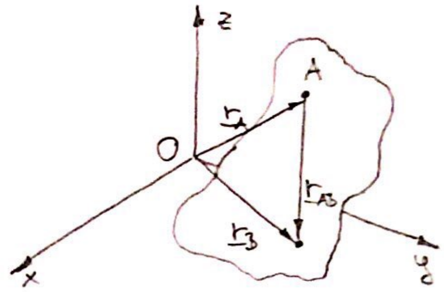
Elméleti összefoglaló:

Merev testek kinematikája:

Nem hagyhatjuk figyelmen kívül a mozgó testek alakját és méreteit. A valóságban a szilárd testek deformálhatóak, méreteik változhatnak, de ez a deformáció számos gyakorlati probléma esetén oly csekély, hogy a test egészének a mozgását vizsgálva eltekinthetünk tőle, azaz merevnek tekinthetjük.

Az $|\underline{r}_{AB}| = \text{áll.}$ kifejezés kényszerfeltétel, hiszen korlátozást jelent a test pontjainak mozgására nézve.



Def.: Merev test: olyan anyagi test melynek bármely két A, illetve B pontja közti távolság időben állandó $|\underline{r}_{AB}| = \text{áll.}$

Megjegyzés: • A szabad mozgást végző merev testnek 6 szabadsági foka van

• A merev test helyzetének megadásakor gyakran szögelfordulásokat kell megadnunk különböző tengelyek körül. Egy szögelfordulás azonban nem vektor, hanem mátrix segítségével írható le. Egymás utáni elfordulások eredménye a megfelelő mátrixok szorzatával számítható ki, viszont a sorrendiség nem felcserélhető!

A merev test sebességállapota:

A merev test pontjai végtelen sokféle különböző sebességgel mozoghatnak egy adott pillanatban. Gondoljunk például egy álló tengely körül forgó korongra. Minden pontja körpályán mozog, ezért a különböző irányú sugarak mentén különböző a sebességvektorok iránya. A tengelytől távolodva pedig nő a pontok sebességének nagysága. Ez azt jelenti, hogy nem beszélhetünk egy merev test sebességéről, csak a test valamely adott pontjának sebességéről.

Ha ismertek egy szabályhoz szükséges adatok, akkor számolhatjuk a merev test sebességállapotát.

Tétel: A merev test A és B pontjainak sebességvektorai között a következő összefüggés áll fenn:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB},$$

ahol a merev test forgását jellemző szögsebesség $\underline{\omega}$. (redukciós képlet)

Megjegyzés: • A sebességredukciós (lásd. jegyzet) „képlet" levezetése során abból indultunk ki, hogy mind az A, mind a B pont a merev testhez tartozik. A továbbiakban a merev test pontja kifejezés a feladattól függően lehet a testen kívüli pont is, melynek mozgása elképzelhető úgy mintha a testtel együtt mozogna.

• A szögsebességvektor az anyagi pontok keringése vagy körmozgása kapcsán bevezetett szögsebesség fogalom általánosítása

A szögsebesség vektori jellege első pillantásra egyértelműnek tűnik, hiszen iránya és nagysága is van. E két tulajdonság mellett azonban az összeadásra vonatkozó paralelogramma-szabályt is ki kell elégíteniük a vektoroknak, amiből az következik, hogy az összeadandó vektorok sorrendje felcserélhető.

Megmutatható, hogy a szögsebesség tényleg vektor, így két különböző tengely körüli forgás eredő szögsebességét a szögsebességvektorok összegeként számíthatjuk.

Gyakran olyan esetekben van szükség a szögsebességek összeadására, amikor egy vizsgált (2) jelű test egy másik, $\underline{\omega}_1$ szögsebességgel forgó (1) testhez képest is forog $\underline{\omega}_{21}$ szögsebességgel.

<u>A vektorkettősök redukciója:</u>

A sebességredukciós képletnek megfelelően a sebességállapot két vektorral: a merev test valamely pontjának sebességével és az egész merev testet jellemző szögsebességgel jellemezhető (vektorkettős).

