Elméleti összefoglaló:

Forgórészek kiegyensúlyozása:

Általában elkerülendő a tengelyek ún. dinamikus igénybevétele, amikor a csapágyakban ébredő erők periodikusan változnak. A dinamikus hatások csökkentése érdekében szükséges a forgórészek megfelelő kiegyensúlyozása

Az ideális forgórész:

Ideális esetben a tengely nem deformálódik, a tengelyre szerelt alkatrész súlypontja a forgástengelyen van van és az egyik főtehetetlenségi iránya egybeesik a forgástengellyel. Ebben az esetben a súlypont gyorsulása nulla, a súlypontra számított perdület pedig párhuzamos a szögsebességgel, ezért a dinamika alaptételének egyenletei az alábbi alakot öltik:

$$m\underline{a}_s = \underline{0},$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{0}.$$

A tengely és a rá szerelt forgórész egyensúlyban van. A csapágyakból átadódó kényszererők állandó nagyságúak és irányúak - akkor is ilyen reakció erőrendszer lépne fel, ha nem forogna a tengely.

Két elkülöníthető eset van, melyek eltérnek az ideális esettől:

- statikus
- dinamikus

kiegyensúlyozatlanság esetei.

Statikus kiegyensúlyozatlanság:

Def.: Ha a forgórész statikusan kiegyensúlyozatlan, akkor az S súlypont $e \neq 0$ (excentricitás) távolságra van a forgástengelytől.

Ha a főtehetetlenségi irány párhuzamos a szögsebességgel, akkor továbbra is igaz, hogy $\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{0}$, azaz nem csak kinematikai, hanem dinamikai értelemben is síkmozgást végez a test. A súlypont gyorsulása azonban nem nulla.

A statikus kiegyensúlyozatlanságot úgy szüntetjük meg, hogy a súlyponttal ellenkező oldalon b távolságban elhelyezünk egy m_0 tömegű kis testet. Így a közös súlypont a forgástengelyre kerül.

Dinamikus kiegyensúlyozatlanság:

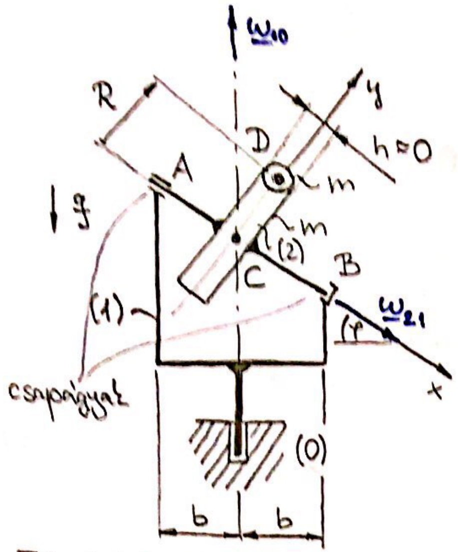
Def.: Dinamikus kiegyensúlyozatlanságról akkor beszélünk, ha a forgórész egyik súlyponti tehetetlenségi főiránya sem párhuzamos a forgástengellyel

Sem $\underline{\Pi}_s$, sem a deriváltja nem lesz párhuzamos a forgástengellyel. Állandó nagyságú szögsebesség esetében a perdületvektor is állandó szögsebességgel változtatja irányát.

A mozgás fenntartásához $\dot{\Pi}_s = M_s$ miatt a csapágyakban ébredő reakcióerők súlypontra számított nyomatékának is folyamatosan változó irányúnak kell lennie. A reakcióerők ennek megfelelő ingadozása káros rezgésekhez vezet, a statikus kiegyensúlyozatlanság esetéhez hasonlóan.

A csapágyreakciók ingadozása azzal is magyarázható, hogy a testtel együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a szállító erő nyomatéka nem nulla. Így a dinamikus kiegyensúlyozatlanság megszüntetéséhez a szállító erő nyomatékát kell nullára csökkenteni. Ez két darab megfelelő tömegű test felszerelésével történik.

