}25 \;\; +0{,}25 \;\; 0]^T \,[m]$$

b) $$\underline{r}_{SG} = \frac{\omega^2 \underline{a}_S + \underline{\varepsilon} \times \underline{a}_S}{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{1}{4^2 + 2^2} \left(2^2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}} \right) = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ -0{,}25 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{r}_{SG} = [0{,}25 \;\; -0{,}25 \;\; 0]^T \,[m]$$

c) $\underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA}$



(mintapélda...)

$\underline{a}_A = \underline{a}_G + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA} - \omega^2 \underline{r}_{GA}$

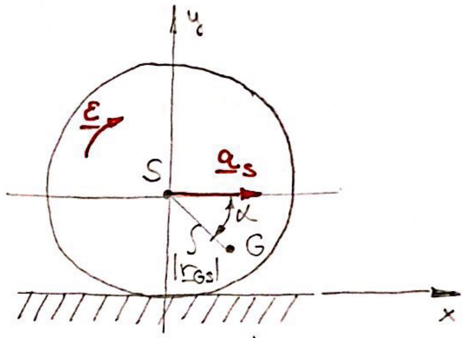
Az ábráról:

$$\left.\begin{array}{l} a_A \cos\alpha = \omega^2 |\underline{r}_{GA}| \\ a_A \sin\alpha = \varepsilon |\underline{r}_{GA}| \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Ezzel

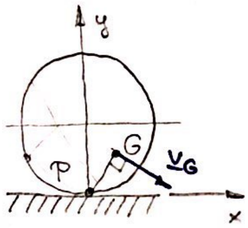
$$\tan\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{4}{2^2} = 1 \quad \Rightarrow \alpha = 45°$$

$$|\underline{r}_{GS}| = \frac{a_s}{\omega^2} \cos\alpha = \frac{2}{2^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \text{ m}$$



3) $\underline{v}_G = ?$

$$\underline{v}_G = \underbrace{\underline{v}_P}_{=0} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r/2 \\ -r/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega/2 \\ -r\omega/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

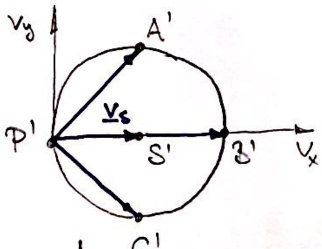


$$v_G = \frac{\sqrt{2}}{2} r\omega$$

Sebességábra:

elforgatás szöge: $\frac{\pi}{2} = 90°$; $\underline{\omega}$ irányába

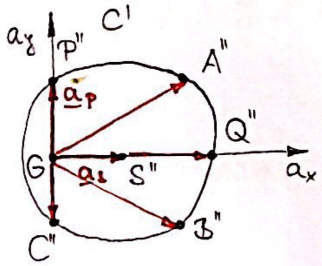
arányossági tényező: ω



Gyorsulásábra:

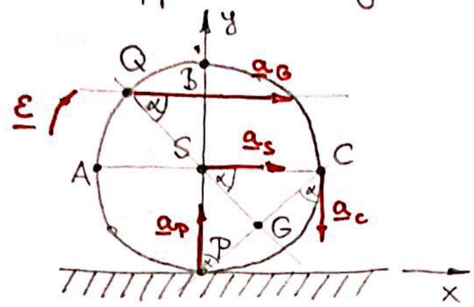
elforgatás szöge: $\pi - \alpha = 135°$; $\underline{\varepsilon}$ irányába

arányossági tényező: $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \approx 5{,}65$



Scanned with CamScanner

„Sárcsapó" leválás helye

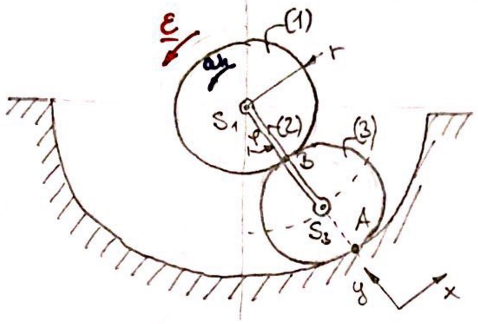


$$\underline{a}_Q = \underline{a}_S + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{SQ} - \omega^2 \underline{r}_{SQ}$$

$$= \begin{bmatrix} r\varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r/\sqrt{2} \\ r/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} -r/\sqrt{2} \\ r/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{itt } \varepsilon = \omega^2$$

$$\Rightarrow \underline{a}_Q = \begin{bmatrix} a_Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol } a_Q = \underline{\underline{4{,}83}} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

2. Példa: Hajtómű sebesség és gyorsulásállapot



Adatok: $r = 0{,}1\,m$

$\omega_1 = 10 \frac{rad}{s}$

$\varepsilon_1 = 5 \frac{rad}{s^2}$

Feladat:

I. Sebességállapot

- Számítsa ki a (3) kerék szögsebességét és súlypontjának sebességét ($\omega_3 = ?$, $\underline{v}_{S3} = ?$)
- Mekkora szögsebességgel kering a (3)-as test súlypontja ($\omega_2 = ?$)
- Rajzolja meg a sebességeloszlást az $\overline{AB}$ szakaszon!

II. Gyorsulásállapot

- Számítsa ki a (3) kerék súlypontjának gyorsulását ($\underline{a}_{S3} = ?$)
- Határozza meg az A és B pontok gyorsulásait: ($\underline{a}_A$, $\underline{a}_{B1}$, $\underline{a}_{B3} = ?$)
- Határozza meg a (3) kerék gyorsulási pólusának helyét!
- Rajzolja meg a gyorsulásábrát!

I, Sebességállapot

1, az (1)-es testre, mint merev testre felírható:

$$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_{S1}}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{S1B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

a (3)-as testre, mint merev testre felírható:

$$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r\omega_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2r\omega_3 = r\omega_1 \Rightarrow \omega_3 = -\frac{1}{2}\omega_1 = \underline{\underline{-5}} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Kihasználva, hogy $\underline{v}_A = \underline{0}$, $\underline{\omega}_3$ ismeretében a (3) kerék súlypontjának sebessége:

$$\underline{v}_{S3} = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AS3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}5\omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5r\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Scanned with CamScanner