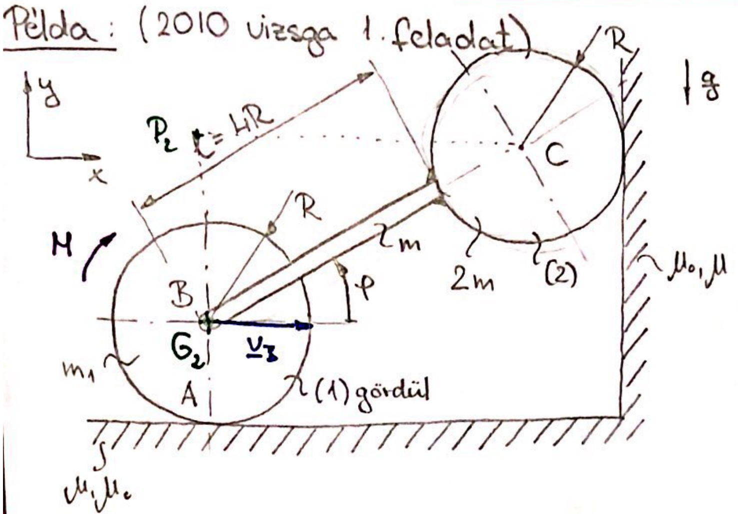
Példa: (2010 vizsga 1. feladat)



M időben változik, úgy, hogy $\underline{v}_B$ = áll

Adatok: $m_1 = 6\,kg$

$m = 3\,kg$

$R = 0{,}3\,m$

$v_B = 0{,}3\,\frac{m}{s}$

$\varphi = 30°$

$\mu_0 = 1{,}0$

$\mu = 0{,}1$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Feladatok:

1, Az ábrán vázolt időpillanatban határozza meg az (1) és (2) jelű testek gyorsulásállapotát a súlypontjukhoz rendelt mennyiségekkel! Jelölje be az ábrába a (2) jelű test sebességpólusát és gyorsuláspólusát! (10 p)

2, Bontsa részekre a szerkezetet és rajzolja meg az (1) és (2) jelű testek szabadtest ábráit! A szabadtest ábrák alapján írja fel paraméteresen a dinamika alaptételének vetületi egyenleteit! (10p)

3, Határozza meg a megadott mozgásállapotot biztosító M nyomaték pillanatnyi értékét! Igazolja, hogy (1) valóban gördül (7p)

4, A (2) jelű test és a fal közötti súrlódást elhanyagolva, határozza meg mennyi mechanikai munkát végez az M nyomaték, amíg a (2) jelű test éppen a függőleges helyzetbe ér? (8p)

I. Feladat: Mi kell a gyorsulásállapothoz? (ω_i, a_{si}, ε_i)

$\underline{v}_A = \underline{0}$ gördülés miatt, így $v_B = \omega_1 R \Rightarrow \omega_1 = \frac{v_B}{R} = \frac{0{,}3}{0{,}3} = 1\,\frac{rad}{s}$, vagyis $\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$

ha v_B = áll, akkor ω_1 = áll, tehát $\varepsilon_1 = 0\,\frac{rad}{s^2}$

1

és mivel v_B = áll $\Rightarrow a_B = 0\,\frac{m}{s^2}$

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5R\cos\varphi \\ 5R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_B - \omega_2 5R\sin\varphi \\ 5R\omega_2\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből:

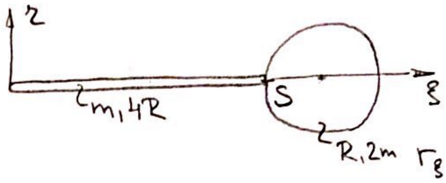
1

$$\left.\begin{array}{l} 0 = v_B - \omega_2 5R\sin\varphi \\ v_C = 5R\omega_2\cos\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_B}{5R\sin\varphi} = \underline{\underline{0{,}4}}\,\frac{rad}{s} \quad 1$$

$$\underbrace{\underline{a}_C}_{=\begin{bmatrix}0\\a_C\\0\end{bmatrix}} = \underbrace{\underline{a}_B}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BC} - \omega_2^2 \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon_2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}5R\cos\varphi\\5R\sin\varphi\\0\end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix}5R\cos\varphi\\5R\sin\varphi\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\varepsilon_2\cdot 5R\sin\varphi - \omega_2^2\cdot 5R\cos\varphi\\ \varepsilon_2\cdot 5R\cos\varphi - \omega_2^2\, 5R\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$ ①