<u>Vektorok típusai:</u> - szabad vektorok: nem számít a térbeli elhelyezkedés, eltolhatóak önmagukkal párhuzamosan

- pontokhoz kötött vektorok: meg kell adni a vektor kezdőpontját
- hatásvonalukhoz kötött vektorok: hatásvonaluk mentén eltolhatóak

<u>Emlékeztető!</u>

Statikai vektorkettős: $[\underline{F}; \underline{M}_A]_A$

Megmutatható, hogy a referenciapont megfelelő megválasztásával található olyan vektorkettős, melyben a nyomaték nulla vagy párhuzamos az erővektorral, az így kapható vektorkettőst tekintjük a lehető legegyszerűbb alakjának. (Ezen pontok helye a centrális egyenes)

A sebesség- és szögsebességvektorok is egy vektorkettőst, a kinematikai vektorkettőst alkotnak. Megfeleltetés: $\underline{F} \Leftrightarrow \underline{\omega}$ és $\underline{M}_A \Leftrightarrow \underline{v}_A$

<u>Megjegyzés:</u> Elképzelhető úgy a merev test mozgása, mint egy haladó, $\underline{\Omega}$ szögsebességű mozgás és egy forgó mozgás eredője.

<u>Elemi mozgások:</u>

A merev testek sebességállapota végtelen sokféle, egymással egyenértékű kinematikai vektorkettőssel adható meg, a referenciapont megválasztásától függően. Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból előnyös, ha meg tudjuk keresni ezek közül azt, ami valamilyen szempontból a legegyszerűbb alakú. A kinematikában azokat a vektorkettősöket tekintik legegyszerűbb alakjuknak, amiben az egyik vektor nulla vagy a két vektor párhuzamos.

Elemi mozgások osztályozása:

1) $\underline{\omega} = \underline{0}$ és $\underline{v}_A = \underline{0}$, pillanatnyi nyugalom

2) $\underline{\omega} = \underline{0}$ és $\underline{v}_A \neq \underline{0}$, pillanatnyi haladó mozgás

3) $\underline{v}_A = \underline{0}$ és $\underline{\omega} \neq \underline{0}$, pillanatnyi forgó mozgás

4) $\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$, de $\underline{\omega} \neq 0$ és $\underline{v}_A \neq \underline{0}$ ez is pillanatnyi forgó mozgás, mivel mindig található egy olyan $\underline{0}$ sebességű P pont, ami A-tól $d = \frac{v_A}{\omega}$ távolságra van, ekkor $[\underline{\omega}, \underline{0}]_P$

Tétel: Ha egy merev test szögsebessége nem nulla, akkor mindig választható végtelen sok olyan pont a merev testen, melyek pillanatnyi sebessége nulla vagy párhuzamos az $\underline{\omega}$ szögsebességgel, ezek a pontok a centrális egyenesen helyezkednek el, ami $\parallel \underline{\omega}$-val:

$$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}$$

5) $\underline{\omega}\underline{v}_A \neq 0$, az egyik vektor sem lehet zérus és nem is $\perp$-ek egymásra, ekkor felbontva $\underline{v}_A$-t $\underline{\omega}$-val párhuzamos és merőleges komponensekre, a centrális egyenest pillanatnyi csavartengelynek nevezzük és pillanatnyi csavarmozgásról beszélünk. (Merev test legáltalánosabb mozgása)

Véges mozgások:

Geometriai szempontból két csoportra bonthatók:

- Ha a test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak, akkor síkmozgásról beszélünk
- Ettől eltérve térbeli mozgásról van szó

Def.: Síkmozgás közben a test pontjai egymással párhuzamos síkokban mozognak, minden pont sebesség- és gyorsulásvektora is párhuzamos ezekkel a síkokkal. A szögsebességvektor nulla vagy merőleges a mozgás síkjaira.

Síkmozgás során minden pillanatban elemi haladó vagy elemi forgó mozgásról beszélünk, elemi csavarmozgás nem lehetséges. Felbontható: elemi haladó és elemi forgó mozgásokra (a síkmozgás)

Def.: Síkbeli haladó mozgás vagy síkbeli transzláció során a merev test térbeli irányítása nem változik, a test pontjai egymással egybevágó síkgörbéket írnak le. A síkbeli haladó mozgás során a test egy véges időtartam minden pillanatában elemi haladó mozgást végez, szögsebessége nulla.