1. Példa: (2015)



Adatok: $m = 0{,}6\ kg$ $\quad \varphi = 30°$

$R = 0{,}04\ m$ $\quad g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

$\omega_{10} = 20\ \frac{rad}{s}$

$\omega_{21} = 30\ \frac{rad}{s}$

Ismert, hogy $\omega_{10} = $ áll., $\omega_{21} = $ áll.

Van egy m tömegű korongunk és ehhez kapcsolódóan egy m tömegű anyagi pontunk!

Az axiális irányú elmozdulást csak a B csapágy gátolja! (csak koncentrált erők ébrednek)

Feladatok: (25p)

I. (Minimum) Határozza meg a (2) jelű test súlypontjának gyorsulásvektorát! (5p)

II. Paraméteres alakban adja meg a (2) jelű test C pontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixát! ((x,y,z)-ben) (3p)

III. Paraméteres alakban számítsa ki a (2) jelű test C pontra számított perdület vektorát az (x,y,z) koord.-rendszerben! (4p)

IV. Rajzolja meg a (2) jelű test szabadtest ábráját! (3p)

V. A szabadtest ábra alapján írja fel a dinamika alaptételének vetületi egyenleteit paraméteresen! (10p)

I.

álló tengelyen helyezkedik el

$$\underline{a}_S = \underbrace{\underline{a}_C}_{=0} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{CS} + \underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{CS})$$

Szögsebesség:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\omega}_2} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} -\omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(x,y,z)} + \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad ①$$

Szöggyorsulás:

állandó nagyságú mivel ω_{10}=áll és ω_{21}=áll

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\varepsilon}_2} = \underline{\omega}_1 \times \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -\omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \end{bmatrix} \quad ①$$

Ezzel

$$\underline{a}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ R/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ R/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{R}{2}\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi + \frac{R}{2}(\omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi)\omega_{10}\cos\varphi \\ -\frac{R}{2}(\omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi)(\omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{R}{2}\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R}{2}(\omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi - \frac{R}{2}\omega_{10}^2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\frac{R}{2}(\omega_{21}-\omega_{10}\sin\varphi)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ①$$

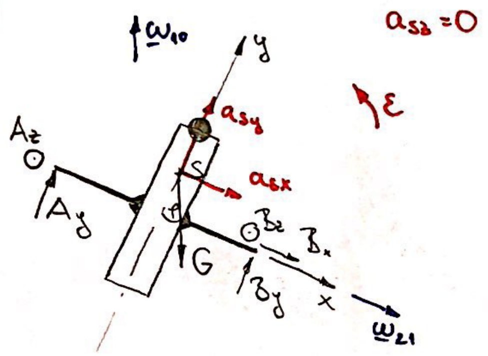
Igy $\underline{a}_S = \begin{bmatrix} 17{,}32 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$ (2)

(II) $$\underline{\underline{\Theta}}_c = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\Theta}}_{korong}} + \underbrace{\begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\Theta}}_{anyagi\ pont}} = \begin{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{2}mR^2 + mR^2}^{=\frac{3}{2}mR^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{\frac{1}{4}mR^2 + mR^2}_{=\frac{5}{4}mR^2} \end{bmatrix}$$ (3)

(III) $\underline{\Pi}_c = \underline{\underline{\Theta}}_c \underline{\omega}_2$ (álló pont)

$$\underline{\Pi}_{c\,(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4}mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{21} - \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mR^2(\omega_{21} - \omega_{10}\sin\varphi) \\ \frac{1}{4}mR^2\,\omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$ (4)

(IV)



(3)

(V) $[\underline{\dot{I}}, \underline{\dot{\Pi}}_c] = [\underline{F}, \underline{M}_e]_c$