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_2 5R\sin\varphi + \omega_2^2 5R\cos\varphi \\ a_C &= \varepsilon_2 5R\cos\varphi - \omega_2^2 5R\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$ ①

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = -\frac{\omega_2^2 5\cancel{R}\cos\varphi}{5\cancel{R}\sin\varphi} = -\frac{\omega_2^2\cos\varphi}{\sin\varphi} = -0{,}277\,\frac{rad}{s^2}$$ ①



$$r_\xi = \frac{2R\cdot \cancel{m} + 5R\cdot 2\cancel{m}}{3\cancel{m}} = \frac{12}{3}R$$

$$\boxed{r_\xi = 4R}$$

$$\underline{a}_{S2} = \underbrace{\underline{a}_B}_{=\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BS2} - \omega_2^2 \underline{r}_{BS2}$$

$$\underline{a}_{S2} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon_2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4R\cos\varphi\\4R\sin\varphi\\0\end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix}4R\cos\varphi\\4R\sin\varphi\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\varepsilon_2\cdot 4R\sin\varphi - \omega_2^2 4R\cos\varphi\\ \varepsilon_2\cdot 4R\cos\varphi - \omega_2^2\cdot 4R\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-0{,}384\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s^2}$$ ②

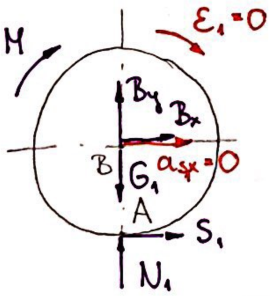
Összegyűjtve:

$$\underline{a}_{S2} = \begin{bmatrix}0\\-0{,}384\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s^2} \; ; \; \underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\-0{,}277\end{bmatrix}\frac{rad}{s^2} \; ; \; \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\0{,}4\end{bmatrix}\frac{rad}{s}$$

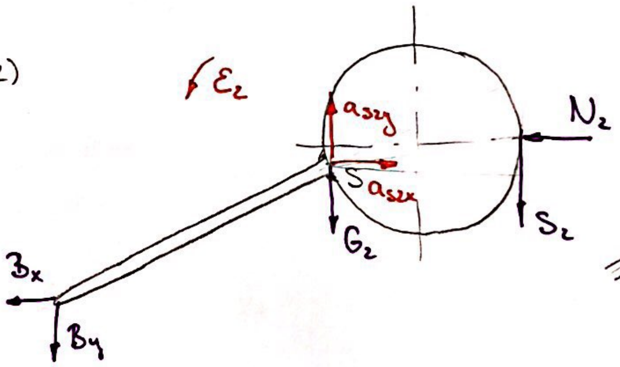
Póluspontok: ②

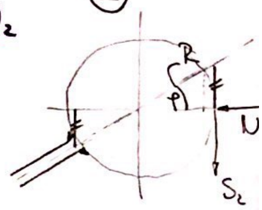
II. Feladat: Szabadtest ábrák:

(1) ②



(2) ②





$$[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_3] = [\underline{F}, \underline{M}_3]_3$$

(1) x: $0 = B_x + S_1$ ①

(2) y: $0 = B_y + N_1 - \underbrace{G_1}_{=m_1 g}$ ①

(3) z: $0 = -M + S_1 R$ ①

$$[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_{S2}]_{S2} = [\underline{F}; \underline{M}_{S2}]_{S2}$$

(4) x: $\underbrace{3m\, a_{s2x}}_{=0} = -N_2 - B_x$ ①

(5) y: $3m\, a_{s2y} = -B_y - \underbrace{G_2}_{=3mg} - S_2$ ①

(6) z: $\Theta_{S_2}\varepsilon_2 = N_2 R\sin\varphi + B_y\cdot 4R\cos\varphi - B_x\cdot 4R\sin\varphi - S_2(R + R\cos\varphi)$ ①