Nemcsak a síkbeli, hanem tetszőleges térbeli haladó mozgás során is igaz, hogy a test bármely két pontjának sebessége és gyorsulása megegyezik, de ezek iránya változhat a mozgás során. Ez tehát nem azt jelenti, hogy egyenes vonalon mozog a test, hanem azt, hogy sebességállapota és gyorsulásállapota egyetlen pontjának sebességével és gyorsulásával megadható, úgy, mint az anyagi pontoknál.

<u>Def.</u>: Síkbeli forgó mozgás vagy síkbeli rotáció során a merev test egy véges időtartam minden pillanatában elemi forgó mozgást végez.

<u>A merev test gyorsulásállapota:</u>

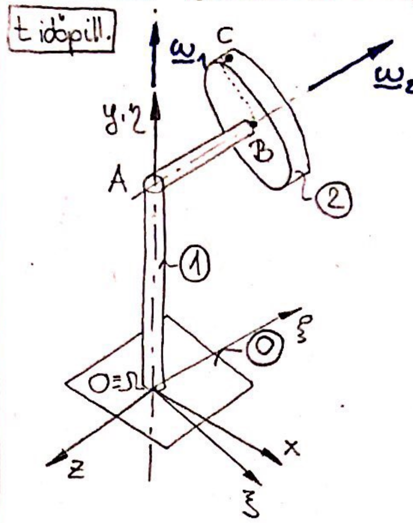
A merev test különböző pontjai végtelenül sokféle gyorsulással mozoghatnak egy adott pillanatban, ezért a gyorsulásállapot jellemzésére is szabályra van szükségünk.

<u>Tétel:</u> Egy merev test A és B pontjainak gyorsulásvektorai között a következő összefüggés teljesül:

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}),$$

ahol $\underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\omega}}$ a merev test szöggyorsulása, ami a szögsebességvektor idő szerinti deriváltja. Ezt gyorsulásredukciós képletnek nevezzük.

1. Példa: Robotkar mozgásának vizsgálata



Adatok:

$$\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s} \quad \text{és} \quad \underline{\omega}_1 = \text{áll.}$$

$$|\underline{\omega}_{21}| = 2 \ \frac{rad}{s} \quad \text{és} \quad |\underline{\omega}_{21}| = \text{áll.}$$

($\underline{\omega}_{21}$ a ② test ①-hez viszonyított szögsebessége)

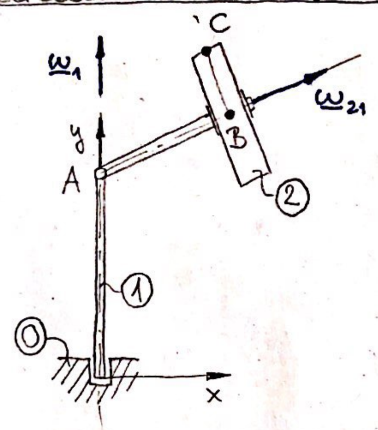
$$\underline{r}_{AB}(t_0=0) = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad \underline{r}_{BC}(t_0=0) = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,3 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

Feladatok: Meghatározandó: a $t_0 = 0$ időpillanatban a ②-es test

1) C pontjának sebessége ($\underline{v}_C = ?$)

2) C pontjának gyorsulása ($\underline{a}_C = ?$)

Szerkezet vázlata a $t_0=0$ időpontban (x-y sík):



A vonatkoztatási-rendszer: a ⓪-val jelölt test (ehhez képest írjuk le a mozgást)

A koordináta-rendszer: a ⓪-val jelölt testhez kötött (x, y, z, O)
az ①-el jelölt testhez kötött (ξ, η, ζ, Ω)

1) $\underline{v}_C = ?$

A ② test mint merev test esetében felírhatjuk, hogy

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC}$$

az ①-es test oldaláról kifejezhető

vagyis

$$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,8 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

(tengely egy pontjának sebessége (álló))

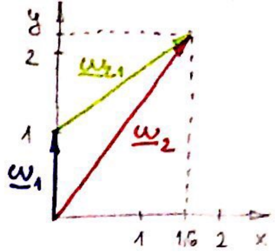
Az $\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_{20}$, vagyis a ② testnek a(z) ⓪-hoz viszonyított szögsebessége. Meghatározásához $\underline{\omega}_1 = \underline{\omega}_{10}$-ra (①-nek ⓪-hoz viszonyított szögsebessége) és $\underline{\omega}_{21}$-re (②-nek ①-hez viszonyított szögsebessége):

Mivel adott, hogy $|\underline{\omega}_{21}| = 2 \ \frac{rad}{s}$ és $\underline{\omega}_{21} \parallel \underline{r}_{AB}$-vel így $\underline{\omega}_{21} = |\underline{\omega}_{21}| \underline{e}_{AB}$, ahol $\underline{e}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{|\underline{r}_{AB}|}$.