$\underline{\dot{I}} = \underline{F}$:
$$\begin{cases} x: & 2ma_{sx} = B_x + 2mg\sin\varphi \\ y: & 2ma_{sy} = A_y + B_y - 2mg\cos\varphi \\ z: & 0 = A_z + B_z \end{cases}$$ (3)

$$\underline{\dot{\Pi}}_c = \underline{\underline{\Theta}}_c \underline{\varepsilon} + \underline{\omega}_2 \times \underline{\Pi}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{4}mR^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{21} - \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{2}mR^2(\omega_{21} - \omega_{10}\sin\varphi) \\ \frac{1}{4}mR^2\omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{4}mR^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi + \frac{1}{4}mR^2\omega_{10}\cos\varphi(\omega_{21} - \omega_{10}\sin\varphi) - \frac{3}{2}mR^2(\omega_{21} - \omega_{10}\sin\varphi)\,\omega_{10}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{2}mR^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi + \frac{5}{4}mR^2\omega_{10}^2\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}$$ (3)

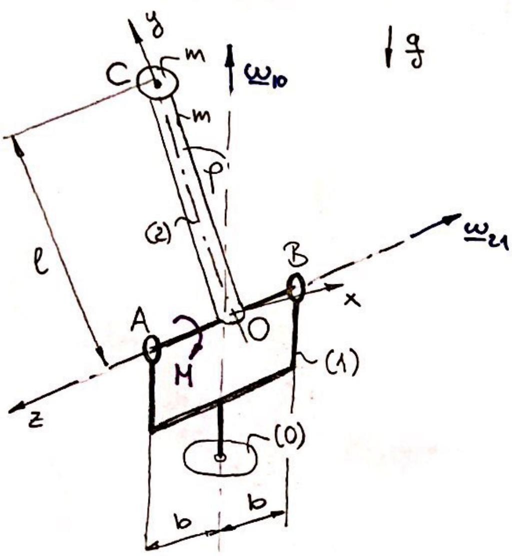
$$\underline{M}_c = \underline{r}_{CS} \times \underline{G} + \underline{r}_{CA} \times \underline{A} + \underline{r}_{CB} \times \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ R/2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2mg\sin\varphi \\ -2mg\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b/\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b/\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ +A_z \frac{b}{\cos\varphi} - B_z \frac{b}{\cos\varphi} \\ -Rmg\sin\varphi - \frac{b}{\cos\varphi} A_y + \frac{b}{\cos\varphi} B_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\dot{\underline{\Pi}}_c = \underline{M}_c$:

$$\begin{cases} x: & 0 = 0 \\ y: & 0 = (A_z - B_z)\frac{b}{\cos\varphi} \\ z: & \frac{5}{4} mR^2 \left(\omega_{10}^2 \sin\varphi\cos\varphi - 2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi\right) = -mgR\sin\varphi + (B_y - A_y)\frac{b}{\cos\varphi} \end{cases}$$

2. Példa: (2014)



Adatok:

$m = 0{,}36$ kg $\qquad \varphi = 30°$

$\ell = 0{,}6$ m $\qquad g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$b = 0{,}1$ m

$\omega_{10} = 2 \frac{rad}{s} \qquad$ M ismeretlen

$\omega_{21} = 5 \frac{rad}{s}$

B gátolja az axiális elmozdulást!
(csak koncentrált erők!)

Feladatok: (25p)

I. Paraméteresen adja meg a (2) test O pontjára számított tehetetlenségi nyomatéki mátrixot (x,y,z) - ben! (3p)

II. Adja meg paraméteresen a perdületvektort O-ra (x,y,z)-ben! (4p)

III. Minimum: Határozza meg a (2) test súlypontjának gyorsulását! (5p)

IV. (2) test szabadtest ábrája! (3p)

V. A szabadtest ábra alapján a dinamika alaptételének vetületi egyenletei paraméteresen! (10p)

I. $\underline{\underline{\Theta}}_0 = \underline{\underline{\Theta}}_0^{rúd} + \underline{\underline{\Theta}}_0^{pont}$

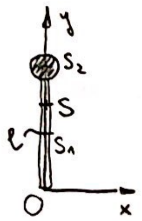
$$\underline{\underline{\Theta}}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\ell^2 \end{bmatrix}}_{=\underline{\underline{\Theta}}_S^{rúd}\ (0,5)} + \underbrace{\begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\Theta}}_{S0}^{pont}\ (1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\Theta}}_{S0}^{rúd}\ (0,5)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