III. Feladat: M nyomaték pillanatnyi értéke:

(2)

$$\Theta_{S2} = \frac{1}{12} m (4R)^2 + m(2R)^2 + \frac{1}{2}(2m)R^2 + 2mR^2 = \frac{4}{3}mR^2 + 4mR^2 + mR^2 + 2mR^2 = \frac{25}{3}mR^2 = \underline{\underline{2{,}25}}$$

A (2) csúszik a falon, így

$$S_2 = \mu N_2 \quad (1)$$

(4) $B_x = -N_2$; (5) $B_y = -3m a_{sy} - 3mg - \mu N_2$

(6)
$$\Theta_{S2}\varepsilon_2 = N_2 R\sin\varphi + (-3m a_{sy} - 3mg - \mu N_2)\cdot 4R\cos\varphi + N_2 \cdot 4R\sin\varphi - \mu N_2 (R + R\cos\varphi)$$

$$\Theta_{S2}\varepsilon_2 = N_2 (R\sin\varphi - \mu\cdot 4R\cos\varphi + 4R\sin\varphi - \mu(R + R\cos\varphi)) - (3m a_{sy} + 3mg)4R\cos\varphi$$

$$N_2 = \frac{\Theta_{S2}\varepsilon_2 + 3m(a_{sy} + g)4R\cos\varphi}{5R\sin\varphi - \mu 5R\cos\varphi - \mu R} = \underline{\underline{148{,}35\ N}} \quad (1)$$

$B_x = \underline{\underline{-148{,}35\ N}}$, $B_y = \underline{\underline{-99{,}67\ N}}$

(1) $S_1 = -B_x = \underline{\underline{148{,}35\ N}}$ (2) $N_1 = m_1 g - B_y = \underline{\underline{158{,}53\ N}}$ (1)

Gördülési feltétel:

(3) $M = S_1 R = \underline{\underline{44{,}50\ Nm}}$ (1) $\frac{S_1}{N_1} = 0{,}94 < \mu_0 \Rightarrow$ gördül (1)

IV Feladat: M nyomaték által végzett munka:

Munkatétel: $T_2 - T_1 = W_{12}$ (1)

$$T_1 = \underbrace{\frac{1}{2}\Theta_A \omega_1^2}_{\text{álló pontra}} + \frac{1}{2}3m v_{S2}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{S2}\omega_2^2 \quad , \text{ahol} \quad \Theta_A = \underbrace{\frac{3}{2}m_1 R^2}_{=\frac{1}{2}m_1R^2 + m_1R^2}$$

$$\underline{v}_{S2} = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BS2} = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_2 l\sin\varphi + v_B \\ +\omega_2 l\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}060 \\ 0{,}416 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \Rightarrow v_{S2}^2 = 0{,}1764 \quad (1)$$

Ezzel $T_1 = 1{,}5788\ J$ (1)

$$T_2 = \frac{1}{2}\Theta_A \omega_1^2(t_2) + \frac{1}{2}3m v_{S2}^2(t_2) + \frac{1}{2}\Theta_{S2}\omega_2^2(t_2)$$

$\omega_1(t_1) = \omega_1(t_2) = \omega_1$ nyomaték miatt $\omega_1 =$ áll.

Függőleges helyzetben $C = P_2$ vagyis $v_C = 0$

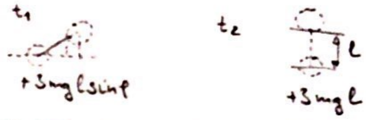
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{v}_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{\omega}_2} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5R \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{r}_{BC}} = \begin{bmatrix} v_B - \omega_2 5R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v}{5}$$

Hasonlóan:

$v_{S2} = 4R\,\omega_2(t_2) = 0{,}24\,\frac{m}{s}$, ahol $\omega_2(t_2) = 0{,}2\,\frac{rad}{s}$ (1)

Ezzel: $T_2 = \underline{\underline{0{,}7092}}\,J$ (1)

$W_{12} = -\,3mg(l - l\sin\varphi) + W_{12}^{M}$ (2)



$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + W_{12}^{M}$

$= +3mgl\sin\varphi - 3mgl + W_{12}^{M} = -3mgl(1-\sin\varphi) + W$

Vagyis: $W_{12}^{M} = T_2 - T_1 + 3mgl(1-\sin\varphi) = \underline{\underline{52{,}3}}\,J$ (1)