Ezzel:
$$\underline{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{0,8^2+0,6^2}} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

A ② test szögsebessége:

$$\underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 1{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 2{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$



Megjegyzés:

Az ① test az y tengely körül $\underline{\omega}_1 = \text{áll.}$ szögsebességgel forog, így minden pontja (B is) egyenletes körmozgást végez:

- $\underline{v}_B$ tehát bármely t időpillanatban az $r_B = 0{,}8$ m sugarú körpályához érintőleges irányba mutat. A $t_0 = 0$ pillanatban $(-\underline{k})$ irányú, tehát a rajz (x, y) síkjára $\perp$, befelé mutató vektor
- Nagysága: $|\underline{v}_B| = \omega_1 \cdot r_B = 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}8 \ \frac{m}{s}$

Ezek után már meghatározhatjuk a C pont sebességét:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 2{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

2) Gyorsulásállapot meghatározása:

A ② test B és C pontjára fennáll:

$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BC} + \underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC})$$

Ehhez először meg kell határoznunk $\underline{a}_B$-t:

Mivel $\underline{\omega}_1 = \text{áll} \Rightarrow \underline{\varepsilon}_1 = \underline{0}$, valamint, hogy

$$\underline{a}_B = \underbrace{\underline{a}_A}_{\substack{=\underline{0} \\ \text{(álló tengely)}}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_1}_{=\underline{0}} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega}_1 \times \underbrace{(\underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AB})}_{= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

Megjegyzés: Az $r_B = 0{,}8$ m sugarú körpályán egyenletes körmozgást végző B pont $(\underline{a}_{Bt} = \underline{0})$ gyorsulását az

$$\underline{a}_B = \underline{a}_{Bn} = a_{Bn} \underline{e}_n$$

összefüggéssel határozzuk meg.

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{\varsigma_B} = \frac{v_B^2}{r_B} = \frac{0{,}8^2}{0{,}8} = 0{,}8 \ \frac{m}{s^2} = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \underline{e}_n(t_0 = 0) = (-\underline{i})$$

Ezzel $\underline{a}_B = \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$

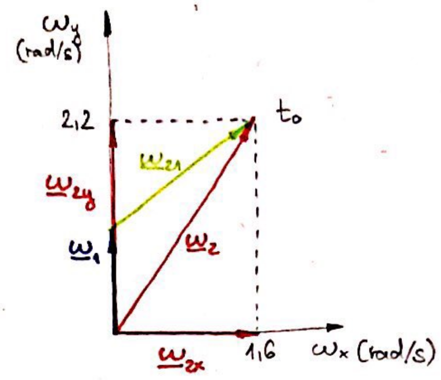
A C pont gyorsulása:

$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BC} + \underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC}).$$

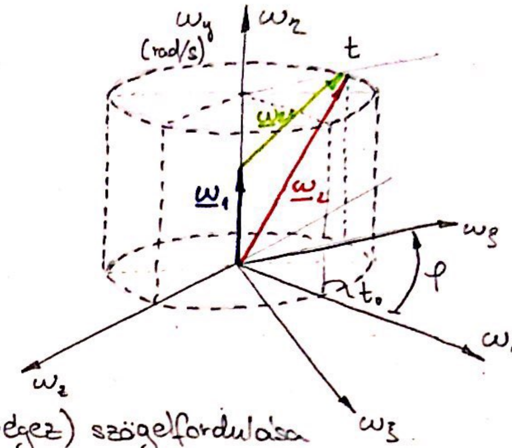
- $\underline{\varepsilon}_2$ szöggyorsulásvektor az $\underline{\omega}_2$ szögsebességvektor idő szerinti deriváltja

$$\dot{\underline{\omega}}_2 = \dot{\underline{\omega}}_1 + \dot{\underline{\omega}}_{21}$$

Mivel $\underline{\omega}_1 = \text{áll}$ és $|\underline{\omega}_{21}| = \text{áll.}$ így $\underline{\omega}_2$ nagysága nem, de iránya változik időben.