II. $\underline{\Pi}_0 = \underline{\underline{\Theta}}_0 \underline{\omega}$ (álló pont), ahol $\underset{(x,y,z)}{\underline{\omega}} = \underline{\omega}_{10} + \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ -\omega_{21} \end{bmatrix}$ (2)

$$\underline{\Pi}_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}m\ell^2\omega_{10}\sin\varphi \\ 0 \\ -\frac{4}{3}m\ell^2\omega_{21} \end{bmatrix} \quad (2)$$

III. $\underline{a}_S = \underbrace{\underline{a}_0}_{=0} + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{0S} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{0S})$, ahol $\underset{(x,y,z)}{\underline{\varepsilon}} = \underline{\omega}_1 \times \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ -\omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_{10}\omega_{21}c \\ \omega_{21}\omega_{10}si \\ 0 \end{bmatrix}$ (2)



$$\underline{r}_{0S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ell/2\, m + \ell m}{2m} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\ell \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

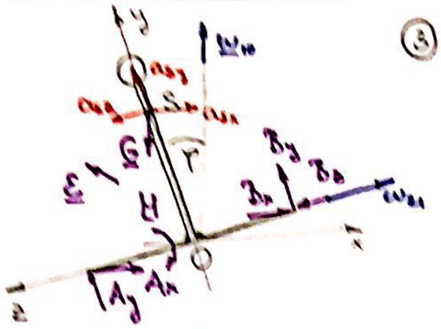
$$\underline{a}_S = \begin{bmatrix} -\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \\ \omega_{21}\omega_{10}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\ell \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ -\omega_{21} \end{bmatrix} \times \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ -\omega_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\ell \\ 0 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} \omega_{21}\frac{3}{4}\ell \\ 0 \\ \frac{3}{4}\ell\omega_{10}\sin\varphi \end{bmatrix}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\ell\omega_{10}^2\sin\varphi\cos\varphi \\ -\frac{3}{4}\ell(\omega_{21}^2 + \omega_{10}^2\sin^2\varphi) \\ -\frac{3}{4}\ell\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi - \frac{3}{4}\ell\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4}\ell\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}779 \\ -11{,}7 \\ -7{,}79 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right] \quad (2)$$

(IV) Szabadtest ábra:

(3)



(V) Dinamika alaptétele: $[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_0]_0 = [\underline{F}, \underline{M}_0]_0$

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F}: \quad \begin{cases} x: & 2m a_{Sx} = A_x + B_x - 2mg\sin\varphi \\ y: & 2m a_{Sy} = A_y + B_y - 2mg\cos\varphi \\ z: & 2m a_{Sz} = B_z \end{cases}$$

(3)

$$\dot{\underline{\Pi}}_0 = \underline{\underline{\Theta}}_0 \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \\ \omega_{21}\omega_{10}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{10}\sin\varphi \\ \omega_{10}\cos\varphi \\ -\omega_{21} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{4}{3}ml^2\omega_{10}\sin\varphi \\ 0 \\ -\frac{4}{3}ml^2\omega_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}ml^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}ml^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \\ \frac{4}{3}ml^2\omega_{21}\omega_{10}\sin\varphi - \omega_{21}\cdot\frac{4}{3}ml^2\omega_{10}\sin\varphi \\ -\frac{4}{3}ml^2\omega_{10}^2\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{3}ml^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi \\ 0 \\ -\frac{4}{3}ml^2\omega_{10}^2\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}$$

(3)

$$\underline{M}_0 = \underline{M} + \underline{r}_{OA} \times \underline{A} + \underline{r}_{OB} \times \underline{B} + \underline{r}_{OS} \times \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}l \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2mg\sin\varphi \\ -2mg\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