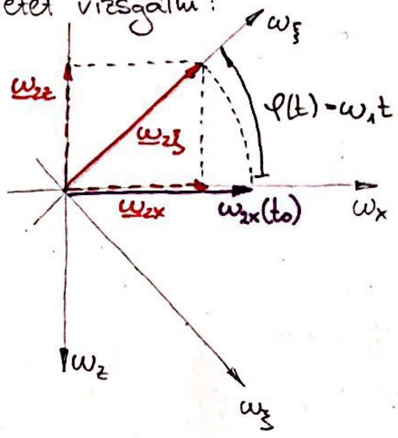


$\Rightarrow$



Az ① test $\varphi(t) = \omega_1 t$ (egyenletes forgó mozgást végez) szögelfordulása következtében változik meg $\underline{\omega}_{21}$ és $\underline{\omega}_2$ iránya is!

A forgástengely (y) irányába eső $\underline{\omega}_{2y}$ és $\underline{\omega}_{21y}$ nem változnak, így elég az x-z síkra eső vetületet vizsgálni:



$$\underline{\omega}_2 \doteq \underline{\omega}_{2\xi} + \underline{\omega}_{2\eta} = \begin{bmatrix} \omega_{2\xi} \\ \omega_{2\eta} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)}$$

$$|\underline{\omega}_{2\xi}| = |\underline{\omega}_{2x}(t_0)| = |\underline{\omega}_{21x}(t_0)| = 1{,}6\ \frac{rad}{s}$$

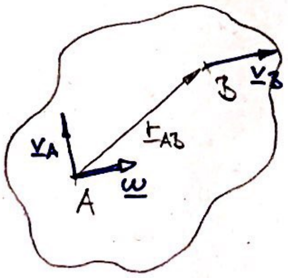
$$\underline{\omega}_2(t) = \begin{bmatrix} \omega_{2x}(t) \\ \omega_{2y} \\ \omega_{2z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{2\xi} \cos\varphi(t) \\ \omega_{2y} \\ -\omega_{2\xi} \sin\varphi(t) \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$\underline{\omega}_2(t) = \begin{bmatrix} \omega_{2x}(t_0) \cos(\omega_1 t) \\ \omega_1 + \omega_{21y} \\ -\omega_{2x}(t_0) \sin(\omega_1 t) \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$\underline{\varepsilon}_2(t) = \underline{\dot{\omega}}_2(t) = \begin{bmatrix} -\omega_{2x}(t_0)\sin(\omega_1 t)\omega_1 \\ 0 \\ -\omega_{2x}(t_0)\cos(\omega_1 t)\omega_1 \end{bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$\underline{\varepsilon}_2(t_0) = \begin{bmatrix} -\omega_{2x}(t_0)\sin(\omega_1 t_0)\omega_1 \\ 0 \\ -\omega_{2x}(t_0)\cos(\omega_1 t_0)\omega_1 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{2x}(t_0)\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

Megjegyzés:



$|\underline{r}_{AB}| =$ áll.

$\underline{r}_{AB}$ irányának a változását $\underline{\omega}$ okozza.

$\underline{\dot{r}}_{AB} = \underline{v}_{AB} = \underline{v}_B - \underline{v}_A = \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$ $\Rightarrow$ idő szerinti deriválás egy vektoriális szorzásra egyszerűsödik

Ezzel: $|\underline{\omega}_2| =$ áll.

$\underline{\omega}_2$ irányának változását az $\underline{\omega}_1$ szögsebesség okozza

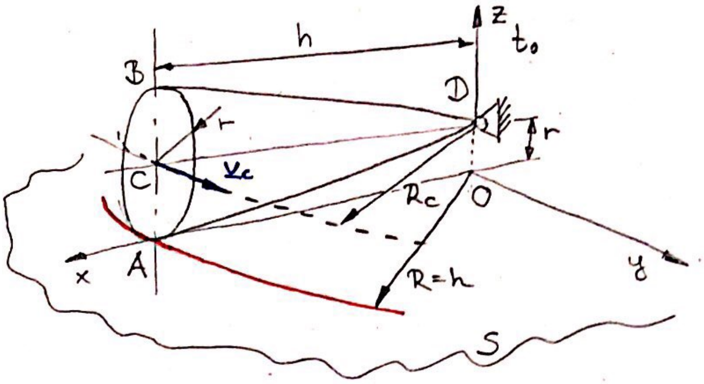
$$\underline{\dot{\omega}}_2 = \underline{\omega}_1 \times \underline{\omega}_2 \equiv \underline{\varepsilon}_2(t_0 = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_{2x}(t_0) \\ \omega_{2y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{2x}(t_0)\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

Ezeket behelyettesítve $\underline{a}_C$-be:

$$\boxed{\underline{a}_C = \underline{a}_B + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BC} + \underline{\omega}_2 \times (\underbrace{\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC}}_{=\begin{bmatrix}0\\0\\1,3\end{bmatrix}})} = \begin{bmatrix}-0,8\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-1,6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-0,3\\0,4\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1,6\\2,2\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\0\\1,3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,8\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,64\\0,48\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2,86\\-2,08\\0\end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix}2,7\\-1,6\\0\end{bmatrix} \frac{m}{s^2}}$$

2. Példa: Gördülő kúp



Az egyenes körkúp alakú merev test alapköre tisztán gördül az S jelű síkon, mely egybe esik a koordináta-rendszer x-y síkjával.

Adatok: $|\underline{v}_C| = v_C = 10\ \frac{m}{s}$ = áll

$r = 2\ m$

$h = 4\ m$

A vizsgált időpillanatban a kúp tengelye ∥ az x tengellyel.

Feladatok!

A $t_0 = 0$ időpillanatban a kúp

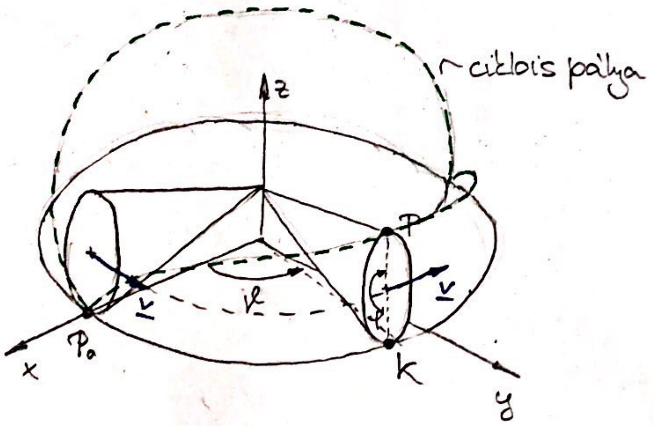
1, szögsebessége ($\underline{\omega}$ = ?) és szöggyorsulása ($\underline{\varepsilon}$ = ?)

2, a B pontjának sebessége és gyorsulása ($\underline{v}_B$ = ?, $\underline{a}_B$ = ?)

3, az A pontjának gyorsulása ($\underline{a}_A$ = ?).

Megjegyzés:

A kúp alapkörének egy kerületi pontja P, a kúp magassága h = R által meghatározott átmérőjű gömbre rajzolt cikloison mozog:



A pályagörbe paraméteres egyenlete:

$x = h\cos\nu + r\sin\varphi\sin\nu$

$y = h\sin\nu - r\sin\varphi\cos\nu$

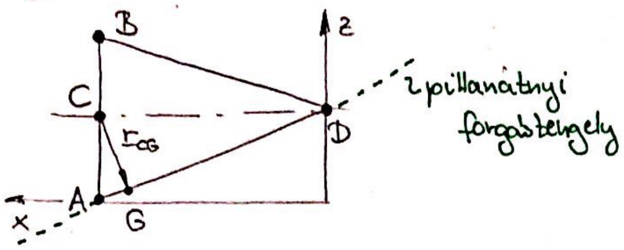
$z = r(1-\cos\varphi)$

ahol $h\nu = r\varphi$

1, $\underline{\omega}$ = ?

$$\left.\begin{array}{l}\text{A gömbcsukló miatt } \underline{v}_D = \underline{0}\\ \text{A kúp gördül: } \underline{v}_A = \underline{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{az A-D egyenes a pillanatnyi forgástengely}$$

Vagyis $\underline{\omega} \parallel \underline{r}_{AD}$, $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_{AD}$



$$\underline{r}_{CG} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_C}{\omega^2} = \frac{1}{31{,}25} \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}}_{=\underline{\omega}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{v}_C} = \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{bmatrix} m$$