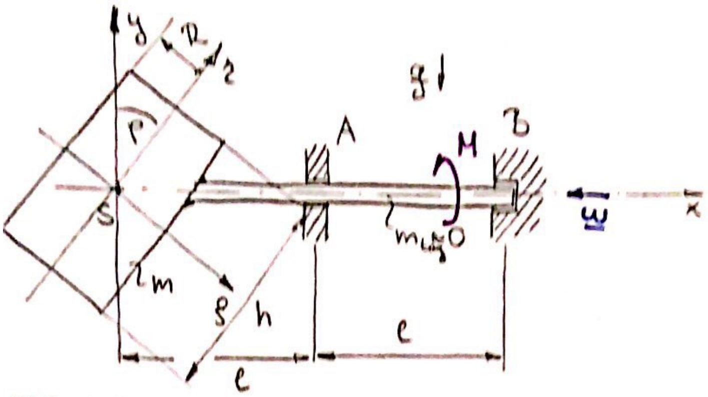
$$= \begin{bmatrix} -A_y b + B_y b \\ A_x b - B_x b \\ -M + \frac{3}{2}mgl\sin\varphi \end{bmatrix}$$

(3)

$$\dot{\underline{\Pi}}_0 = \underline{M}_0 = \begin{cases} x: & -\frac{8}{3}ml^2\omega_{10}\omega_{21}\cos\varphi = -A_y b + B_y b \\ y: & 0 = A_x b - B_x b \\ z: & -\frac{4}{3}ml^2\omega_{10}^2\sin\varphi\cos\varphi = -M + \frac{3}{2}mgl\sin\varphi \end{cases}$$

(1)

3. Példa: (2010)



A csapágyakban csak koncentrált erők ébrednek!

Adatok:

$m = 4\ kg$ $\quad M = 2\ Nm$

$l = 0{,}25\ m$ $\quad \varphi = 30°$

$R = 0{,}1\ m$ $\quad g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

$h = 0{,}3\ m$

$\omega = 10\ \frac{rad}{s}$

Feladatok: (25 p)

I. Paraméteresen határozza meg a forgórész S súlypontra számított perdületét a (ξ, η, ζ) koordináta-rendszerben! (7p)

II. A hengerből és tengelyből álló forgórészt egy testnek tekintve rajzolja meg a szabadtest ábrát! (3p)

III. A szabadtest ábra alapján az (x, y, z) koordináta-rendszerben írja fel a dinamika alaptételének vetületi egyenleteit paraméteres alakban! (12 p)

IV. Számítsa ki a forgórész szöggyorsulását a megadott M mellett! Határozza meg az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ reakcióerők vektorait!

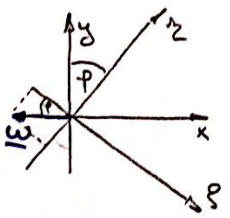
I. $\underline{I}_S = \underline{\underline{\Theta}}_S \underline{\omega}$ (1)

$$\underline{\underline{\Theta}}_S = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad (1)$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 = 0{,}04\ kgm^2 = \Theta_3$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} m R^2 = 0{,}02\ kgm^2 \quad (2)$$

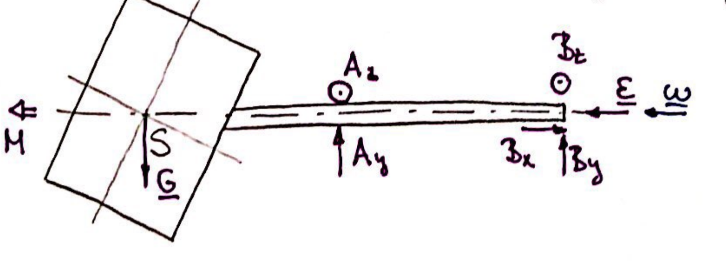
$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} -\omega\cos\varphi \\ -\omega\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad (1)$$



$$\underline{I}_S = \begin{bmatrix} -\Theta_1\omega\cos\varphi \\ -\Theta_2\omega\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} -0{,}346 \\ -0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \frac{kgm^2}{s} \quad (2)$$