A keresett $\underline{\omega}$ szögsebesség komponenseit az ismert $\underline{v}_C$ sebesség, valamint a $\underline{v}_D = \underline{0}$ és $\underline{v}_A = \underline{0}$ sebességek felhasználásával határozhatjuk meg. A merev test két pontjának sebességei között fennálló összefüggés alapján

$$\underline{v}_C = \underbrace{\underline{v}_D}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{DC} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_z h \\ -\omega_y h \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\omega_y = 0}$$

$$\boxed{\omega_z = \frac{v_C}{h} = 2{,}5 \frac{rad}{s}}$$

$$\underline{v}_C = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_x r \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\omega_x = -\frac{v_C}{r} = -5 \frac{rad}{s}}$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

<u>Megjegyzés:</u> Az A-D egyenes a kúp kinematikai vektorrendszerének centrális egyenese, azaz bármely pontjába redukálva a kinematikai vektorkettőst, annak a két eleme $\parallel$ egymással (jelen esetben a seb. zérus)

<u>Megjegyzés:</u> Mivel v_C = áll, valamint r, h sem változik a mozgás folyamán, így $|\underline{\omega}|$ = áll., csak az iránya változik. Irányváltozását a D-C tengely elfordulását jellemző $\underline{\omega}_z = \omega_z \underline{k}$ szögsebességgel jellemezhetjük és

$$\dot{\underline{\omega}} = \underline{\varepsilon} = \underline{\omega}_z \times \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

<u>Másképpen:</u>

$$\underline{a}_C = \underbrace{\underline{a}_D}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{DC} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{DC})}_{=\underline{v}_C} = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{DC} + \underline{\omega} \times \underline{v}_C = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_z h \\ -\varepsilon_y h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_z v_c \\ 0 \\ \omega_x v_c \end{bmatrix}$$

A C pont $R_c = h$ sugarú körpályán mozog $|\underline{v}_c| = \text{áll}$ sebességgel, így

$$\underline{a}_C = \underline{a}_{Cn} = a_{Cn}\,\underline{e}_n = \frac{v_c^2}{h}\,\underline{e}_n$$

$$\underline{a}_C(t_0=0) = \frac{v_c^2}{h}\,\underline{e}_n(t_0=0) = \frac{100}{4}(-\underline{i}) = \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

Az ismert értékek behelyettesítésével:

$$\begin{bmatrix} -a_{Cn} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_z h \\ -\varepsilon_y h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_z v_c \\ 0 \\ \omega_x v_c \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a_{Cn} = \omega_z v_c = 25\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon_z = 0}$$

$$\boxed{\varepsilon_y = \frac{\omega_x v_c}{h} = \frac{-50}{4} = -12{,}5\,\frac{rad}{s^2}}$$

Valamint

$$\underline{a}_A = \underbrace{\underline{a}_D}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{DA} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{DA})}_{\parallel \Rightarrow \underline{0}} = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{DA} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$$

A kúp tisztán gördül, így a kényszerpályával érintkező pontjának az R sugarú körhöz érintőleges irányba eső gyorsulásösszetevője zérus. A $t_0 = 0$ időpillanatban $a_{Ay} = 0$.

Ezzel:

$$\underline{a}_A = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ 0 \\ a_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_y r \\ \varepsilon_x r \\ -\varepsilon_y h \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a_{Ax} = -\varepsilon_y r = 25\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{a_{Az} = -\varepsilon_y h = 12{,}5 \cdot 4 = 50\,\frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}} \qquad \boxed{\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}}$$

3) feladat

2) $\underline{v}_3 = ?$

$$\boxed{\underline{v}_3 = \underbrace{\underline{v}_A}_{=\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{A3} = \underline{\omega} \times \underline{r}_{A3} = \underline{\omega} \times 2\underline{r}_{AC} = 2\underline{v}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}}$$

$\underline{a}_3 = ?$

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_C + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{C3} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{C3}) = \underline{a}_C + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{C3} + \underline{\omega} \times \underline{v}_c = \begin{bmatrix} -v_c^2/h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} \varepsilon_y r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ v_c \\ 0 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} -\omega_z v_c \\ 0 \\ \omega_x v_c \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}}$$