II. Szabadtest ábra:

$\underline{a}_S = \underline{0}$ (álló tengelyen lévő pont)



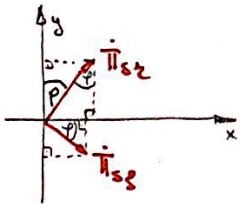
(3)

III. Dinamika alaptétele:

$$[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_s]_s = [\underline{F}, \underline{M}_s]_s \quad ; \quad \dot{\underline{I}} = \underline{F} : \begin{cases} x: & 0 = B_x & (1) \\ y: & 0 = A_y + B_y - mg & (2) \\ z: & 0 = A_z + B_z & (3) \end{cases} \quad 3$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{\underline{\Theta}}_s \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_s = \begin{bmatrix} -\Theta_1 \varepsilon \cos\varphi \\ -\Theta_2 \varepsilon \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} + \begin{bmatrix} -\omega\cos\varphi \\ -\omega\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \times \begin{bmatrix} -\Theta_1 \omega\cos\varphi \\ -\Theta_2 \omega \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\Theta_1 \varepsilon \cos\varphi \\ -\Theta_2 \varepsilon \sin\varphi \\ (\Theta_2 - \Theta_1)\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \quad 3 \quad \equiv \begin{bmatrix} \dot{\Pi}_{s\xi} \\ \dot{\Pi}_{s\eta} \\ \dot{\Pi}_{s\zeta} \end{bmatrix}$$



$$\dot{\underline{\Pi}}_{s\,(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \dot{\Pi}_{s\xi}\cos\varphi + \dot{\Pi}_{s\eta}\sin\varphi \\ -\dot{\Pi}_{s\xi}\sin\varphi + \dot{\Pi}_{s\eta}\cos\varphi \\ \dot{\Pi}_{s\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Theta_1 \varepsilon \cos^2\varphi - \Theta_2 \varepsilon \sin^2\varphi \\ (\Theta_1 - \Theta_2)\varepsilon \sin\varphi\cos\varphi \\ (\Theta_2 - \Theta_1)\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad 3$$

$$\underline{M}_s = \underline{M} + \underline{r}_{SA} \times \underline{A} + \underline{r}_{SB} \times \underline{B} = \begin{bmatrix} -M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ -A_z \ell - B_z \cdot 2\ell \\ A_y \ell + 2\ell B_y \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\dot{\underline{\Pi}}_s = \underline{M}_s : \begin{cases} x: & -\Theta_1 \varepsilon \cos^2\varphi - \Theta_2 \varepsilon \sin^2\varphi = -M & (4) \\ y: & (\Theta_1 - \Theta_2)\varepsilon \sin\varphi\cos\varphi = -A_z\ell - B_z \cdot 2\ell & (5) \\ z: & (\Theta_2 - \Theta_1)\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi = A_y\ell + B_y \cdot 2\ell & (6) \end{cases}$$

IV.

(4) $$\varepsilon = \frac{M}{\Theta_1 \cos^2\varphi + \Theta_2 \sin^2\varphi} = \underline{\underline{57{,}14}} \ \frac{rad}{s^2} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -57{,}14 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2} \quad 1$$

(3) $B_z = -A_z \Rightarrow (5)$

$$A_z = \frac{(\Theta_1 - \Theta_2)\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{\ell} = \underline{\underline{1{,}98 N}} \qquad B_z = \underline{\underline{-1{,}98 N}}$$

(2)

$B_y = -A_y + mg \Rightarrow (6)$ $$A_y = 2mg - \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\ell} = \underline{\underline{81{,}94 N}}$$

$$B_y = \underline{\underline{-42{,}70 N}}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 81{,}94 \\ 1{,}98 \end{bmatrix} [N] \quad 1 \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -42{,}70 \\ -1{,}98 \end{bmatrix} [N]$$